مقارنة بعض المقدرات شبه ألمعلميه لتقدير دالة الانحدار

أ. م. د مناف يوسف حمود **الباحثة أسيل مسلم عيسى**

كلية الادارة والاقتصاد- جامعة بغداد

قسم الاحصاء

المستخلص

ان هدف هذا البحث يتمثل بيان أهمية تقدير دالة الانحدار شبه المعلميه .إذ تم استعراض بعض الطرائق شبه المعلميه مع بعض الطرائق المقترحة لتقدير دالة الانحدار ، ومن ثم مقارنة هذه الطرائق من خلال أسلوب المحاكاة باستعمال توزيعات، إحجام عينات ومستويات تباين مختلفة للمتغير X ، اذ تم اقتراح مقدر مدمج شبه معلمي لتقدير دالة الانحدار وقد اثبتت النتائج افضلية هذا المقدر المقترح في حالة الأنموذجين الأول والثاني، إما للأنموذج الثالث فقد أظهرت النتائج أفضلية مقدر Burman and Chaudhuri (B&C) .

A comparison Of Some Semiparametric Estimators For consumption function Regression

<u>Abstract:</u>

This article aims to explore the importance of estimating the a semiparametric regression function ,where we suggest a new estimator beside the other combined estimators and then we make a comparison among them by using simulation technique . Through the simulation results we find that the suggest estimator is the best with the first and second models ,wherealse for the third model we find Burman and Chaudhuri (B&C) is best.

مجلة العلوم
الاقتصادية والإدارية
المجلد 18
العدد 67
الصفحات 273- 288

1-1المقدمة

يعد الانحدار التقليدي من أكثر الأساليب الإحصائية وأوسعها استخداما في بيان العلاقة بين المتغير التابع والمتغيرات التوضيحية، إذ ان هذا الأسلوب يكون ذا فائدة عندما يكون متوسط الاستجابة خطيا اي ان:

$$E(Y/X) = \beta' X$$

لكن هذا الافتراض قد لا يتحقق في اغلب التجارب العلمية ، إذ أنه لا يأخذ بنظر الاعتبار التأثير اللاخطي[8] للمتغيرات التوضيحية .لذلك جاء أسلوب أخر يأخذ بنظر الاعتبار التأثير اللاخطي ، وهذا الأسلوب هو الأسلوب اللامعلمي الذي تم اقترحه من قبل الباحث**Jacob Wolfowitz** عام (1942) [16]إذ يكون متوسط الاستجابة بالشكل الاتي :

$$E(Y/X) = m(X)$$

اذ يشير $m(.)$ الى دالة الانحدار اللامعلمي ذات البعد **P (P-dimensional)** .

وقد لاحظ اغلب الباحثين ان هذا الأسلوب يعاني أيضا من مشكلة إلا وهي مشكلة الإبعاد **(The Curse of Dimensionality)** التي تحصل عند زيادة عدد المتغيرات. لذلك قدم أسلوب أفضل من الأسلوبين المذكورين انفا وهو أسلوب الانحدار شبه معلمي **(Regression Semiparametric)** والذي تم اقتراحه من قبل الباحث **Robinson** [17]عام (1988) و **Speckman** عام (1988) [15] الذي يعد في الوقت الحاضر من أكثر الأساليب الإحصائية استعمالا . اذ فاق هذا الأسلوب كل من الانحدار المعلمي واللامعلمي من خلال دراسة المتغيرات التوضيحية سواءا أكانت متقطعة ام مستمرة في أنموذج واحد بالإضافة الى تجاوز المشاكل التي تعيق كل من الأسلوبين المشار إليها. ان الانحدار شبه معلمي له عدة تسميات منها الانحدار الخطي الجزئي **'' Partial linear Regression''** والذي يرمز له بالرمز **(PL)** كما يطلق عليه في بعض المصادر الانحدار شبه المعلمي **"Semiparametric regression"** [12] او الانحدار شبه الخطي **"Semi linear regression "**.

1-2 هدف البحث

يهدف البحث إلى عرض بعض الطرائق الأهم والأكثر انتشارا لتقدير دالة الانحدار مستخدمين بذالك مقدرات شبه معلميه، فضلا عن محاولتنا إيجاد مقدر جديد مقترح لها اداءا أفضل من أداء المقدرات المتاحة.

