مقارنة بعض طرائق تقدير دالة البقاء للتوزيع الآسي المبتور

م. جاسم حسن لازم
الكلية التقنية الإدارية / بغداد

1- المستخلص

التوزيع الآسي هو من التوزيعات الواسعة الانتشار على صعيد الدراسات والأبحاث العلمية وله تطبيقات واسعة في مجال المعولية والمجالات الهندسية أو تحليل دوال البقاء لذلك يرى الباحث بإجراء دراسات موسعة في خصائص هذا التوزيع .

في هذا البحث تم تقدير دالة البقاء للتوزيع الآسي المبتور بطرائق الإمكان الأعظم وطريقة بيز الأولى والثانية وطريقة المربعات الصغرى وطريقة جاك نايف بالاعتماد أولا على طريقة الإمكان الأعظم كطريقة جاك نايف أولى وثانيا على طريقة بيز الأولى كطريقة جاك نايف ثانية والمقارنة بينهم باستخدام المحاكاة، لهذا الغرض اعتمد الباحث على حجوم عينات مختلفة هي(100,50,30,20,10) ، لقد أظهرت نتائج البحث تفوق طريقة بيز الثانية على جميع طرائق التقدير المعتمدة ولكافة حجوم العينات.

A comparison Some of Methods for Estimating Survival Function for Truncated Exponential Distribution

Abstract

Exponential distribution is one of most common distributions in studies and scientific researches with wide application in the fields of reliability, engineering and in analyzing survival function therefore the researcher has carried on extended studies in the characteristics of this distribution.

In this research, estimation of survival function for truncated exponential distribution in the maximum likelihood methods and Bayes first and second method, least square method and Jackknife dependent in the first place on the maximum likelihood method, then on Bayes first method then comparing then using simulation, thus to accomplish this task, different size samples have been adopted by the searcher using (10, 20,30,50,100) results gained proved that second Bayes method domination upon all other method and for all samples.

مجلة العلوم
الاقتصادية والإدارية
المجلد 18
العدد 68
الصفحات 403- 419

2- المقدمة وهدف البحث

تنوعت الدراسات والبحوث في إظهار أهمية التوزيع الآسي ففي عام 1984 لاحظ الباحث Epstein بأن هناك تقارب في التطبيق بين التوزيع الآسي والتوزيع الطبيعي في مجال التجارب الزراعية[7]، وفي عام 1994 قام الباحث Kin Lan وآخرون بتقدير معلمات التوزيع الآسي ذات المعلمتين باستخدام عينة المجموعة المرتبة [9]، وفي عام 1999لاحظ الباحثان Gupta and Kundu بان المعلمات الثلاث لتوزيع الآسي العام (معلمة الشكل والقياس والموقع) هي أفضل من المعلمات الثلاث لنموذج كاما أو ويبل في بعض الحالات[8]، وفي عام 2001 قام الباحث Raqab and Ahsanllah بتقدير معلمات التوزيع الآسي ذات المعلمتين باستخدام عينة المجموعة المرتبة[11] وفي عام 2008 قام الباحث Faris Muslim بتقدير الوسط الحسابي لتوزيع الآسي المبتور[4]،وفي عام 2010 قام Razaei وآخرون بدراسة الإحصاءات المرتبة لتوزيع الآسي – بواسون[12].

في بحثنا هذا تم تقدير دالة البقاء باستخدام أساليب بيز مع طريقة الإمكان الأعظم وطريقة المربعات الصغرى وطريقة جاك نايف الأولى والثانية لمعرفة التقدير الأفضل للطرائق أعلاه.

3- طرائق التقدير

1- طريقة الإمكان الأعظم Maximum Likelihood Method [1][2]

يمكن تعريف التقدير بهذه الطريقة على انه قيم المعلمات التي تجعل دالة الإمكان الأعظم في نهايتها العظمى إذ تعد خاصية الثبات(invariant) من الخصائص الجيدة لهذه الطريقة مما جعلها ذات كفاءة عالية.

لتكن ($t_1,t_2,\ldots,t_n$) عينة عشوائية بحجم n مسحوبة من مجتمع تتوزع مفرداته بحسب دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع الآسي Exponential Distribution التي تحتوي على معلمتين (θ, t_0) وبافتراض ثبات معلمة الموقع t_0 وكما يلي:

$$f(t;\theta)=\frac{1}{\theta}\exp(-\frac{t-t_0}{\theta}), t\ge t_0 \qquad \ldots\ldots (1)$$

إذ إن:

t_0: تمثل معلمة الموقع(Location parameter) إذ إن الفشل لا يحدث قبل الوقت t_0.

