نماذج الخزين الاحتمالية تبعا" لتوزيع باريتو
Probabilistic Inventory Models With Pareto Distribution

أ. م.علي خليل الزبيدي
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جهاز الإشراف والتقويم العلمي

المستخلص

الخزين عبارة عن تجهيز البضائع للبيع أو الاستخدام المستقبلي . الطلب على المنتج في الخزين هو عدد الوحدات التي سوف نحتاج إلى تحريكها من المخزن للبيع أو الاستخدام خلال فترة معينة. اذا كان الطلب للفترات المستقبلية ممكن توقعه بدقة كبيرة سيتم استخدام قاعدة الخزين التي تفترض بان كل التنبؤات تكون دقيقة جدا" في هذه الحالة يكون الطلب محدد.

توقيت الطلب ممكن إن يكون دوري (يقدم الطلب كل عدة أيام) أو دائم (يقدم الطلب عندما تقل الكمية المخزونة).

في هذا البحث سيتم توضيح كيفية تكوين أنموذج الخزين بأحتمالية قيدي رأس المال المستثمر والمساحة المخصصة للخزن تبعا" لتوزيع باريتو.

Abstract

Inventory or inventories are stocks of goods being held for future use or sale. The demand for a product in is the number of units that will need to be removed from inventory for use or sale during a specific period. If the demand for future periods can be predicted with considerable precision, it will be reasonable to use an inventory rule that assumes that all predictions will always be completely accurate. This is the case where we say that demand is deterministic.

The timing of an order can be periodic (placing an order every days) or perpetual (placing an order whenever the inventory declines to units).

in this research we discuss how to formulating inventory model with probabilistic capital and area constraints with pareto distribution.

1-1 : هدف البحث Research Target

نماذج الخزين الاحتمالية هي النماذج التي يكون فيها الطلب احتماليا".

في هذا البحث سنقدم وجهة نظر جديدة في تكوين نماذج الخزين الاحتمالية التي تعتمد على كون رأس المال المستثمر والمساحة المخصصة للخزن عبارة عن متغيرات عشوائية وكيفية التوصل الى حل الانموذج بافتراض ان المتغيرات العشوائية تتبع توزيع باريتو.

2-1 : توزيع باريتو Pareto distribution

توزيع باريتو عبارة عن أنموذج احتمالي للمتغيرات المستمرة، الشكل البياني للتوزيع يشبه منحدر التزلج (ski slope) ، يستخدم هذا التوزيع عموما" في النواحي الاقتصادية وكذلك بالامكان استخدامه بالعلوم السياسية.

دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع باريتو تتكون من معلمتين اساسيتين هما shape وlocation وهي تكون بالشكل الاتي:

$$f(x_i)=\begin{cases}0 & \leq \ location\\ \left(\frac{shape}{location}\right)\left(\frac{location}{x_i}\right)^{(shape+1)} & \succ \ location\end{cases} \qquad .....(1)$$

وممكن ان تكتب بالشكل الاتي:

$$f(x_i)=\begin{cases}0 & \leq \ location\\ \frac{shape.location^{\ shape}}{x_i^{(shape+1)}} & \succ \ location\end{cases}$$

$$f(x_i)=\begin{cases}0 & x\leq\beta\\ \frac{\alpha\beta^{\alpha}}{x_i^{(\alpha+1)}} & x\succ\beta\end{cases} \qquad .....(2)$$

