مقارنة طرائق بيز مع طرائق أخرى لتقدير معلمة القياس لتوزيع ويبل باستخدام المحاكاة

A comparison between bayesian and other method for estimation of scale parameter of Weibull distribution by using simulation

م. م. جاسم حسن لازم
الكلية التقنية الإدارية / بغداد

1- المستخلص

يعد توزيع ويبل من التوزيعات الواسعة التطبيق في الحياة العملية إذ يقترب من التوزيع الطبيعي من حيث الانتشار في التطبيق، كما يعتبر من التوزيعات التي يمكن تطبيقها في مجالات عدة منها استخدامه في الهندسة الصناعية لتمثيل أوقات التسليم والتصنيع كما يستخدم للتنبؤ في الطقس كما إن له استخدامات علمية أخرى منها دراسات المعولية ودوال البقاء في المجال الطبي وهندسة الاتصالات[7],[1] .

وفي هذا البحث تم تقدير معلمة القياس (scale parameter) لتوزيع ويبل إذ تم استخدام طريقة بيز المعتمدة على معلومات جفري المسبقة Jeffrey prior information كطريقة أولى وتم توسيع طريقة بيز وذلك بتوسيع معلومات جفري المسبقة واسُتخدمت هذه الطريقة كطريقة ثانية كما تم اقتراح طريقة بيزية أخرى بالاعتماد أيضا على معلومات جفري المسبقة وتم مقارنة الطرائق البيزية مع الطرائق الأخرى (الإمكان الأعظم، العزوم ، المربعات الصغرى) وتطبيقها بقيم افتراضية لمعلمة الشكل(shape parameter) ومعلمة القياس(scale parameter)والثابت c واستُخدم لهذا الغرض حجوم العينات (100,50,30,20,10) إذ أظهرت النتائج تفوق طريقة الإمكان الأعظم وتراوحت ثاني أفضل طريقة تقدير بين طريقة بيز الأولى وطريقة بيز الثانية وطريقة العزوم.

Abstract

Weibull distribution is considered as one of the most widely distribution applied in real life, Its similar to normal distribution in the way of applications, it's also considered as one of the distributions that can applied in many fields such as industrial engineering to represent replaced and manufacturing time ,weather forecasting, and other scientific uses in reliability studies and survival function in medical and communication engineering fields.

In this paper, The scale parameter has been estimated for weibull distribution using Bayesian method based on Jeffery prior information as a first method , then enhanced by improving Jeffery prior information and then used as a second method ,moreover another Bayesian method has been suggested based on Jeffery's method also, then a comparison between Bayesian methods with other methods (Maximum likelihood estimator, Moment ,least squares) has been made and then applied using supposed shape parameters, scale parameter , and constant c ,sample sizes (10,20,30,50,100) Finally the results showed the superiority of Maximum likelihood ,While the second best estimation method bounced between the first and second Bayes method and Moments method.

2-المقدمة وهدف البحث [2]

بدأت الدراسات حول هذا التوزيع في العشرينيات من القرن المنصرم، ففي عام 1927 ميز الباحث Frechet هذا التوزيع واستخدمه على الراتنج الصنوبري وفي عام 1933 قام الباحث Rammler بوصف توزيع حجم الجزئيات.

كما ينسب هذا التوزيع إلى الفيزيائي Waloddi Weibull الذي اشتق واستخدم هذا التوزيع عام 1939 في دراسة العدد المنتجة صناعيا إلا انه لم يثير الانتباه بشكل ملحوظ في هذه الفترة.وفي عام 1951 قام الباحثWaloddi Weibull بوصف هذا التوزيع بالتفصيل.

يهدف البحث إلى تقدير معلمة القياس لتوزيع وايبل باستخدام طرائق بيز والإمكان الأعظم وغيرها ومقارنة تلك الطرائق لتحديد أفضلها إضافة إلى تطوير الطريقة المثلى بعد استكمال نتائج المقارنة .

3- طرائق التقدير

1- طريقة الإمكان الأعظم Maximum Likelihood Method [2][3] [6]

تعد خاصية الثبات(invariant) من الخصائص الجيدة لهذه الطريقة مما جعلها ذات كفاءة عالية ويمكن تعريف التقدير بهذه الطريقة على انه قيم المعلمات التي تجعل دالة الإمكان الأعظم في نهايتها العظمى .

لتكن ($x_1,x_2,\ldots,x_n$) عينة عشوائية بحجم n مسحوبة من مجتمع تتوزع مفرداته بحسب دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع وايبل Weibull Distribution التي تحتوي على معلمتين (θ,η) وبافتراض ثبات الشكل (η) :

$$f(x)=\frac{\eta}{\theta}x^{\eta-1}\exp[-\frac{x^{\eta}}{\theta}]$$
…………………..(1)

$$L(x_1,x_2,..,x_n)=\frac{\eta^n}{\theta^n}\prod_{i=1}^{n}x_i^{\eta-1}\exp[-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\eta}}{\theta}]$$
……………………..(2)

$$\log L(x_1,x_2,..,x_n)=n\log\eta-n\log\theta+(\eta-1)\sum_{i=1}^{n}x_i^{\eta}-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\eta}}{\theta}$$
…………...(3)

$$\frac{\partial\log L(x_1,x_2,..,x_n)}{\partial\theta}=-\frac{n}{\hat{\theta}}+\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\eta}}{\hat{\theta}^2}=0$$
……………………..(4)

$$\hat{\theta}_{MLE}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\eta}}{n}$$
……………………..(5)

2- طريقة العزوم Moment Method [6][3]

تعتبر هذه الطريقة من الطرائق التقليدية السهلة الاستخدام مما جعلها شائعة حيث أنها تعتمد على مساواة عزم المجتمع المقدر μ_i مع عزم العينة m_r.