θ: تمثل معلمة القياس(scale parameter)وان $\theta > 0$.

$$L(t_1,t_2,..,t_n)=\prod_{i=1}^{n} f(t_i,\theta) \qquad \ldots\ldots (2)$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}\exp(-\frac{t-t_0}{\theta}) \qquad \ldots\ldots (3)$$

$$=\theta^{-n}\exp(-\frac{\sum_{i=1}^{n} t_i - nt_0}{\theta}) \qquad \ldots\ldots (4)$$

$$\log L(t_1,t_2,...,t_n) = -n\log\theta - \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i - nt_0}{\theta} \qquad ....\ (5)$$

$$\frac{\partial \log L(t_1,t_2,..,t_n)}{\partial\theta} = -\frac{n}{\hat{\theta}} + \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i - nt_0}{\hat{\theta}^2} = 0 \qquad ....(6)$$

$$\hat{\theta}_{ML} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i - nt_0}{n} \qquad .... (7)$$

$$\hat{S}(t) = 1 - F(x) = 1 - 1 + \exp(-\frac{t_i - t_0}{\theta}) \qquad .... (8)$$

$$\hat{S}_{ML}(t) = \exp(-\frac{t_i - t_0}{\hat{\theta}_{ML}}) \qquad .... (9)$$

2- طريقة تقدير بيز باستعمال معلومات جفري المسبقة[5]

Bayes Method by Using Jeffrey Prior Information

افترض $t_1,t_2,....,t_n$ متغيرات عشوائية مسحوبة من عينة عشوائية بحجم n بدالة كثافة الاحتمالية (p.d.f) probability density function $f(t;t_0,\theta)$ والتي هي كما يلي :

$$\because\ f(t;\theta) = \frac{1}{\theta}\exp(-\frac{t-t_0}{\theta}), t \geq t_0 \qquad .... (10)$$

حيث تعتمد طريقة بيز على معلومات جفري المسبقة Jeffrey prior information وكما يلي:
تفترض معلومات جفري المسبقة إن دالة $g(\theta)$ تتناسب طرديا مع الجذر ألتربيعي لمعلومات فيشر Fisher information وكما يلي :

$$g(\theta) = \sqrt{I(\theta)} \qquad .... (11)$$

إذ إن: $I(\theta)$ هي معلومات فيشر(Fisher information) وان

$$I(\theta) = -nE\left(\frac{\partial^2 \ln f(t;\theta)}{\partial\theta^2}\right)$$

$$I(\theta) = -nE\left(\frac{\partial^2 \ln f(t;\theta)}{\partial\theta^2}\right) = \frac{n}{\theta^2} \qquad \text{.......................... (12)}$$

$$g(\theta) = \frac{k\sqrt{n}}{\theta} \qquad \text{..................... (13)}$$

نستطع إيجاد تقدير بيز باستعمال معلومات جفري المسبقة بإيجاد التوزيع الشرطي الذي يعتمد على دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة والدالة الكثافة الاحتمالية الأحادية لذا فان التوزيع الشرطي هو كما يلي:

$$L(t_1,t_2,..,t_n \mid \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(t_i,\mid \theta)$$

$$= \theta^{-n}\exp(-\frac{\sum_{i=1}^{n} t_i - nt_0}{\theta}) \qquad \text{.................. (14)}$$

$$H(t_1,t_2,..,t_n;\theta) = L(t_1,t_2,..,t_n \mid \theta)g(\theta)$$

$$= \theta^{-n}\exp(-\frac{\sum_{i=1}^{n} t_i - nt_0}{\theta}) * \frac{k\sqrt{n}}{\theta}$$

$$= \frac{k\sqrt{n}}{\theta^{n+1}}\exp(-\frac{\sum_{i=1}^{n} t_i - nt_0}{\theta}) \qquad \text{.................. (15)}$$

$$P(t_1,t_2,..,t_n) = \int H(t_1,t_2,..,t_n;\theta)d\theta$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{k\sqrt{n}}{\theta^{n+1}} * \exp(-\frac{\sum_{i=1}^{n} t_i - nt_0}{\theta})d\theta$$