تختلف المصادر في تسمية المعلمة β

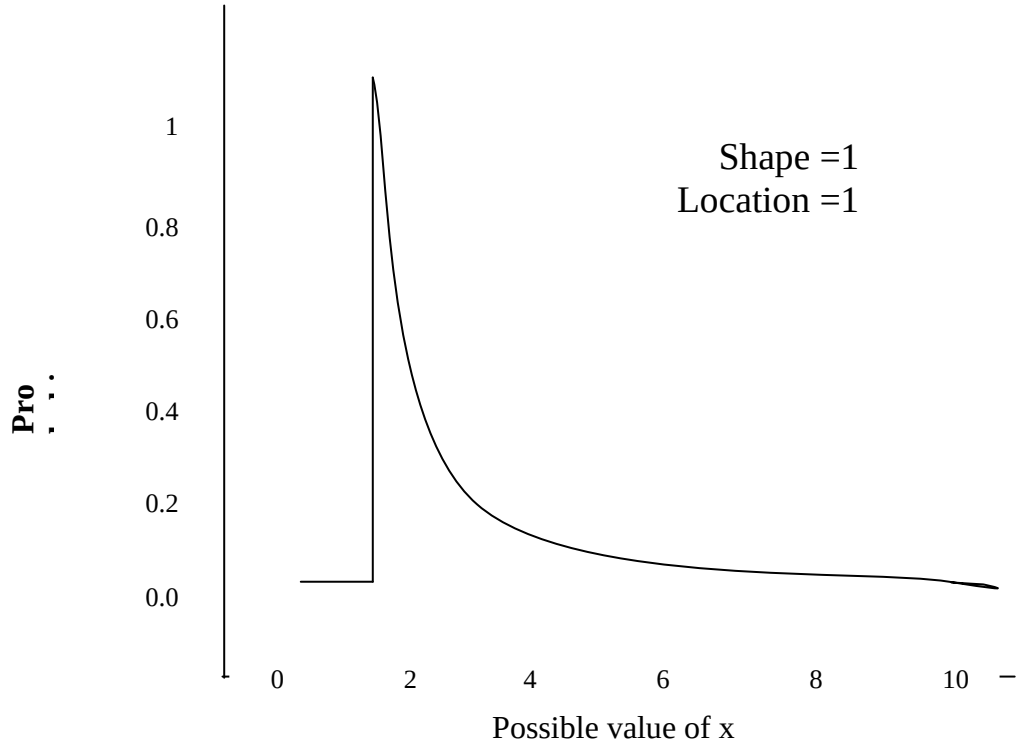
فمنها ما يطلق عليها تسمية Location ومنها مايطلق عليها تسمية Scale غير ان التسمية غير مهمة المهم هو انها تمثل أقل قيمة ممكنة للمتغيرx ويجب ان تكون موجبة.

قيمة المعلمة α في توزيع باريتو يجب ان تكون اكبر من 2 وفي حال عكس ذلك تكون قيمة التباين غير معرفة.

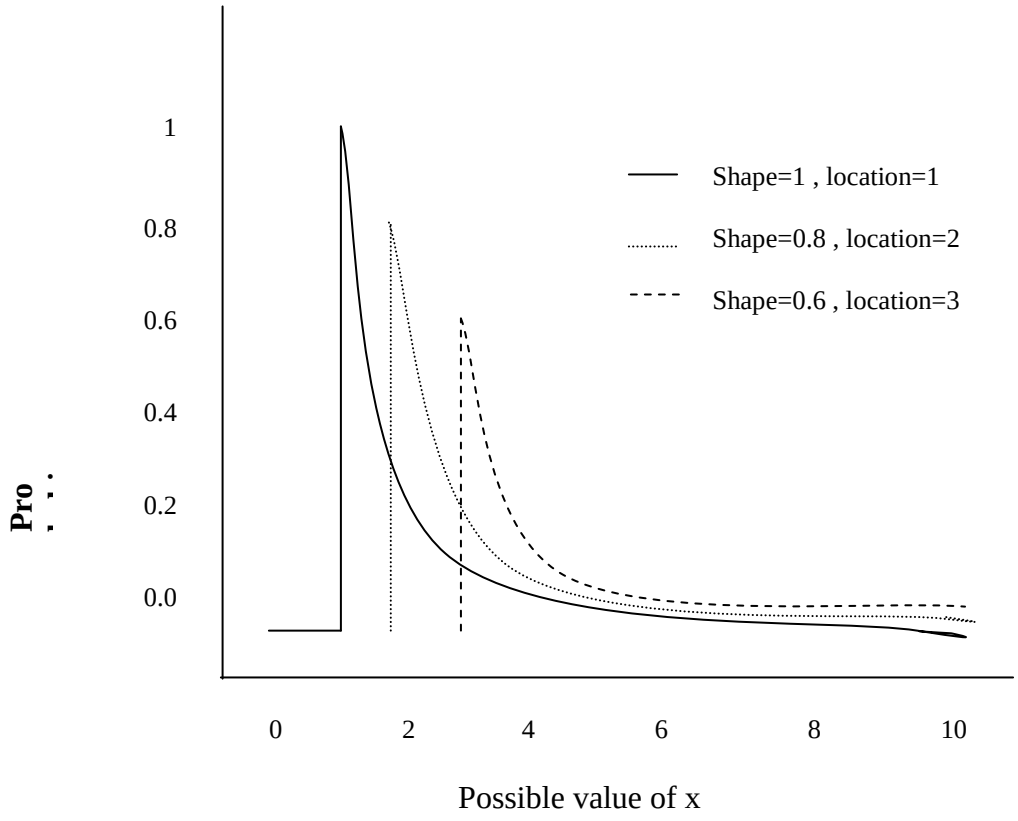
دالة التوزيع التراكمية cumulative distribution function تكون كالاتي:

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & x\prec\beta\\ 1-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha} & x\geq\beta\end{cases} \qquad .....(3)$$

الشكل (1) : دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع باريتو



الشكل (2) : دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع باريتو بقيم مختلفة



توزيع باريتو العام يتكون من ثلاث معلمات هي :

Shape $\alpha \in (-\infty, \infty)$

Location $\beta \in (0, \infty)$

Scale $\delta \in (-\infty, \infty)$

على افتراض ان :

$$x \geq \delta \qquad (\alpha \geq 0)$$

$$\delta \leq x \leq \frac{\delta - \beta}{\alpha} \qquad (\alpha \prec 0)$$

دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع باريتو العام هي :

$$f(x_i) = \frac{1}{\beta}\left[1 + \alpha\left(\frac{x-\delta}{\beta}\right)\right]^{-\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)} \qquad \text{.....(4)}$$

دالة التوزيع التراكمية لتوزيع باريتو العام هي:

$$F_X(x) = 1 - \left[1 + \alpha\left(\frac{x-\delta}{\beta}\right)\right]^{-\left(\frac{1}{\alpha}\right)} \qquad \text{.....(5)}$$

3-1 : القيمة المتوقعة والتباين لتوزيع باريتو Expected Value &Variance for Pareto Distribution

القيمة المتوقعة لتوزيع باريتو هي :

$$E(x_i) = \frac{shape.location}{shape - 1} \qquad shape \succ 1$$

$$E(x_i) = \frac{\alpha\beta}{\alpha - 1} \qquad \alpha \succ 1 \qquad \text{.....(6)}$$

قيمة المعلمة (α) يجب ان تكون اكبر من الواحد وعكس ذلك فان القيمة المتوقعة لتوزيع باريتو سوف تكون غير معرفة.

التباين يكون بالصيغة الاتية:

$$Var(x_i) = \frac{shape.location^{\,2}}{(shape-1)^2(shape-2)} \qquad shape \succ 2$$

$$Var(x_i) = \frac{\alpha\beta^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)} \qquad \alpha \succ 2 \qquad \text{.....(7)}$$

اذا كانت قيمة المعلمة (α) اقل من او تساوي 2 فان التباين يكون غير معرف

القيمة المتوقعة والتباين لتوزيع باريتو العام:

$$E(x_i) = \delta + \frac{\beta}{1-\alpha} \qquad \alpha \prec 1$$

$$Var(x_i) = \frac{\beta^2}{(1-\alpha)^2(1-2\alpha)} \qquad \alpha \prec 1/2 \qquad \text{.....(8)}$$

4-1 : الخزين Inventory

يعرف الخزين بانه الكميات المحتفظ بها من المواد الاولية البسيطة والاجزاء والادوات الاحتياطية وكذلك الاجزاء نصف المصنعة والسلع النهائية التي قامت المنشاة بشرائها او انتاجها.

ومسالة الخزين تجد اهتماماً من كثيرين بسبب طابع الشمول الذي تتميز به وتكاد تكون قائمة الخزين بالوقت الحديث لانهائية، فمن الممكن ان يكون الخزين منتج او مواد خام او اموال في البنوك او مياه خلف سدود او طاقات او موارد بشرية. وكذلك تتطلب عملية اتخاذ القرارات على مستوى الجهة ذات العلاقة قيام ادارة تلك الجهة بالاحتفاظ بمخزون من المواد الاولية والوسيطة المنتجة التي تتعامل منها.