إن العزوم عبارة من إحصاءات ، وهي دوال في العينة المشاهدة $(x_1, x_2, .., x_n)$ لذلك من الممكن استخدامها لتقدير المعلمات $(\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n)$ بواسطة مجموعة المعادلات الآتية:

$$m'_j = \mu'_j(\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n)$$

إذ إن: $j = 1, 2, .., n$

يمكن الحصول على تقدير لمعلمة القياس لتوزيع وايبل بطريقة العزوم حسب الأسلوب التالي :

$$EX = \theta^{\frac{1}{\eta}} (\frac{1}{\eta})!$$

………...………………….(6)

وعليه فأن العزم الأول للعينة يساوي

$$\hat{M}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

………………………….(7)

وبما إن العزم الأول للمجتمع =العزم الأول للعينة وعلية فأن:

$$\hat{\theta}^{\frac{1}{\eta}} (\frac{1}{\eta})! = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

…………………………..(8)

$$\hat{\theta}^{\frac{1}{\eta}} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}}{(\frac{1}{\eta})!}$$

…………………………..(9)

$$\hat{\theta}_{moment} = [\frac{\bar{x}}{(\frac{1}{\eta})!}]^{\eta}$$

…………………………..(10)

إذ إن : $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

3- طريقة المربعات الصغرى Least Square Method [3]

تعتمد طريقة المربعات الصغرى على تقليل مربعات الخطأ العشوائي للحصول على قيم تقديرية للمعالم a & b إي إن :

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)^2$$

…………………….(11)

وعند اخذ المشتقة للصيغة (22) بالنسبة للمعالم a & b ومساواتها للصفر نحصل على القيم التقديرية $\hat{a} \,\&\, \hat{b}$ وحسب الصيغة التالية:

$$\hat{b} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - [\sum_{i=1}^{n} x_i]^2}$$

……………………..(12)

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$$

……………………..(13)

إذ إن: $\bar{y} \,\&\, \bar{x}$ تمثل الوسط الحسابي للمتغيرين y & x وعليه فأن دالة التوزيع التراكمية لتوزيع ويبل هي:

$$F(x_i) = 1 - \exp[-\frac{x_i^{\,\eta}}{\theta}]$$

…………………....(14)

$$1 - F(x_i) = \exp[-\frac{x_i^{\,\eta}}{\theta}]$$

…………………….(15)

$$\frac{1}{1 - F(x_i)} = \exp[\frac{x_i^{\eta}}{\theta}]$$

…………………….(16)

وبأخذ اللوغاريتم مرتين للطرفين نحصل على:

$$\log(\log(\frac{1}{1 - F(x_i)})) = -\log\theta + \eta\log(x_i)$$

……………….(17)

إذ إن:

$$F(x_i) = \frac{i}{n+1}$$
……………………(18)

إذ تم استخراج قيمة $F(x_i)$ التقديرية بالاعتماد على طريقة رتبة الوسط الحسابي من الجدول التالي [3]:

جدول رقم (1)

يبين طرائق تقدير $F(x_i)$

$F(x_i)$	الطرائق
$\frac{i}{n+1}$	رتبة الوسط الحسابي (Mean Rank)
$\frac{i-0.3}{n+0.4}$	رتبة الوسيط (Median Rank)
$\frac{i-0.5}{n}$	تماثل دالة c.d.f

وان i = رُتب المتغير العشوائي x_i إذ ترتب بيانات المتغير العشوائي x_i ترتيب تصاعدي وتعطى البيانات المرتبة رُتب
تصاعدية $(i = 1,2,..,n)$

وعليه فأن $\hat{y}$ تساوي

$$\therefore \hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 z_{ii}$$
……………………(19)

إذ إن :

$$\hat{y}_i = \log(\log(\frac{1}{1-\hat{F}(x_i)})$$

$$\hat{\beta}_0 = -\log\hat{\theta}$$

$$\hat{\beta}_1 = \eta$$

$$z_i = \log(x_i)$$

ولاستخراج قيمة $\hat{\theta}$ التقديرية بطريقة المربعات الصغرى لابد من إجراء عملية التحويل التالية:

$$\because \hat{\beta}_0 = -\log(\hat{\theta})$$
……………………..(20)

$$\therefore -\hat{\beta}_0 = \log(\hat{\theta})$$
……………………...(21)

$$\therefore \hat{\theta}_{LS} = \exp[-\hat{\beta}_0]$$
………………………(22)

4- طريقة تقدير بيز باستعمال معلومات جفري المسبقة[4]

Bayes Method by Using Jeffrey Prior Information

افترض $x_1, x_2, \ldots, x_n$ متغيرات عشوائية مسحوبة من عينة عشوائية بحجم n بدالة كثافة الاحتمالية **(p.d.f)** **probability density function** $f(x;\theta,\eta)$ والتي هي كما يلي :

$$f(x;\theta,\eta) = \frac{\eta}{\theta} x^{\eta-1} \exp(-\frac{x^{\eta}}{\theta}), x \ge 0$$
……………………….(23)

إذ إن : η هي معلمة الشكل **(shape parameter)** وان $\eta > 0$
θ هي معلمة القياس **(scale parameter)** وان $\theta > 0$