$$P(t_1,t_2,..,t_n) = \frac{k\sqrt{n}(n-1)!}{(\sum_{i=1}^{n} t_i - nt_0)^n} \qquad \text{..................(16)}$$

$$\Pi(\theta \mid t_1,t_2,..,t_n) = \frac{H(t_1,t_2,..,t_n;\theta)}{P(t_1,t_2,..,t_n)}$$

$$= \frac{\frac{k\sqrt{n}}{\theta^{n+1}}\exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n} t_i - nt_0}{\theta}\right)}{\frac{k\sqrt{n}(n-1)!}{(\sum_{i=1}^{n} t_i - nt_0)^n}}$$

$$= \frac{(\sum_{i=1}^{n} t_i - nt_0)^n * \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n} t_i - nt_0}{\theta}\right)}{\theta^{n+1}(n-1)!} \qquad \text{.............. (17)}$$

وباستعمال دالة الخسارة والتي هي : $\ell(\hat{\theta},\theta) = c(\hat{\theta}-\theta)^2$

وباستخدام دالة المخاطرة **Risk function** لإيجاد تقدير بيز

$$R(\hat{\theta},\theta) = E(\ell(\hat{\theta},\theta)) \qquad \text{................ (18)}$$

$$= \int_0^{\infty} \ell(\hat{\theta},\theta) \prod(\theta \mid t_1, t_2, .., t_n) d\theta$$

$$= \int_0^{\infty} c(\hat{\theta}-\theta)^2 * \frac{(\sum_{i=1}^{n} t_i - nt_0)^n}{\theta^{n+1}(n-1)!} \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n} t_i - nt_0}{\theta}\right)$$

$$R(\hat{\theta},\theta) = c\hat{\theta} - \frac{2c\hat{\theta}(\sum_{i=1}^{n} t_i - nt_0)}{(n-1)} + \frac{c(n-3)!}{(\sum_{i=1}^{n} t_i - nt_0)^{n-2}} \qquad \text{................ (19)}$$

$$\frac{\partial R(\hat{\theta},\theta)}{\partial \hat{\theta}} = 2c\hat{\theta} - \frac{2c(\sum_{i=1}^{n} t_i - nt_0)}{(n-1)} = 0$$

$$\hat{\theta}_{Bayes} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i - nt_0}{(n-1)} \qquad \text{.................. (20)}$$

$$\hat{S}(t)=\int_{0}^{\infty}\exp(-\frac{t-t_0}{\theta})\frac{(\sum_{i=1}^{n}t_i-nt_0)^n}{\theta^{n+1}(n-1)!}\exp(-\frac{\sum_{i=1}^{n}t_i-nt_0}{\theta})d\theta$$

$$\hat{S}(t)=(\frac{\sum_{i=1}^{n}t_i-nt_0}{t+\sum_{i=1}^{n}t_i-t_0-nt_0})^n \qquad \text{……………... (21)}$$

3- طريقة تقدير بيز باستخدام بتوسيع معلومات جفري المسبقة [5]

Bayes Method by Using extension Jeffrey Prior

يتم التوسع في معلومات جفري المسبقة على إن دالة $g(\theta)$ تتناسب طرديا مع معلومات فيشر Fisher information والمرفوعة إلى القوة c وكما يلي :

$$g(\theta)\propto I(\theta)^{C_1} \qquad \text{……………. (22)}$$

إذ إن: $I(\theta)$ هي معلومات فيشر(Fisher information) وان

$$I(\theta) = -nE\left(\frac{\partial^2 \ln f(x;\theta,t_0)}{\partial\theta^2}\right) = \frac{n}{\theta^2} \qquad \text{.............. (23)}$$

$$\therefore g(\theta) = \frac{kn^{c_1}}{\theta^{2c_1}} \qquad \text{...................(24)}$$

$$L(t_1,t_2,..,t_n \mid \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(t_i \mid \theta) = \theta^{-n} \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n} t_i - nt_0}{\theta}\right) \qquad \text{............ (25)}$$

$$H(t_1,t_2,..,t_n,\theta) = L(t_1,t_2,..,t_n \mid \theta) g(\theta)$$

$$= \theta^{-n} \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n} t_i - nt_0}{\theta}\right) * \frac{kn^{c_1}}{\theta^{2c_1}} \qquad \text{.................. (26)}$$