5-1 : تصنيف المواد المخزنية Inventory classification

تصنيف المواد المخزنية وفق اسس مختلفة لتلبية اغراض مختلفة وهي كالاتي:

1- تصنيف المواد المخزنية حسب سرعة الحركة للسلعة:

وحسب هذه الطريقة تصنف المواد الى سريعة الحركة وبطيئة ومتوسطة وفي ضوء هذا التصنيف توضع المواد في اماكن بحيث تؤدي الى اقل جهود في حالة تداولها وهذا التقسيم يستخدم كثيراً في الاسواق الكبيرة (السوبر ماركت).

2- تصنف حسب درجة اهمية المادة:

تصنف المواد حسب النتائج المترتبة على فقدانها فالمادة الحرجة (critical) اذا كان فقدانها يؤدي الى ضرر كبير كتوقف مصنع او حصول ازدحام في الشارع او حصول ازمة، او مواد اخرى والتي تقصانها يكون ذو تأثير قليل ويمكن الانتظار للحصول عليها فترة اطول تسمى مواد غير حرجة (non – critical) والملاحظ ان الاقتصاديين يستخدمون هذا التصنيف لادارة المواد في البلدان ووضع السياسات الكمركية فهناك مواد اساسية واخرى كمالية لديها.

3- تصنيف المواد حسب قيمة الاستهلاك (Consumption value ID) تعرف قيمة الاستهلاك كالاتي:

القيمة الاستهلاكية لمادة ما ولفترة معينة = عدد الوحدات المستهلكة في الفترة المطلوبة مضروباً في تكلفة (سعر) المادة.

بعض المواد تكون ذات قيمة استهلاكية عالية ومواد اخرى ذات قيمة استهلاكية واطئة وما يقع بين هذين الصنفين ذو قيمة استهلاكية متوسطة ونتيجة البحث وجد ان اغلب المخازن ان لم يكن جميعها تخضع للقاعدة التالية:

5 – 10 % من المواد الموجودة في المخزن تشكل نسبة عالية من راس المال المستثمر

20 – 30 % من المواد الموجودة في المخزن تشكل نسبة متوسطة من راس المال المستثمر.

60 – 70 % من المواد الموجودة في المخزن تشكل نسبة قليلة من راس المال المستثمر.

6-1 : نماذج الخزين Inventory Models

ان مسألة الخزين تظهر كلما اصبح ضرورياً تراكم مواد او سلع بهدف تلبية طلب على مدى زمني محدد او غير محدد، وكل منظمة عليها ان تخزن مواد لضمان تسيير عملياتها بشكل كفوء.

ان القرارات التي تحقق كمية الخزين اللازم لطلبها وتحديد الوقت الذي يجري فيه تعزيز الخزين موافقة لكل مسائل الخزين، ان الكمية المطلوبة قد تلبي بخزن كمية كافية لمدى زمني باكمله او خزن كمية لكل وحدة زمنية ضمن المدى الزمني والحالتين متعلقتين بالخزن باكثر من المطلوب او بالخزن اقل من المطلوب وهي حالة over stock وحالة under stock وهي كما يلي:

Over stock: هذه الحالة تحتاج الى استثمار أعلى (توظيف رؤوس اموال كثيرة) في وحدة الزمن والعجز هنا يكون اقل تكراراً وكذلك اجراءات الطلبية تكون اقل تكراراً.

Under stock: هنا في هذه الحالة يقل الانتظار في وحدة الزمن ويزيد تكرار اجراءات الطلبية وكذلك يزيد من احتمالات العجز في الخزين.

والهدف الرئيسي من وجود نظام الخزين هو تحقيق مستوى كاف وملائم من الخزين لغرض مواجهة احتياجات المستقبل لذلك الخزين. ان الاحتفاظ بالخزين يؤدي في الحقيقة وظيفة اساسية هي الضمان ضد التقلبات القصيرة الاجل التي قد تؤثر على عرض المواد ذات العلاقة في السوق او في البيت او في المعمل او التي تؤثر على صناعة هذه المواد. ان السيطرة الكفوءة توجب ان لانحتفظ بكميات فائضة عن الحاجة الحالية او المتوقعة من الخزين لان هذا الاحتفاظ يؤدي الى تكاليف لا مبرر لتحملها، بالاضافة الى هذا ان مسالة الخزين تجد اهتماماً من كثيرين بسبب طابع الشمول الذي تتميز به.