حيث تعتمد طريقة بيز على معلومات جفري المسبقة **Jeffrey prior information** وكما يلي:
تفترض معلومات جفري المسبقة إن دالة $g(\theta)$ تتناسب طرديا مع الجذر ألتربيعي لمعلومات فيشر **Fisher information** وكما يلي :

$$g(\theta) \propto \sqrt{I(\theta)}$$
……………………….(24)

إذ إن: $I(\theta)$ هي معلومات فيشر**(Fisher information)** وان

$$I(\theta) = -nE\left(\frac{\partial^2 \ln f(x;\theta,\eta)}{\partial \theta^2}\right)$$
……………………….(25)

$$I(\theta) = -nE\left(\frac{\partial^2 \ln f(x;\theta,\eta)}{\partial \theta^2}\right) = \frac{n}{\theta^2}$$
………………………(26)

$$g(\theta) = \frac{k\sqrt{n}}{\theta}$$
………………………..(27)

نستطع إيجاد تقدير بيز باستعمال معلومات جفري المسبقة بإيجاد التوزيع الشرطي الذي يعتمد على دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة والدالة الكثافة الاحتمالية الأحادية لذا فان التوزيع الشرطي هو كما يلي:

$$L(x_1,x_2,..,x_n)=\prod_{i=1}^{n} f(x;\theta,\eta)=\frac{\eta^n}{\theta^n}[\prod_{i=1}^{n} x^{\eta-1}]\exp[-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{\eta}}{\theta}]$$

……………..(28)

لذا فأن الدالة الاحتمالية المشتركة هي:

$$H(x_1,x_2,.....,x_n;\theta,\eta)=\prod_{i=1}^{n} f(x;\theta,\eta)g(\theta)$$

$$=\frac{k\eta^n\sqrt{n}}{\theta^{n+1}}[\prod_{i=1}^{n} x_i{}^{\eta-1}]\exp[-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{\eta}}{\theta}]$$

……….…………. (29)

وعليه فأن دالة الكثافة الاحتمالية الأحادية $(x_1,x_2,....,x_n)$ هي:

$$p(x_1,x_2,...,x_n)=\int_0^{\infty} H(x_1,x_2,...,x_n;\theta,\eta)d\theta$$

$$=k\eta^n\sqrt{n}[\prod_{i=1}^{n} x_i{}^{\eta}]\int_0^{\infty}\frac{1}{\theta^{n+1}}\exp[-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{\eta}}{\theta}]d\theta$$

وبعد التبسيط ينتج لنا :

$$=\frac{k\eta^n\sqrt{n}(n-1)!}{(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{\eta})^n}\exp[(\eta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i]$$

……………(30)

وعليه فأن:

$$\prod(\theta\,|\,x_1,x_2,.....,x_n)=\frac{H(x_1,x_2,...,x_n;\theta,\eta)}{p(x_1,x_2,...,x_n)}$$

$$=\frac{\frac{k\eta^n\sqrt{n}}{\theta^{n+1}}\exp[(\eta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i]\exp[-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{\eta}}{\theta}]}{\frac{k\eta^n\sqrt{n}(n-1)!}{(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{\eta})^n}\exp[(\eta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i]}$$

$$= \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\eta})^n \exp[-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\eta}}{\theta}]}{\theta^{n+1}(n-1)!}$$

……………………………..(31)

وباستعمال دالة الخسارة والتي هي : $\ell(\hat{\theta},\theta) = c(\hat{\theta}-\theta)^2$

وباستخدام دالة المخاطرة **Risk function** لإيجاد تقدير بيز

$$R(\hat{\theta},\theta) = E(\ell(\hat{\theta},\theta))$$

……………………………..(32)

$$= \int_0^{\infty} \ell(\hat{\theta},\theta) \prod(\theta \mid x_1, x_2, .., x_n) d\theta$$

$$= \int_0^{\infty} c(\hat{\theta}-\theta)^2 * [\frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\eta}) \exp[-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\eta}}{\theta}]}{\theta^{n+1}(n-1)!}] d\theta$$

$$= \int_0^{\infty} (c\hat{\theta}^2 - 2c\hat{\theta}\theta + c\theta^2) * [\frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\eta}) \exp[-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\eta}}{\theta}]}{\theta^{n+1}(n-1)!}] d\theta$$

وبعد فتح التكامل وإجراء التبسيط للمعادلة أعلاه ينتج:

$$= c\hat{\theta}^2 - \frac{2c\hat{\theta}(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\eta})}{n-1} + \frac{c(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\eta})^2}{(n-1)(n-2)}$$

$$\frac{\partial R(\hat{\theta},\theta)}{\partial \hat{\theta}} = 2c\hat{\theta} - \frac{2c(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\eta})}{n-1} = 0$$

$$\hat{\theta}_{Bayes} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\eta}}{n-1}$$

………………………………………..(33)

5- طريقة تقدير بيز باستخدام بتوسيع معلومات جفري المسبقة [4]

Bayes Method by Using extension Jeffrey Prior

يتم التوسع في معلومات جفري المسبقة على إن دالة $g(\theta)$ تتناسب طرديا مع معلومات فيشر Fisher information والمرفوعة إلى القوة c وكما يلي :

$$g(\theta) \propto [I(\theta)]^C$$

$$g(\theta) = k[I(\theta)]^C = \frac{Kn^c}{\theta^{2c}}$$

..(34)

$$H(x_1, x_2,.., x_n; \theta, \eta) = \prod_{i=1}^{n} f(x; \theta, \eta) g(\theta)$$

$$= \frac{k\eta^n n^c}{\theta^{n+2c}} [\prod_{i=1}^{n} x_i^{\eta-1}] \exp[-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\eta}}{\theta}]$$