2- الجانب النظري

تعتمد مقدرات المدمجة شبه المعلميه على توافيق المقدرات المعلميه والمقدرات اللامعلميه بوجود معلمة دمج والتي تعطي وزنا للمقدر وبفرض كون $\{T_i, Y_i\}_i^n$ متغيرات عشوائية مستقلة ومتماثلة التوزيع[3] .

(1-2) آلية تقدير دالة الانحدار المدمج

سوف نتطرق الى آلية عمل مقدرات الانحدار المدمج بعدها نذكر أهم الطرائق المستعملة لتقدير هذه الدوال كما يأتي :

1- باختيار حجم عينة معين وبفرض إن $f(\beta, T)$ تشير إلى إحدى الصيغ المعلميه المعروفة والمعتمدة على المعلمة المجهولة β . إن دالة الانحدار المعلمي قد يكون خطيا بسيطا أو متعددا ، وقد يكون لا خطيا اي قد يكون تربيعا أم تكعيبيا ام لوغارتيميا...الخ . لذلك نحن بحاجة لتقدير تلك المعالم المجهولة ، وهنالك عدة طرائق لتقدير المعلمة المجهولة منها طريقة المربعات الصغرى وطريقة الإمكان الأعظم ...الخ. وهنا سيتم تقدير β بطريقة المربعات الصغرى، وصيغتها:

$$\hat{\beta}' = (T'T)^{-1} T'Y$$

2 - إما دالة الانحدار اللامعلمي فقد يتم تقديرها باستعمال عدة ممهدات، منها ممهد اللب، ممهد متعدد الحدود الموضعي، ممهد الشريحة... الخ . وهنا سيتم تقدير الدالة اللامعلميه باستخدام ممهد انحدار متعدد الحدود الموضعي (local polynomial regression smoother) ، أولا لنفرض متسلسلة تايلور (Taylor expansion) دالة التوقع الشرطي المجهول $m(.)$ إذ ان:

$$m(T) = m(t) + m'(t)(T_i - t) + \frac{m''(t)}{2}(T_i - t)^2 + \ldots + \frac{m'^{p}(t)}{p}(T_i - t)^p \qquad \ldots(1)$$

إذ إن t يكون جوار النقطة T لنفرض ان :

$$m(t) = \beta_0$$
$$m'(t) = \beta_1$$
$$\frac{m''(t)}{2} = \beta_2$$
$$\vdots$$
$$\frac{m'^{p}(t)}{p} = \beta_p$$

بعد التعويض تصبح $m(T)$ بالشكل الاتي:

$$m(T) = \beta_0 + \beta_1(T_i - t) + \beta_2(T_i - t)^2 + \ldots + \beta_P(T_i - t)^p \qquad \ldots(2)$$

بما إن دالة الانحدار اللامعلمي تعطى بالشكل الاتي :

$$Y = m(T) + \varepsilon \qquad \ldots(3)$$

ألان نقوم بتعويض $m(T)$ بدالة الانحدار فتصبح :

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1(T_i - t) + \beta_2(T_i - t)^2 + \ldots + \beta_P(T_i - t)^p + \varepsilon_i \qquad \ldots(4)$$

ولكي يتم تقدير المعالم المجهولة نستخدم طريقة المربعات الصغرى الموزونة وكالاتي :

$\sum_i$

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 * K_h(T_i - t) = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - (\beta_0 + \beta_1(T_i - t) + \beta_2(T_i - t)^2 + \ldots + \beta_P(T_i - t)^p))^2 * K_h(T_i - t)$$

وبتحويل المعادلة أنفا إلى صيغة مصفوفات فتكون :

$\beta = [\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p]$:موجة المعالم المجهولة من الدرجة p والمراد تقديرها .