ويمكن وضع تصنيف اخر لنماذج الخزين وهو :

1. لأكثر من سلعة واحدة / او لسلعة واحدة Single item , Multi item.
2. اما ان يكون الطلب محدود اصلاً / او احتمالي Deterministic , Probabilistic.
3. اما ان يكون الطلب ثابت لمدة سنة او اكثر / او تغير الطلب بين فترة واخرى واحياناً لمدة شهر واحد Static , Dynamic.

ان نماذج الخزين التي يكون فيها الطلب محدد اصلاً Deterministic هي ليست موضوع البحث.

7-1 : النماذج الاحتمالية Probabilistic Models

يقصد بالنماذج الاحتمالية هي النماذج التي يكون فيها الطلب احتمالياً ويعالج وفقاً لنظرية الاحتمالات .

سوف نستعرض احد النماذج الاحتمالية والتي يتم مراجعة الخزين من خلالها بشكل مستمر ، وعندما يصل مستوى الخزين الى R أي نقطة اعادة الطلب ويكون مقدار الطلبية لتعزيز الخزين هي Y .

والهدف لهذا النموذج هو ايجاد القيم المثلى الى R ، Y والتي بدورها تقلل او تخفض التوقع الكلي لكلفة الخزين في وحدة الزمن ، والوحدة الزمنية في هذا النموذج هو سنة واحدة . وتكون فرضيات النموذج كما يلي :

1- فترة الانتظار (Lead Time) : وهي الفترة الزمنية بين الطلبية وبين استلام الشحنة ويكون هنا احتمالياً (Stochastic) .
2- بعض الطلب والذي لا يلبى من الخزين لوجود عجز خلال فترة الانتظار ويسجل لكي يلبى مستقبلاً عن وصول المادة وتسمى هذه العملية (Back logged) .
3- توزيع الطلب خلال فترة الانتظار (Lead time) مستقل عن الوقت واينما حدث .
4- لا توجد أكثر من طلبية واحدة لتعزيز الخزين في لحظة $L<t_0$ في زمن الانتظار ، وهنا تكون أقصر من الدورة المخزنية .

ولغرض معالجة الطلب والذي هو احتمالياً لابد من الاستعانة بنظرية الاحتمالات وبالتوزيعات الرياضية.

8-1 : نماذج الخزين لأكثر من سلعة مع وجود القيود .

Multi Item Inventory Models with –Restriction

سوف يتم في هذه الفقرة مناقشة القيود الواقعية والأكثر شيوعاً والتي تعترض العملية التخزينية ومنها:

أولاً: قيد الاستثمار Investment restriction

لنفرض b_1 هو أكبر مبلغ من المال المخصص للاستثمار في شراء المواد وخزنها لمقابلة الحالات الحرجة والتي من اجلها وضع هذا الخزين في المخزن ولهذا سوف تكون العلاقة الرياضية الخاصة بذلك كما يلي :

$$\sum_{j=1}^{n} C_j Q_j \le b_1 \qquad \text{(Max. Investment available)}$$

حيث ان:

C_j : سعر الوحدة الواحدة من المادة المراد تخزينها.

Q_j : كمية المادة المراد تخزينها.

وهذه العلاقة بديهية إذ ان حاصل ضرب سعر الوحدة الواحدة في الكميات ولمجموع الكميات يجب ان يساوي أو اقل من أعلى مبلغ مخصص للاستثمار في العملية التخزينية .

ثانياً : قيد المساحة Capacity restriction

لنفترض ان b_2 هي أقصى مساحة مخصصة لخزن السلع المراد تخزينها حيث أن f_j هي المساحة التي تحتاجها الوحدة الواحدة من السلع المخزونة .