.....................(35)

كما إن دالة الكثافة الاحتمالية الأحادية هي كما يلي:

$$p(x_1, x_2,..., x_n) = \int_0^{\infty} H(x_1, x_2,..., x_n; \theta, \eta) d\theta$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{k\eta^n n^c}{\theta^{n+2c}} [\prod_{i=1}^{n} x_i^{\eta-1}] \exp[-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\eta}}{\theta}] d\theta$$

$$= \frac{k\eta^n n^c [\prod_{i=1}^{n} x_i^{\eta}] (n+2c-2)!}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\eta})^{n+2c-1}} \quad \text{.......................(36)}$$

$$\because \prod(\theta | x_1, x_2,..., x_n) = \frac{H(x_1, x_2,.., x_n; \theta, \eta)}{p(x_1, x_2,..., x_n)}$$

$$= \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\eta})^{n+2c-1}}{\theta^{n+2c} (n+2c-2)!} \exp[-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\eta}}{\theta}] \quad \text{..................(37)}$$

وباستعمال دالة الخسارة والتي هي : $\ell(\hat{\theta}, \theta) = c(\hat{\theta} - \theta)^2$

وباستخدام دالة المخاطرة **Risk function** لإيجاد تقدير بيز

$$R(\hat{\theta},\theta)=E[\ell(\hat{\theta},\theta)]$$

$$=\int_0^\infty \ell(\hat{\theta},\theta)\prod(\theta\,|\,x_1,x_2,..,x_n)d\theta$$

$$=\int_0^\infty (c\hat{\theta}^2-2c\hat{\theta}\theta+c\theta^2)*[\frac{(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\eta})^{n+2c-1}\exp[-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\eta}}{\theta}]}{\theta^{n+2c}(n+2c-2)!}]d\theta$$

$$R(\hat{\theta},\theta)=c\hat{\theta}^2-\frac{2c\hat{\theta}(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\eta})}{(n+2c-2)}+\frac{c(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\eta})^2}{(n+2c-2)(n+2c-3)}$$

..................(38)

$$\frac{\partial R(\hat{\theta},\theta)}{\partial\hat{\theta}}=2c\hat{\theta}-\frac{2c(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\eta})}{n+2c-2}=0$$

$$\hat{\theta}_{Bayes}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\eta}}{n+2c-2}$$ **.....................(39)**

6- طريقة بيز المقترحة Suggested Bayesian Method

تم الاعتماد على معلومات جفري المسبقة وذلك بجعل معلومات فيشر تحت الجذر(c) وكما يلي :

$$g(\theta)=k\sqrt[c]{I(\theta)}=\frac{kn^{\frac{1}{c}}}{\theta^{\frac{2}{c}}}$$

........................(40)

$$\because H(x_1,x_2,..,x_n;\theta,\eta)=\prod_{i=1}^{n}f(x;\theta,\eta)g(\theta)$$

$$\therefore H(x_1,x_2,...,x_n;\theta,\eta)=\frac{k\eta^n n^{\frac{1}{c}}}{\theta^{n+\frac{2}{c}}}[\prod_{i=1}^{n}x_i^{\eta-1}]\exp[-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\eta}}{\theta}]$$

................(41)

$$p(x_1,x_2,..,x_n)=\int_0^\infty H(x_1,x_2,..,x_n;\theta,\eta)d\theta$$

$$p(x_1,x_2,..,x_n)=\frac{k\eta^n\sqrt[c]{n}[\prod_{i=1}^{n}x_i^{\eta-1}]}{(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\eta})^{n+\frac{2}{c}-1}}(n+\frac{2}{c}-2)!$$

………………..(42)

$$\therefore \Pi(\theta \mid x_1, x_2, .., x_n) = \frac{H(x_1, x_2, .., x_n; \theta, \eta)}{p(x_1, x_2, .., x_n)}$$

$$= \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\eta})^{n+\frac{2}{c}-1}}{\theta^{n+\frac{2}{c}}(n+\frac{2}{c}-2)!} \exp[-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\eta}}{\theta}]$$

………………..(43)

وباستعمال دالة الخسارة والتي هي : $\ell(\hat{\theta}, \theta) = c(\hat{\theta} - \theta)^2$

وباستخدام دالة المخاطرة **Risk function** لإيجاد تقدير بيز

$$R(\hat{\theta}, \theta) = c\hat{\theta} - \frac{2c\hat{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\eta}}{(n+\frac{2}{c}-2)} + \frac{c(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\eta})^2}{(n+\frac{2}{c}-2)(n+\frac{2}{c}-3)}$$

…………………(44)

$$\frac{\partial R(\hat{\theta}, \theta)}{\partial \theta} = 2c\hat{\theta} - \frac{2c\sum_{i=1}^{n} x_i^{\eta}}{(n+\frac{2}{c}-2)} = 0$$

$$\therefore \hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\eta}}{(n+\frac{2}{c}-2)}$$

…………………(45)

4-الجانب التجريبي

تم استخدام المحاكاة لغرض المقارنة بين الطرائق المختلفة تجريبيا ، حيث يتميز هذا الأسلوب بالمرونة ويوفر الكثير من الوقت والجهد والمال وفيه يتم توليد البيانات نظريا من دون الحصول عليها عمليا وأيضا دون الإخلال بدقة النتائج المطلوبة وتتلخص هذه الطريقة بالخطوات التالية:

1- تحديد القيم الافتراضية: تم اختيار خمسة حجوم للعينات هي(10, 20 ,30, 50 , 100) واستُخدم قيم افتراضية لمعلمة القياس وقيمة c وتم تثبيت معلمة الشكل η عند 2 إي إن $(\eta = 2)$ وهي كما يلي:

معلمة القياس (θ)	c
0.5	**2.5**
	3
	3.5
1	**2.5**
	3
	3.5
1.5	**2.5**
	3
	3.5
2	**2.5**
	3
	3.5

2- توليد البيانات:

1- تم توليد قيم المتغير العشوائي x_i وفق طريقة التحويل العكسي وفق الصيغة التالية[8]:

بما إن دالة c.d.f لتوزيع وايبل هي:

$$F(x) = 1 - \exp[-\frac{x^{\eta}}{\theta}]$$
.................................(46)

$$u_i = 1 - \exp[-\frac{x_i^{\eta}}{\theta}]$$
.................................(47)

$$\frac{x_i^{\eta}}{\theta} = -\log(u_i)$$
.................................(48)

$$x_i = [-\theta \log(u_i)]^{\frac{1}{\eta}}$$
.................................(49)

2- تم استخدام القيم المتغير x_i في الصيغ المتوصل إليها في نتائج التقدير النظرية في الجانب النظري.
3- في طريقة المربعات الصغرى كانت الخطوات المتبعة هي كما يلي:
1- ترتيب قيم المتغير العشوائي x_i ترتيب تصاعدي.
2- إعطاء رُتب تصاعدية (i=1,2,..,n)للقيم المتغير العشوائي المرتبة ترتيب تصاعدي.

3- تقدير قيمة $F(x_i)$ وذلك بالاعتماد على الصيغة التالية:

$$F(x_i) = \frac{i}{n+1}$$

..................................(50)

4- إذ إن $\hat{\beta}_1 = \eta$

5- تم تقدير $\hat{\beta}_0$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{z}$$

..............................(51)

6- تم إيجاد قيمة θ وفق الصيغة التالية:

$$\hat{\theta}_{LS} = \exp[-\hat{\beta}_0]$$

..............................(52)

4- مقياس المقارنة:تم الاعتماد على مقياس متوسط مربعات الخطأ وفق الصيغة التالية:

$$MSE(\hat{\theta}) = \frac{\sum_{i=1}^{L} (\hat{\theta} - \theta)^2}{L}$$

...............................(53)

إذ إن:

L= عدد مرات التجربة

$\hat{\theta}$=مقدر الطريقة المعتمدة

θ=القيمة حسب الأسلوب المستخدم

إذ تم تكرار التجربة إلى (1000) مرة.

5- الاستنتاجات

1- أظهرت نتائج البحث بأن طريقة تقدير الإمكان الأعظم هي الأفضل من بقية طرائق التقدير الأخرى بالنسبة لأغلب القيم الافتراضية ولجميع حجوم العينات (10 , 20 , 30 , 50 , 100).

2- تكون طريقة العزوم هي الأفضل من بقية طرائق التقدير الأخرى للقيمة الافتراضية $\theta = 0.5$ ولحجم العينة 10.

3- تراوحت طريقة بيز الأولى والثانية على أفضلية ثاني طريقة تقدير بالنسبة لحجوم العينات (100,50,30,20) ولجميع القيم الافتراضية بينما كانت طريقة هي ثاني أفضل طريقة تقدير بالنسبة لحجم العينة (10) .

4- بينت النتائج بأن مجموع مربعات الخطأ MSE يقل كلما ازداد حجم العينة وهذا يتفق مع النظرية الإحصائية.

6- التوصيات

1- يوصي الباحث باعتماد طريقة الإمكان الأعظم لتقدير معلمة القياس لتوزيع وايبل.

2- يوصي الباحث بتوسيع نطاق الدراسة لتشمل تقدير المعلمتين لتوزيع ويبل بالاعتماد على طرائق بيزية وتقليدية.

7- الجداول

الجداول أدناه تبين نتائج التقدير لحجوم العينات (10 , 20 , 30 , 50 , 100) وكما يلي:

جدول رقم (1)
يبين نتائج التقدير لمجموع مربعات الخطأ لمعلمة القياس لعينة حجمها (10)

θ	η	c	طريقة بيز الأولى	طريقة بيز الثانية	طريقة بيز المقترحة	طريقة الإمكان الأعظم	طريقة العزوم	طريقة المربعات الصغرى	الأفضل
0.5	2	2.5	3.406022E-02	2.708604E-02	3.716355E-02	0.0246354	2.570171E-02	3.723343E-02	طريقة العزوم
		3	3.406022E-02	3.205206E-02	3.952057E-02	0.0246354	2.570171E-02	3.723343E-02	طريقة العزوم
		3.5	3.406022E-02	3.771944E-02	4.135753E-02	0.0246354	2.570171E-02	3.723343E-02	طريقة العزوم
1	2	2.5	0.1362409	0.1083442	0.1486542	0.0985416	0.1028068	0.1489337	طريقة الإمكان الأعظم
		3	0.1362409	0.1282082	0.1580823	0.0985416	0.1028068	0.1489337	طريقة الإمكان الأعظم
		3.5	0.1362409	0.1508778	0.1654301	0.0985416	0.1028068	0.1489337	طريقة الإمكان الأعظم
1.5	2	2.5	0.3065422	0.2437743	0.3344717	0.2217189	0.2313156	0.3351007	طريقة الإمكان الأعظم
		3	0.3065422	0.2884684	0.3556847	0.2217189	0.2313156	0.3351007	طريقة الإمكان الأعظم
		3.5	0.3065422	0.3394749	0.3722176	0.2217189	0.2313156	0.3351007	طريقة الإمكان الأعظم
2	2	2.5	0.5449636	0.4333766	0.5946168	0.3941664	0.4112274	0.5957348	طريقة الإمكان الأعظم
		3	0.5449636	0.5128329	0.632329	0.3941664	0.4112274	0.5957348	طريقة الإمكان الأعظم
		3.5	0.5449636	0.603511	0.6617205	0.3941664	0.4112274	0.5957348	طريقة الإمكان الأعظم