وعليه فأن دالة الكثافة الاحتمالية الأحادية $(t_1,t_2,....,t_n)$ هي:

$$P(t_1,t_2,..,t_n) = \int_0^\infty H(t_1,t_2,..,t_n,\theta)d\theta$$

$$= \int_0^\infty \frac{kn^{c_1}}{\theta^{n+2c_1}} \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n} t_i - nt_0}{\theta}\right)d\theta$$

$$= \frac{kn^{c_1}(n+2c_1-2)!}{\left(\sum_{i=1}^{n} t_i - nt_0\right)^{n+2c_1-1}} \qquad \text{.................. (27)}$$

$$\Pi(\theta \mid t_1,t_2,..,t_n) = \frac{H(t_1,t_2,..,t_n,\theta)}{P(t_1,t_2,..,t_n)}$$

$$= \frac{\dfrac{kn^{c_1}}{\theta^{n+2c_1}} \exp\left(-\dfrac{\sum_{i=1}^{n} t_i - nt_0}{\theta}\right)}{\dfrac{kn^{c_1}(n+2c_1-2)!}{\left(\sum_{i=1}^{n} t_i - nt_0\right)^{n+2c_1-1}}}$$

$$= \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} t_i - nt_0\right)^{n+2c_1-1} \exp\left(-\dfrac{\sum_{i=1}^{n} t_i - nt_0}{\theta}\right)}{\theta^{n+2c_1}(n+2c_1-2)!} \qquad \text{.......................} \ (28)$$

وباستعمال دالة الخسارة والتي هي : $\ell(\hat{\theta},\theta) = c(\hat{\theta}-\theta)^2$

وباستخدام دالة المخاطرة **Risk function** لإيجاد تقدير بيز

$$R(\hat{\theta},\theta) = E(\ell(\hat{\theta},\theta)) \qquad \text{..........................} \ (29)$$

$$= \int_0^{\infty} \ell(\hat{\theta},\theta) \prod (\theta \mid t_1, t_2, .., t_n) d\theta$$

$$= \int_0^{\infty} c(\hat{\theta}-\theta)^2 * \left[\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} t_i - nt_0\right)^{n+2c_1-1} \exp\left(-\dfrac{\sum_{i=1}^{n} t_i - nt_0}{\theta}\right)}{\theta^{n+2c_1}(n+2c_1-2)!}\right] d\theta$$

$$= c\hat{\theta}^2 - \frac{2c\hat{\theta}(\sum_{i=1}^{n} t_i - t_0)}{(n-2c_1-2)} + \frac{c(\sum_{i=1}^{n} t_i - nt_0)^2}{n+2c_1-2}$$

$$\frac{\partial R(\hat{\theta},\theta)}{\partial\hat{\theta}} = 2c\hat{\theta} - \frac{2c(\sum_{i=1}^{n} t_i - t_0)}{(n-2c_1-2)} = 0$$

$$\hat{\theta}_{Bayes} = \frac{(\sum_{i=1}^{n} t_i - t_0)}{(n-2c_1-2)} \qquad \text{……………………… (30)}$$

$$\hat{S}_B(t) = \int_0^{\infty} \exp(-\frac{t-t_0}{\theta})\Pi(\theta \mid t_1,t_2,..,t_n)d\theta$$

$$= \int_0^{\infty} \exp(-\frac{t-t_0}{\theta}) * \frac{(\sum_{i=1}^{n} t_i - nt_0)^{n+2c_1-1}\exp(-\frac{\sum_{i=1}^{n} t_i - nt_0}{\theta})}{\theta^{n+2c_1}(n+2c_1-2)!}d\theta$$

$$\hat{S}_B(t) = \frac{(\sum_{i=1}^{n} t_i - nt_0)^{n+2c_1-1}}{(t-t_0+\sum_{i=1}^{n} t_i - nt_0)^{n-2c_1-1}} \qquad \text{…………………….. (31)}$$

4- طريقة المربعات الصغرى Least Square Method [3]

تعتمد طريقة المربعات الصغرى على تقليل مربعات الخطأ العشوائي للحصول على قيم تقديرية للمعالم a & b إي إن :

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bt_i)^2 \qquad \dots\dots\dots\dots (32)$$

وعند اخذ المشتقة للصيغة (22) بالنسبة للمعالم a & b ومساواتها للصفر نحصل على القيم التقديرية $\hat{a} \,\&\, \hat{b}$ وحسب الصيغة التالية:

$$\hat{b} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} y_i t_i - \sum_{i=1}^{n} t_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - [\sum_{i=1}^{n} t_i]^2} \qquad \dots\dots\dots\dots (33)$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{t} \qquad \dots\dots\dots\dots (34)$$