وبهذا تكون العلاقة الرياضية الخاصة بذلك :

$$\sum_{j=1}^{n} f_j Q_j \le b_2$$

أو يكون القيد هو عدد الوحدات المزمع تخزينها ولذلك تكون العلاقة الرياضية كما يلي :

b_3 : هو أعلى عدد من الوحدات المسموح خزنها .

$$\sum_{j=1}^{n} Q_j \le b_3$$

ثالثاً : عدد الطلبيات خلال السنة Number of order per year

عدد مرات تكرار الطلبية خلال السنة الواحدة هو قيد فعلي واقعي يعيق وصول السلع بشكل كافي نادراً ما الى المخازن كما لهذه الطلبيات من تكاليف اضافة الى ذلك اجراءات رسمية تفرضها الحكومة على عدد الطلبيات من خارج البلد ناهيك عن القيود الكمركية الطبيعية وتكون العلاقة الرياضية لذلك :

$$\sum_{J=1}^{n} \frac{D_j}{Q_j} \le b_4$$

b_4 : أعلى عدد مرات مخصص لتكرار الطلبيات خلال السنة

D_j : حجم الطلب السنوي للسلعة (j) .

موضوع البحث سيركز على احتمالية قيدي المال المخصص للاستثمار وكذلك المساحة المخصصة للخزن لمادة مخزنية معينة في حال اشتراك مادة مخزنية اخرى او اكثر في المال المخصص للاستثمار وكذالك المساحة المخصصة للخزن وبالتالي سوف يكون المال المخصص للاستثمار والمساحة المخصصة للخزن للمادة المعينة عبارة عن قيم متغيرة على مدار السنة.

سوف نفترض ان القيمة المتغيرة للمال المخصص للاستثمار على مدار السنة وكذلك المساحة عبارة عن متغير عشوائي يتبع توزيع باريتو
نفترض القيد التصادفي الاتي:

$$P_r(\sum_{j=1}^{n} C_j Q_j \geq b_i) \geq u \qquad .....(9)$$

حيث u تمثل قيمة تحقق القيد التصادفي وهي محصورة بين الصفر والواحد
الجانب الايسر للقيد هو عبارة عن دالة توزيع تراكمية للمتغير $\mathbf{b_i}$ ولتحويل القيد التصادفي الى قيد محدد نتبع الاتي:

$$p_r(\frac{\sum_{j=1}^{n} C_j Q_j - \mu_i(x)}{\sigma_i(x)} \geq \frac{b_i - \mu_i(x)}{\sigma_i(x)}) \geq u$$

$$\phi(\sum_{j=1}^{n} C_j Q_j) \geq u$$

$$\sum_{j=1}^{n} C_j Q_j \geq \phi^{-1}(u) = \tau_u \qquad .....(10)$$

حيث $\phi^{-1}(u_i)$ هو معكوس دالة التوزيع التراكمية وتستخرج من الصيغة:

$$\int_{-\infty}^{\tau_U} f(b)db = u$$

اما في حال كون القيد التصادفي بالصيغة الاتية:

$$P_r(\sum_{j=1}^{n} C_j Q_j \leq b_i) \geq u$$

$$1-\phi(\sum_{j=1}^{n} C_j Q_j) \geq u$$

$$\sum_{j=1}^{n} C_j Q_j \leq \phi^{-1}(1-u) = \tau_N$$

τ_N توجد من الصيغة :

$$\int_{\tau_N}^{\infty} f(b)\,db = u$$

9-1 : تكوين الانموذج Construct of model

تكوين أنموذج الخزين الاحتمالي يكون كالاتي :

1- قيد الاستثمار:

$$P_r(\sum_{j=1}^{n} C_j Q_j \le b_1) \ge u$$

2- قيد المساحة :

$$P_r(\sum f_j Q_j \le b_2) \ge u$$

الهدف من الانموذج هو تحقيق اعلى كمية للخزن وبالتالي فان الانموذج النهائي يكون بالصيغة الاتية:

$$Max \quad Z = \sum_{j=1}^{n} Q_j$$

$$S.t$$

$$P_r(\sum_{j=1}^{n} C_j Q_j \le b_1) \ge u$$

$$p_r(\sum_{j=1}^{n} f_j Q_j \le b_2) \ge u$$

$$Q_j \ge 0$$

10-1 : مثال توضيحي Illustratory Example

شركة تسعى للحصول على اعلى كمية للخزين الشهري لمنتجين مع العلم ان رأس المال المستثمر متغير عشوائي يتبع توزيع باريتو بالمعلمتين (2,10) بالاضافة الى ان المساحة المخصصة للخزن هي ايضا" متغير عشوائي يتبع توزيع باريتو بالمعلمتين (3,15) والجدول الاتي يبين كلفة الوحدة الواحدة من المنتجين بالاضافة الى المساحة(م2) التي يحتاجها خزن وحدة واحدة من المنتجين

Q	C	f
Q1	5	0.20
Q2	7	0.40

الأنموذج يكون بالصيغة الاتية:

$$Max \quad Z = Q_1 + Q_2$$

$$S.t$$

$$P_r(5Q_1 + 7Q_2 \le b_1) \ge 0.10$$

$$P_r(0.2Q_1 + 0.4Q_2 \le b_2) \ge 0.10$$

$$Q_1, Q_2 \ge 0$$

القيمة(0.10) تحدد من قبل الباحث بالاعتماد المشكلة موضع البحث.