جدول رقم (2)
يبين نتائج التقدير لمجموع مربعات الخطأ لمعلمة القياس لعينة حجمها (20)

θ	η	c	طريقة بيز الأولى	طريقة بيز الثانية	طريقة بيز المقترحة	طريقة الإمكان الأعظم	طريقة العزوم	طريقة المربعات الصغرى	الأفضل
0.5	2	2.5	1.419963E-02	1.315565E-02	1.483817E-02	1.208596E-02	1.823018E-02	1.921749E-02	طريقة الإمكان الأعظم
		3	1.419963E-02	1.504801E-02	1.530919E-02	1.208596E-02	1.823018E-02	1.921749E-02	طريقة الإمكان الأعظم
		3.5	1.419963E-02	1.740156E-02	1.566879E-02	1.208596E-02	1.823018E-02	1.921749E-02	طريقة الإمكان الأعظم
1	2	2.5	5.679852E-02	5.262262E-02	5.935267E-02	4.834384E-02	7.292069E-02	7.686999E-02	طريقة الإمكان الأعظم
		3	5.679852E-02	6.019206E-02	6.123678E-02	4.834384E-02	7.292069E-02	7.686999E-02	طريقة الإمكان الأعظم
		3.5	5.679852E-02	6.960623E-02	6.267514E-02	4.834384E-02	7.292069E-02	7.686999E-02	طريقة الإمكان الأعظم
1.5	2	2.5	0.1277966	0.1184009	0.1335435	0.1087735	0.1640716	0.1729575	طريقة الإمكان الأعظم
		3	0.1277966	0.1354321	0.1377827	0.1087735	0.1640716	0.1729575	طريقة الإمكان الأعظم
		3.5	0.1277966	0.1566139	0.1410191	0.1087735	0.1640716	0.1729575	طريقة الإمكان الأعظم
2	2	2.5	0.227194	0.2104905	0.2374106	0.1933753	0.2916828	0.3074799	طريقة الإمكان الأعظم
		3	0.227194	0.2407682	0.2449471	0.1933753	0.2916828	0.3074799	طريقة الإمكان الأعظم
		3.5	0.227194	0.2784249	0.2507006	0.1933753	0.2916828	0.3074799	طريقة الإمكان الأعظم

جدول رقم (3)
يبين نتائج التقدير لمجموع مربعات الخطأ لمعلمة القياس لعينة حجمها (30)

θ	η	c	طريقة بيز الأولى	طريقة بيز الثانية	طريقة بيز المقترحة	طريقة الإمكان الأعظم	طريقة العزوم	طريقة المربعات الصغرى	الأفضل
0.5	2	2.5	9.358507E-03	8.703524E-03	9.645215E-03	8.358234E-03	1.563822E-02	1.300924E-02	طريقة الإمكان الأعظم
		3	9.358507E-03	9.628057E-03	9.853812E-03	8.358234E-03	1.563822E-02	1.300924E-02	طريقة الإمكان الأعظم
		3.5	9.358507E-03	1.084241E-02	1.001162E-02	8.358234E-03	1.563822E-02	1.300924E-02	طريقة الإمكان الأعظم
1	2	2.5	3.743402E-02	0.0348141	3.858086E-02	3.343293E-02	6.255287E-02	5.203697E-02	طريقة الإمكان الأعظم
		3	3.743402E-02	3.851223E-02	3.941525E-02	3.343293E-02	6.255287E-02	5.203697E-02	طريقة الإمكان الأعظم
		3.5	3.743402E-02	4.336965E-02	4.004647E-02	3.343293E-02	6.255287E-02	5.203697E-02	طريقة الإمكان الأعظم
1.5	2	2.5	8.422655E-02	7.833175E-02	0.0868069	7.522416E-02	0.1407439	0.1170831	طريقة الإمكان الأعظم
		3	8.422655E-02	8.665259E-02	8.868437E-02	7.522416E-02	0.1407439	0.1170831	طريقة الإمكان الأعظم
		3.5	8.422655E-02	9.758176E-02	9.010459E-02	7.522416E-02	0.1407439	0.1170831	طريقة الإمكان الأعظم
2	2	2.5	0.1497361	0.1392564	0.1543234	0.1337317	0.2502115	0.2081479	طريقة الإمكان الأعظم
		3	0.1497361	0.1540489	0.157661	0.1337317	0.2502115	0.2081479	طريقة الإمكان الأعظم
		3.5	0.1497361	0.1734786	0.1601859	0.1337317	0.2502115	0.2081479	طريقة الإمكان الأعظم

جدول رقم (4)

يبين نتائج التقدير لمجموع مربعات الخطأ لمعلمة القياس لعينة حجمها (50)