إذ إن: $\bar{y} \,\&\, \bar{t}$ تمثل الوسط الحسابي للمتغيرين y & t وعليه فأن دالة التوزيع التراكمية لتوزيع الآسي المبتور هي:

$$F(t_i) = 1 - \exp(-\frac{t_i - t_0}{\theta}) \qquad \dots\dots\dots\dots (35)$$

$$1 - F(t_i) = \exp(-\frac{t_i - t_0}{\theta}) \qquad \dots\dots\dots\dots (36)$$

$$\frac{1}{1 - F(t_i)} = \exp(\frac{t_i - t_0}{\theta}) \qquad \dots\dots\dots\dots (37)$$

وبإدخال اللوغاريتم على المعادلة أعلاه:

$$Log(\frac{1}{1 - F(t_i)}) = \frac{t_i - t_0}{\theta} \qquad \dots\dots\dots\dots (38)$$

$$Log(\frac{1}{1 - F(t_i)}) = -\frac{t_0}{\theta} + \frac{t_i}{\theta} \qquad \dots\dots\dots\dots (39)$$

إذ إن:

$$F(t_i) = \frac{i}{n+1} \qquad \dots\dots\dots\dots (40)$$

إذ تم استخراج قيمة $F(t_i)$ التقديرية بالاعتماد على طريقة رتبة الوسط الحسابي من الجدول التالي [3]:

جدول رقم (1) يبين طرائق تقدير $F(t_i)$

الطرائق	$F(t_i)$
رتبة الوسط الحسابي (Mean Rank)	$\frac{i}{n+1}$
رتبة الوسيط (Median Rank)	$\frac{i-0.3}{n+0.4}$
تماثل دالة c.d.f	$\frac{i-0.5}{n}$

وان i = رُتب المتغير العشوائي t_i إذ ترتب بيانات المتغير العشوائي t_i ترتيب تصاعدي وتعطى البيانات المرتبة رُتب تصاعدية $(i=1,2,..,n)$.

وعليه فأن $\hat{y}$ تساوي

$$\therefore \hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i \qquad \text{.........................} (41)$$

إذ أن:

$$\hat{y}_i = Log(\frac{1}{1-F(t_i)})$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{1}{\hat{\theta}}$$

$$x_i = t_i$$

$$\hat{\beta}_0 = -\frac{t_0}{\hat{\theta}}$$

$$\hat{\theta}_{LS} = -\frac{t_0}{\hat{\beta}_0} \qquad \text{............................} (42)$$

$$\because S(t) = 1 - F(t)$$

إذ إن: $F(t)$ تمثل دالة التوزيع التراكمية لتوزيع الآسي المبتور.

$$\hat{S}(t) = \exp(-\frac{t-t_0}{\hat{\theta}}) \qquad \text{..........................} (43)$$

5- طريقة تقدير Jackknife [13]

طبقت هذه الطريقة لأول مرة من قبل الباحث Quenouille في عام 1949 إذ يستخرج مقدر Jackknife كما يلي:

$$\hat{\theta}_{Jackknife} = n\hat{\theta} - (n-1)\hat{\theta}_{*} \quad \text{.......................... (44)}$$

إذ إن:

$\hat{\theta}$: مقدر المعلمة حسب طريقة المعتمدة .

وان $\hat{\theta}_{*}$ تساوي $\hat{\theta}_{*} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\hat{\theta}_i}{n}$

إذ يتم تقدير معلمة القياس حسب طريقة Jackknife بالاعتماد على طريقتين هما:

1- طريقة الإمكان الأعظم.

2- طريقة بيز الأولى.

إذ نشرح خطوات التقدير طريقة Jackknife بالاعتماد على طريقة الإمكان الأعظم وبالتالي هي نفس الخطوات بالاعتماد على طريقة بيز الأولى وكما يلي:

إذ إن:

$\hat{\theta}_{ML}$: مقدر المعلمة حسب طريقة الإمكان الأعظم.

$\hat{\theta}_i$ يتم إيجادها وفق الأسلوب التالي:

1- إيجاد $\hat{\theta}_1$ وذلك بحذف المتغير الأول t_1 من مجموعة المتغيرات $(t_1, t_2, .., t_n)$ وإيجاد $\hat{\theta}_1$ حسب طريقة الإمكان الأعظم بدون المتغير الأول t_1.