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} 1\,(T_1 - t) & \cdots\cdots & (T_1 - t)^p \\ \vdots \quad \vdots & \ddots & \vdots \\ 1\,(T_n - t) & \cdots\cdots & (T_1 - t)^p \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} K_h(t - T_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & K_h(t - T_n) \end{bmatrix} = diag K_h(t - T_i)$$

فيصبح تقدير β بالشكل الاتي :

$$\widehat{\beta}(t) = (T'WT)^{-1} T'WY$$

إن الصيغة أنفا هي الصيغة العامة لانحدار متعدد الحدود الموضعي ، من المهم ملاحظة انه $\widehat{\beta}(t)$ هي عبارة عن $\widehat{\beta}_0(t)$ و $\widehat{\beta}_1(t)$ و ... و $\widehat{\beta}_P(t)$ ،لذلك فان مقدر متعدد الحدود الموضعي لدالة الانحدار هو

$$\widehat{m}_{p,h}(t) = \widehat{\beta}_0(t)$$

نلاحظ حقيقة إن $\widehat{m}_{p,h}(t)=\widehat{\beta}_0(t)$. ففي حالة $p=0$ فان هذا يعني ان المقدر هو مقدر **Nadaraya-Watson**

$$\widehat{m}_{0,h}(t)=\widehat{m}_h(t)=\frac{\sum_{i=1}^{n}K_h(t-T_i)y_i}{\sum_{i=1}^{n}K_h(t-T_i)},i=1,2,...,n \qquad ...(5)$$

اذان:

$$K_h(.)=\frac{1}{h}K(\frac{.}{h})$$

إما في حالة $p=1$ فان المقدر سيكون ممهد الانحدار الخطي الموضعي (**Local linear regression LLS**) [1][2][4][7]، إذ يتم إيجاده بالطريقة الآتية :

$$m(x)\cong m(t)+m'(t)(x-t)\equiv\beta_0+\beta_1(x-t)$$

لذلك فإن :

$$\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2K_h*(t-x)=\sum_{i=1}^{n}(Y_i-(\beta_0+\beta_1(x-t)))^2*K_h(t-x)$$

ولهذا فان مساواة تقدير دالة الانحدار $m(t)$ تكون مساوية إلى مسالة الانحدار الخطي الموضعي والتي تتمثل بتقدير الحد الثابت β_0

بفرض إن $\widehat{\beta}_0$ و $\widehat{\beta}1$ يمثلان حل لمسألة المربعات الصغرى الموزونة المذكور أنفا و بحساب بسيط ينتج إن :

$$\widehat{\beta}_0=\frac{\sum_{i=1}^{n}W_iY_i}{\sum_{i=1}^{n}W_i+n^{-1}}$$

إذ إن

$$W_i=K_h(T_i-t)[S_{n,2}-(T_i-t)S_{n,1}]$$

$$S_{n,l}=\sum_{i=1}^{n}K_h(T_i-t)(T_i-t)^l,l=1,2$$

3- دمج المقدر المعلمي مع المقدر اللامعلمي والذي يستند على وجود معلمة دمج مرافقة (combining parameter) ولها تسميات عدة منها معلمة شبه المعلميه (semiparametric parameter) وثابت المدمجة (combining constant) ومعامل الدمج (combining coefficient) ، وان هذه المعلمة تقدر بعدة طرائق منها طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية وطريقة الإمكان الأعظم ...الخ .

ـ طرائق تقدير دالة الانحدار المدمج :

من المعروف إن هذه الدالة تتكون من دمج دالتين هما دالة انحدار معلميه تحتاج إلى تقدير معالمها وكذلك تقدير دالة انحدار لا معلمي، و معلمة الدمج هي الى تقدير أيضا حسب صيغة الأنموذج . لذلك هنالك عدة طرائق لتقدير هذه الدوال وتقدير معلمة الدمج. ان أهم الطرائق المستعملة لتقدير دالة الانحدار المدمج هي :

- مقدر **Burman and Chaudhuri (B&C).**
- مقدر **Wooldridge (Woo).**
- مقدر **Fan & Ullah (F&U).**
- **المقدر المقترح من قبل الباحث (Suggest)**

وفيما يأتي عرضا لكل مقدر:

(1-2-2) مقدر Burman and Chaudhuri (B&C)[14]