θ	η	c	طريقة بيز الأولى	طريقة بيز الثانية	طريقة بيز المقترحة	طريقة الإمكان الأعظم	طريقة العزوم	طريقة المربعات الصغرى	الأفضل
0.5	2	2.5	5.640992E-03	5.375178E-03	5.742861E-03	5.273099E-03	1.424481E-02	8.476927E-03	طريقة الإمكان الأعظم
		3	5.640992E-03	5.739921E-03	5.816293E-03	5.273099E-03	1.424481E-02	8.476927E-03	طريقة الإمكان الأعظم
		3.5	5.640992E-03	6.240109E-03	5.871492E-03	5.273099E-03	1.424481E-02	8.476927E-03	طريقة الإمكان الأعظم
1	2	2.5	2.256397E-02	2.150071E-02	2.297144E-02	2.109239E-02	5.697922E-02	0.0339077	طريقة الإمكان الأعظم
		3	2.256397E-02	2.295968E-02	2.326518E-02	2.109239E-02	5.697922E-02	0.0339077	طريقة الإمكان الأعظم
		3.5	2.256397E-02	2.496044E-02	2.348597E-02	2.109239E-02	5.697922E-02	0.0339077	طريقة الإمكان الأعظم
1.5	2	2.5	5.076893E-02	4.837664E-02	5.168572E-02	4.745783E-02	0.1282032	7.629231E-02	طريقة الإمكان الأعظم
		3	5.076893E-02	5.165932E-02	5.234659E-02	4.745783E-02	0.1282032	7.629231E-02	طريقة الإمكان الأعظم
		3.5	5.076893E-02	5.616095E-02	5.284341E-02	4.745783E-02	0.1282032	7.629231E-02	طريقة الإمكان الأعظم
2	2	2.5	9.025587E-02	8.600285E-02	9.188578E-02	8.436958E-02	0.2279169	0.1356308	طريقة الإمكان الأعظم
		3	9.025587E-02	9.183874E-02	9.306069E-02	8.436958E-02	0.2279169	0.1356308	طريقة الإمكان الأعظم
		3.5	9.025587E-02	9.984175E-02	9.394386E-02	8.436958E-02	0.2279169	0.1356308	طريقة الإمكان الأعظم

جدول رقم (5)

يبين نتائج التقدير لمجموع مربعات الخطأ لمعلمة القياس لعينة حجمها (100)

θ	η	c	طريقة بيز الأولى	طريقة بيز الثانية	طريقة بيز المقترحة	طريقة الإمكان الأعظم	طريقة العزوم	طريقة المربعات الصغرى	الأفضل
0.5	2	2.5	2.753122E-03	2.733192E-03	2.775481E-03	2.673664E-03	1.311412E-02	4.259669E-03	طريقة الإمكان الأعظم
		3	2.753122E-03	2.842985E-03	2.791619E-03	2.673664E-03	1.311412E-02	4.259669E-03	طريقة الإمكان الأعظم
		3.5	2.753122E-03	2.993467e-03	2.80375E-03	2.673664E-03	1.311412E-02	4.259669E-03	طريقة الإمكان الأعظم
1	2	2.5	1.101249E-02	1.093276E-02	1.110192E-02	1.069466E-02	5.245649E-02	1.703868E-02	طريقة الإمكان الأعظم
		3	1.101249E-02	1.137194E-02	1.116647E-02	1.069466E-02	5.245649E-02	1.703868E-02	طريقة الإمكان الأعظم
		3.5	1.101249E-02	1.197387E-02	0.011215	1.069466E-02	5.245649E-02	1.703868E-02	طريقة الإمكان الأعظم
1.5	2	2.5	2.477812E-02	2.459873E-02	2.497936E-02	2.406298E-02	0.1180271	0.0383372	طريقة الإمكان الأعظم
		3	2.477812E-02	2.558688E-02	2.512455E-02	2.406298E-02	0.1180271	0.0383372	طريقة الإمكان الأعظم
		3.5	2.477812E-02	2.694121E-02	2.523377E-02	2.406298E-02	0.1180271	0.0383372	طريقة الإمكان الأعظم
2	2	2.5	4.404995E-02	4.373107E-02	0.0444077	4.277863E-02	0.209826	6.815468E-02	طريقة الإمكان الأعظم
		3	4.404995E-02	4.548776E-02	4.466591E-02	4.277863E-02	0.209826	6.815468E-02	طريقة الإمكان الأعظم
		3.5	4.404995E-02	4.789547E-02	0.04486	4.277863E-02	0.209826	6.815468E-02	طريقة الإمكان الأعظم

8- المصادر

1- البياتي، حسام نجم عبود ، (2002) ،"مقارنة تقدير لنموذج ويبل للفشل باستخدام المحاكاة "أطروحة دكتوراه، كلية الإدارة والاقتصاد ، جامعة بغداد.
2- هرمز، أمير حنا ،(1990) ،"الاحصاء الرياضي"،كلية الادارة والاقتصاد ،مطبعة جامعة الموصل.

3- Al Fawzan ,M.,(2000),"Methods for Estimating the Parameters of the Weibull distribution ,Saudi Arabia ,King Abdulaziz city for Science and Technology.

4- Al Omari , Mohammed , Salim ,H. and Akma,N.,(2010),"comparison of the Bayesian and Maximum Likelihood Estimation for the Weibull Distribution" ,Journal of Mathematics and Statistics,p.100-104.

5- Evans, M.,Hastings, N. and Peacock,B.,(1993),"Statistical Distribution",John Wiley &sons , INC.

6- Gamerman ,D. and Migon,H.S.,(1999),"Statistical inference an integrated Approach", Arnold a member of the Hodder Headline Group.