2- إيجاد $\hat{\theta}_2$ وذلك بترجيع المتغير الأول t_1 إلى مجموعة المتغيرات $(t_1, t_2, .., t_n)$ وحذف المتغير الثاني t_2 من هذه المتغيرات وإيجاد $\hat{\theta}_2$ حسب طريقة الإمكان الأعظم بدون المتغير الثاني t_2.

3- وهكذا نستمر بإيجاد $\hat{\theta}_i$ إلى إن نجد $\hat{\theta}_n$.

4- إيجاد $\hat{\theta}_{*}$.

5- تطبيق صيغة Jackknife.

وعليه يمكن إيجاد دالة البقاء التقديرية كما يلي:

$$\hat{S}(t) = \exp\left(-\frac{t_i - t_0}{\hat{\theta}_{Jackknife}}\right) \quad \text{.......................... (45)}$$

4- الجانب التجريبي

تم استخدام المحاكاة لغرض المقارنة بين الطرائق المختلفة تجريبيا ، حيث يتميز هذا الأسلوب بالمرونة ويوفر الكثير من الوقت والجهد والمال وفيه يتم توليد البيانات نظريا من دون الحصول عليها عمليا وأيضا دون الإخلال بدقة النتائج المطلوبة وتتلخص هذه الطريقة بالخطوات التالية:

1- تحديد القيم الافتراضية: تم اختيار خمسة حجوم للعينات هي(10, 20 ,30, 50 , 100) واستُخدمت قيم افتراضية لأوقات البقاء t_i وتم تثبيت معلمة الموقع t_0 عند 0.5 إي إن $t_0 = 0.5$ وقيمة C_1 عند 0.02 وهي كما في الجدول التالي :

أوقات البقاء t_i	θ	قيمة C_1	معلمة الموقع (t_0)
0.7	0.7	0.02	0.5
1.2	1.2		
1.7	1.7		
2.2	2.2		

2- توليد البيانات

1- تم توليد قيم المتغير العشوائي t_i وفق طريقة التحويل العكسي وفق الصيغة التالية[10]:

بما إن دالة c.d.f لتوزيع الآسي المبتور هي:

$$F(t_i) = 1 - \exp(-\frac{t_i - t_0}{\theta}) \quad \text{..................... (46)}$$

$$u_i = 1 - \exp(-\frac{t_i - t_0}{\theta}) \quad \text{..................... (47)}$$

وبإدخال اللوغاريتم للمعادلة أعلاه:

$$\frac{t_i - t_0}{\theta} = -Log(u_i) \quad \text{..................... (48)}$$

$$t_i = -\theta * Log(u_i) + t_0 \quad \text{..................... (49)}$$

2- تم استخدام القيم المتغير t_i في الصيغ المتوصل إليها في نتائج التقدير النظرية في الجانب النظري.

3- في طريقة المربعات الصغرى كانت الخطوات المتبعة هي كما يلي:

1- ترتيب قيم المتغير العشوائي t_i ترتيب تصاعدي.

2- إعطاء رُتب تصاعدية (i=1,2,..,n)للقيم المتغير العشوائي المرتبة ترتيب تصاعدي.

3- تقدير قيمة $F(x_i)$ وذلك بالاعتماد على الصيغة التالية:

$$F(x_i) = \frac{i}{n+1} \quad \text{.................. (50)}$$

4- تم حساب $\hat{\beta}_1 = \frac{1}{\theta}$

5- تم تقدير $\hat{\beta}_0$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \qquad \text{.......................... (51)}$$

6- تم إيجاد قيمة θ **وفق الصيغة التالية:**

$$\hat{\theta}_{LS} = -\frac{t_0}{\hat{\beta}_0} \qquad \text{.......................... (52)}$$

4- مقياس المقارنة:تم الاعتماد على مقياس متوسط مربعات الخطأ وفق الصيغة التالية:

$$MSE(\hat{S}(t)) = \frac{\sum_{i=1}^{L}(\hat{S}(t) - S(t))^2}{L} \qquad \text{.......................... (53)}$$

إذ إن:

L= عدد مرات التجربة

$\hat{S}(t)$= **مقدر الطريقة المعتمدة**

$S(t)$=**القيمة حسب الأسلوب المستخدم**

إذ تم تكرار التجربة إلى (1000) مرة.