القيد المحدد للقيد التصادفي الاول (قيد رأس المال المستثمر) يكون كالاتي:

$$5Q_1 + 7Q_2 \le \ \phi^{-1}(1-0.10) = \tau_N$$

$$\int_{\tau_N}^{\infty} f(b)\,db = 0.10$$

$$\int_{\tau_N}^{\infty} \frac{\alpha\beta^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}dx = 0.10$$

$$\int_{\tau_N}^{\infty} \frac{2(10)^2}{x^3}dx = 0.10 \Rightarrow -(\frac{10}{x})^2 \ \Big]_{\tau_N}^{\infty} = 0.10$$

$$\left(\frac{10}{\tau_N}\right)^2 = 0.10 \Rightarrow \tau_N = 31.62$$

الصيغة النهائية لقيد رأس المال المستثمر تكون كالاتي:

$$5Q_1 + 7Q_2 \le \ 31.62$$

القيد المحدد للقيد التصادفي الثاني (قيد المساحة) يكون كالاتي:

$$0.2Q_1 + 0.4Q_2 \le \ \phi^{-1}(1-0.10) = \tau_N$$

$$\int_{\tau_N}^{\infty} f(b)\,db = 0.10$$

$$\int_{\tau_N}^{\infty} \frac{\alpha\beta^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}dx = 0.10$$

$$\int_{\tau_N}^{\infty} \frac{3(15)^3}{x^4}dx = 0.10 \Rightarrow -(\frac{15}{x})^3 \ \Big]_{\tau_N}^{\infty} = 0.10$$

$$\left(\frac{15}{\tau_N}\right)^3 = 0.10 \Rightarrow \tau_N = 32.32$$

الصيغة النهائية لقيد المساحة تكون كالاتي:

$$0.2Q_1 + 0.4Q_2 \leq 32.32$$

الأنموذج النهائي يكون بالصيغة الأتية:

$$Max \quad Z = Q_1 + Q_2$$

$$S.t$$

$$5Q_1 + 7Q_2 \leq 31.62$$

$$0.2Q_1 + 0.4Q_2 \leq 32.32$$

$$Q_1, Q_2 \geq 0$$

11-1: الاستنتاجات Conclusions

رأس مال اي شركة غالبا" مايستخدم لتوفير اكثر من مادة والواقع العملي يشير الى ان المواد تختلف من حيث اهميتها وعلى هذا الاساس سيكون الانفاق مركز على المواد المهمة ومن ثم المواد الاقل اهمية ولذلك سيكون رأس المال المستخدم في توفير المواد الاقل اهمية عبارة عن متغير عشوائي وكذلك الحال بالنسبة للمساحة المخصصة للخزن.

12-1: التوصيات Recommendations

نوصي بأخذ الجانب الاحتمالي لكل العناصر المؤثرة في مسألة الخزين عند التكوين والحل لانها الاقرب الى الواقع العملي وبالتالي ستؤدي الى التوصل الى النتائج المرجوة.

المصادر

1. الجواد ، دلال صادق والفتال، حميد ناصر، 2008، "بحوث العمليات"، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع /الاردن.

2. الشمرتي، حامد سعد، 2009 ، "بحوث العمليات مفهوما" وتطبيقا"، دار وائل للنشر /الاردن

3.Bazsa,emoke,2001,"Singleiteminventory", publishing.eur.nl/ir/repub/asset/6838/2001-1014.pdf

4. James W. Stoutenborough & Paul Johnson ,2006," Pareto Distribution" ,pj.freefaculty.org/stat/Distributions/Pareto-02.pdf.

5. Wayne, L.winston , 2004 , "Operations Research application and algorithms" , pws-kent publishing company-Boston.