7-HTTP://www.wikipedia. com/Weibull distribution.

8- Melamed ,B. and Rubinstein, (1998),"Modern Simulation and Modeling "John Wiley & Sons,INC.

8- الملحق رقم (1) (البرنامج)

تم كتابة البرنامج بلغة (Quick BASIC V4.5) وكما يلي :

```
CLS
PRINT " INPUT N"
INPUT N
P=2
DIM x(N), Y(N), RANK(N, N), a(N)
PRINT "Q,C"
INPUT Q, C
FOR IJ = 1 TO 1000
FOR i = 1 TO N
a(i) = RND
x(i) = (-Q * LOG(a(i))) ^ (1 / P)
Y(i) = x(i)
'PRINT "X(I)="; X(I)
NEXT i
PRINT "========Bayas 1===="
s = 0
FOR i = 1 TO N
s = s + x(i) ^ P
NEXT i
QB1 = s / (N - 1)
PRINT "QB1="; QB1
MSEQB1 = (Q - QB1) ^ 2
PRINT "MSEQB1="; MSEQB1
PRINT "=============Bayes 2======"
QB2 = s / (N + 2 * C-2)
PRINT "QB2="; QB2
MSEQB2 = (Q - QB2) ^ 2
PRINT "MSEQB2="; MSEQB2
PRINT "=================Bayes 3======="
QB3 = s / (N + (2 / C)-2)
MSEQB3 = (Q - QB3) ^ 2
PRINT "QB3="; QB3
PRINT "MSEQB3="; MSEQB3

PRINT "==========MLE====="
s1 = 0
FOR i = 1 TO N
s1 = s1 + x(i) ^ P
NEXT i
QMLE = (s1 / N)
PRINT "QMLE="; QMLE
MSEQMLE = (Q - QMLE) ^ 2
PRINT "MSEQMLE="; MSEQMLE
PRINT "==========MOMENT======"
s2 = 0
FOR i = 1 TO N
s2 = s2 + x(i)
NEXT i
ss1 = s2 / N
PP = INT(1 / P)
FACT = 1
FOR i = PP TO 1 STEP -1
FACT = FACT * i
NEXT i


QMo = (ss1 / FACT) ^ P
MSEQMo = (Q - QMo) ^ 2
PRINT "QMo="; QMo
```

```
PRINT "MSEQMo="; MSEQMo
PRINT "=============LEAST Square======"
FOR i = 1 TO N - 1
FOR K = i + 1 TO N
IF x(i) > x(K) THEN
t = x(i)
x(i) = x(K)
x(K) = t
END IF
NEXT K
NEXT i
FOR i = 1 TO N
 RANK(i, 1) = Y(i)
  FOR J = 1 TO N
   IF Y(i) = x(J) THEN
    RANK(i, 2) = J
    END IF
  NEXT J
  RANK(i, 3) = LOG(LOG(1 / (1 - RANK(i, 2) / (N + 1))))
  RANK(i, 4) = LOG(RANK(i, 1))
NEXT i

FOR i = 1 TO N
 FOR J = 1 TO 4
  'PRINT RANK(I, J),
  NEXT J
  'PRINT
 NEXT i
SS4 = 0: SS5 = 0
FOR i = 1 TO N
SS4 = SS4 + RANK(i, 3)
SS5 = SS5 + RANK(i, 4)
NEXT i
YY = SS4 / N
XX = SS5 / N
B0 = YY - (P * XX)
QLS = EXP(-B0)
PRINT "QLS="; QLS
MSEQLS = (Q - QLS) ^ 2
PRINT "MSELS="; MSEQLS
C1 = C1 + QB1
C2 = C2 + QB2
C3 = C3 + QB3
C4 = C4 + QMLE
C5 = C5 + QMo
C6 = C6 + QLS
P1 = P1 + MSEQB1
P2 = P2 + MSEQB2
P3 = P3 + MSEQB3
P4 = P4 + MSEQMLE
P5 = P5 + MSEQMo
P6 = P6 + MSEQLS



QB1 = 0
QB2 = 0
QB3 = 0
QMLE = 0
```

```
QMo = 0
QLS = 0
MSEQB1 = 0
MSEQB2 = 0
MSEQB3 = 0
MSEQMLE = 0
MSEQMo = 0
MSEQLS = 0
NEXT IJ
QB11 = C1 / 1000
QB22 = C2 / 1000
QB33 = C3 / 1000
QMLE1 = C4 / 1000
QMo1 = C5 / 1000
QLS1 = C6 / 1000
MSEQB11 = P1 / 1000
MSEQB22 = P2 / 1000
MSEQB33 = P3 / 1000
MSEQMLE1 = P4 / 1000
MSEQMo1 = P5 / 1000
MSEQLS1 = P6 / 1000
PRINT "=================================================="
PRINT "Bayes1="; QB11; "MSEQB11="; MSEQB11
PRINT
PRINT "------------------------------------------------------"
PRINT "Bayes2="; QB22; "MSEQB22="; MSEQB22
PRINT
PRINT "-------------------------------------------------------"
PRINT "Bayes3="; QB33; "MSEQB33="; MSEQB33
PRINT
PRINT "--------------------------------------------------------"
PRINT "MLE="; QMLE1; "MSEQMLE1="; MSEQMLE1
PRINT
PRINT "---------------------------------------------------------"
PRINT "MOMENT="; QMo1; "MSEQMo1="; MSEQMo1
PRINT
PRINT "----------------------------------------------------------,"
PRINT "LS="; QLS1; "MSEQLS1="; MSEQLS1
```