5- الاستنتاجات

1- أظهرت نتائج البحث بأن طريقة بيز الثانية هي الأفضل من بقية طرائق التقدير الأخرى بالنسبة لأغلب القيم الافتراضية ولجميع حجوم العينات.
2- تكون طريقة جاك نايف الثانية هي الأفضل بالنسبة للقيم الافتراضية (1.2, 1.7, 2.2) لحجم العينة (10).
3- تتقارب طريقة الإمكان الأعظم وطريقة جاك نايف الأولى والثانية مع نتائج أفضل طريقة بالنسبة لأغلب القيم الافتراضية ولجميع حجوم العينات لدالة البقاء التقديرية.
4- جاءت طريقة تقدير بيز الأولى في المرتبة الأخيرة لأغلب القيم الافتراضية في حجوم العينات المستخدمة.
5- بينت النتائج بأن مجموع مربعات الخطأ MSE يقل كلما ازداد حجم العينة وهذا يتفق مع النظرية الإحصائية.

6- التوصيات

1- يوصي الباحث باعتماد طريقة بيز الثانية لتقدير دالة البقاء لتوزيع الآسي المبتور.
2- يوصي الباحث بتوسيع نطاق الدراسة لتشمل تقدير دالة البقاء بالاعتماد على طريقة التقلص.

7- الجداول

الجداول أدناه تبين نتائج التقدير لحجوم العينات (10 , 20 , 30 , 50 , 100) وكما يلي:

جدول رقم (1)

يبين نتائج التقدير متوسط مربعات الخطأ لدالة البقاء لحجم العينة(10)

t_i	طريقة الإمكان الأعظم	طريقة بيز الأولى	طريقة بيز الثانية	طريقة المربعات الصغرى	طريقة جاك نايف الأولى	طريقة جاك نايف الثانية	الأفضل
0.7	5.574026E-03	0.0287489	5.174857E-03	8.401921E-03	5.574026E-03	7.522997E-03	طريقة بيز الثانية
1.2	1.089512E-02	4.153002E-02	9.782358E-03	4.341123E-02	1.089512E-02	9.730224E-03	طريقة جاك نايف الثانية
1.7	0.118523	0.0476848	1.061073E-02	9.958757E-02	0.0118523	8.68069E-03	طريقة جاك نايف الثانية
2.2	1.211652E-02	5.201573E-02	1.085623E-02	0.2179034	1.211652E-02	8.451692E-03	طريقة جاك نايف الثانية

جدول رقم (2)

يبين نتائج التقدير متوسط مربعات الخطأ لدالة البقاء لحجم العينة(20)

t_i	طريقة الإمكان الأعظم	طريقة بيز الأولى	طريقة بيز الثانية	طريقة المربعات الصغرى	طريقة جاك نايف الاولى	طريقة جاك نايف الثانية	الأفضل
0.7	2.422564E-03	3.869588E-02	2.337399E-03	4.327484E-03	2.422563E-03	8.736515E-03	طريقة بيز الثانية
1.2	5.170911E-03	4.188724E-02	4.894764E-03	2.412779E-02	5.170908E-03	1.115891E-02	طريقة بيز الثانية
1.7	5.781167E-03	4.482693E-02	5.457357E-03	5.326805E-02	5.78117E-03	8.683642E-03	طريقة بيز الثانية
2.2	5.987894E-03	4.745884E-02	5.650788E-03	0.1031523	5.987887E-03	7.204893E-03	طريقة بيز الثانية

جدول رقم (3)

t_i	طريقة الإمكان الأعظم	طريقة بيز الأولى	طريقة بيز الثانية	طريقة المربعات الصغرى	طريقة جاك نايف الأولى	طريقة جاك نايف الثانية	الأفضل

0.7	1.642227E-03	4.907212E-02	1.605604E-03	3.086405E-03	1.642226E-03	8.962342E-03	طريقة بيز الثانية
1.2	3.604186E-03	4.697779E-02	3.481304E-03	1.808636E-02	3.604195E-03	1.140661E-02	طريقة بيز الثانية
1.7	4.065733E-03	4.838229E-02	3.920338E-03	3.966358E-02	4.065735E-03	8.61317E-03	طريقة بيز الثانية
2.2	4.229275E-03	0.0503155	4.077381E-03	7.287068E-02	4.229276E-03	6.84709E-03	طريقة بيز الثانية

يبين نتائج التقدير متوسط مربعات الخطأ لدالة البقاء لحجم العينة(30)

جدول رقم (4)
يبين نتائج التقدير متوسط مربعات الخطأ لدالة البقاء لحجم العينة(50)

t_i	طريقة الإمكان الأعظم	طريقة بيز الأولى	طريقة بيز الثانية	طريقة المربعات الصغرى	طريقة جاك نايف الأولى	طريقة جاك نايف الثانية	الأفضل
0.7	1.014124E-03	6.540718E-02	1.000654E-03	1.945473E-03	1.014122E-03	9.02416E-03	طريقة بيز الثانية
1.2	2.255732E-03	5.564092E-02	2.209447E-03	1.187258E-02	2.255737E-03	0.011308	طريقة بيز الثانية
1.7	2.556584E-03	5.492796E-02	2.501308E-03	2.646598E-02	2.556592E-03	8.240031E-03	طريقة بيز الثانية
2.2	2.665706E-03	0.0559432	2.607669E-03	4.844341E-02	2.665697E-03	6.254914E-03	طريقة بيز الثانية

جدول رقم (5)
يبين نتائج التقدير متوسط مربعات الخطأ لدالة البقاء لحجم العينة(100)

t_i	طريقة الإمكان الأعظم	طريقة بيز الأولى	طريقة بيز الثانية	طريقة المربعات الصغرى	طريقة جاك نايف الأولى	طريقة جاك نايف الثانية	الأفضل
0.7	5.007186E-04	9.449982E-02	4.971166E-04	9.791563E-04	5.007196E-04	8.998759E-03	طريقة بيز الثانية
1.2	1.135159E-03	7.239854E-02	1.122021E-03	6.189429E-03	1.135159E-03	1.104025E-02	طريقة بيز الثانية
1.7	1.294718E-03	6.845377E-02	1.278574E-03	1.382439E-02	1.294738E-03	7.740717E-03	طريقة بيز الثانية
2.2	1.354168E-03	6.814031E-02	1.336924E-03	2.436429E-02	1.354184E-03	5.589484E-03	طريقة بيز الثانية

9- المصادر

1- هرمز، أمير حنا ، (1990)،"الإحصاء الرياضي"، كلية الإدارة والاقتصاد، مطبعة جامعة الموصل.

2- عبد الأحد ، عطاف أداور، (2007)، "تقديرات المعولية للتوزيع الآسي بمعلمتين- دراسة مقارنة)، رسالة ماجستير مقدمة إلى كلية الإدارة والاقتصاد- جامعة بغداد.

3- AL-Fawzan,M.,(2000),"Methods for Estimating the Parameters of the Weibull distribution, Saudi Arabia ,king Abdulaziz city for science and technology.

4- AL-Nari, F.M.,(2008),"Estimation of the Mean of Truncated Exponential distribution ", Journal of Mathematics and statistics ,pp 284-288.

5- Al Omari , Mohammed , Salim ,H. and Akma,N.,(2010),"comparison of the Bayesian and Maximum Likelihood Estimation for the Weibull Distribution" ,Journal of Mathematics and Statistics,p.100-104.

6- Charles, E.E.,(1997),"An Introduction to Reliability and Maintainability Engineering", The Mc Grau Hial, companies, Inc .New York.

7- Epstein ,B. and Sobcl,M,(1984),"Some theorems to life resting from an exponential distribution ",Annals of Mathematical Statistics,vol.25.

8- Gupta,R.D. and Kundu,D.,(1999),"Generalized Exponential Distribution", Australian and New Zealand Journal of Statistics,vol.41 pp 173-188.

9- Kin ,L. and Sinha, B. and Wu,Z.,(1994),"Estimation of parameters in A two – parameter Exponential Distribution Mathematics vol.46 pp723-736.

10- Melamed , B.& Rubinstein,(1998),"Modern Simulation and Modeling", John Wiley &Sons , Inc.

11- Raqab, M.Z. & Ahsanllah ,M.,(2001),"Estimation of the location and scale parameters of Generalized Exponential distribution Based on order statistics", Journal statistics computer Simul.vol.69.pp.109-123.

12- Rezaei, S., Tahmasbi, R., and Hasantabar, F.,(2010),"Order statistics for Exponential- Poisson distribution", Journal of Mathematics and statistics,pp.1-13.

13- Simith,D.C. and Pontius,S.J.,(2006),"Jackknife Estimator of species Richness with S-Plus", Journal of statistical software, journal 2006,volume 15.