درس الكثير من الباحثين هذا المقدر منهم الباحثان Olkin و Spiegelman عام (1987)[11] والباحثة Julian Faraway عام (1990)[6] والباحثان Ullah و Rahma D.V Gokhale عام (1997)[10] والباحث حمود (2005)[3] في تقدير دالة الكثافة الاحتمالية. إما الباحثان Ullah و Vinod عام (1993) [5] والباحثان Burman and Chaudhuri عام (1994)[14] والباحثان Fan وUllah عام (1999)[14] فأنهم درسوها في دالة الانحدار. إن هذا المقدر يدمج دالة معلميا للأنموذج المعلمي ومقدرا لا معلمياً للأنموذج اللامعلمي وفق مقدر لمعلمة المدمجة إذ إن صيغة هذا المقدر هي :

$$\hat{\theta}_1(T_i) = \hat{\lambda} f(\hat{\beta}, T_i) + (1-\hat{\lambda})\hat{m}(T_i)$$

علما أن الصيغة المذكورة أنفا تعد مقدرا لدالة الانحدار:

$$Y_i = \theta_1(T_i) + \varepsilon_i \qquad ...(7)$$

إذ أن

$$\theta_1(T_i) = \lambda_1 f(\beta, T_i) + (1-\lambda_1)m(T_i) \qquad ...(8)$$

اي تصبح دالة الانحدار بعد تعويض المعادلة (8)عوضا عن (7) بألاتي :

$$Y_i = \lambda f(\beta, T_i) + (1-\lambda)m(T_i) + \varepsilon_i \qquad ...(9)$$

وان λ_1 تشير إلى معلمة المدمجة (combining parameter) ، وهي تقع بين $0 \le \lambda_1 \le 1$ فإذا كانت $\lambda_1 = 0$ فان الأنموذج سيكون لا معلميا وصيغته :

$$Y_i = m(T_i) + \varepsilon_i$$

وإذا كانت $\lambda_1 = 1$ فان الأنموذج سيكون معلميا وكما ياتي :

$$Y_i = f(\beta, T_i) + \varepsilon_i$$

سيتم تقدير هذه المعلمة بطريقة المربعات الصغرى وعلى النحو التالي : يتم إضافة وطرح الدالة ألمعلميه $f(\beta, T_i)$ إلى معادلة (9) فنحصل على

$$Y_i = \lambda_1 f(\beta, T_i) + (1-\lambda_1)m(T_i) - f(\beta, T_i) + f(\beta, T_i) + \varepsilon_i$$

بعد ذلك تصبح المعادلة كألاتي:

$$Y_i - f(\beta, T_i) = \lambda_1 f(\beta, T_i) + (1-\lambda_1)m(T_i) - f(\beta, T_i) + \varepsilon_i$$

$$Y_i - f(\beta, T_i) = \lambda_1 f(\beta, T_i) + (\lambda_1 - 1)[f(\beta, T_i) - m(T_i)] + \varepsilon_i$$

وبعد تقدير الجزء المعلمي مع الجزء اللامعلمي نعمل على استبدال كل من ب $f(\beta,T_i)$ ب $f(\widehat{\beta},T_i)$ و $m(T_i)$ ب $\widehat{m}(T_i)$ لذلك يصبح الأنموذج كما يأتي:

$$Y_i - f(\widehat{\beta},T_i) = \lambda_1 f(\widehat{\beta},T_i) + (\lambda_1 - 1)[f(\widehat{\beta},T_i) - \widehat{m}(T_i)] + \varepsilon_i$$

لإيجاد λ_1 نتبع الأتي

$$\sum_{i=1}^{n}\varepsilon^2{}_i = \sum_{i=1}^{n}([Y_i - f(\widehat{\beta},T_i)] - (\lambda_1 - 1)[f(\widehat{\beta},T_i) - \widehat{m}(T_i)])^2$$

وبالاشتقاق بالنسبة إلى λ_1

$$\frac{\partial\sum_{i=1}^{n}\varepsilon^2{}_i}{\partial\lambda_1} = -2[\sum_{i=1}^{n}([Y_i - f(\widehat{\beta},T_i)] - (\lambda_1 - 1)[f(\widehat{\beta},T_i) - \widehat{m}(T_i)])][f(\widehat{\beta},T_i) - \widehat{m}(T_i)]$$

ومساواة المعادلة أعلاه بالصفر

$$-2[\sum_{i=1}^{n}([Y_i - f(\widehat{\beta},T_i)] - (\lambda_1 - 1)[f(\widehat{\beta},T_i) - \widehat{m}(T_i)])][f(\widehat{\beta},T_i) - \widehat{m}(T_i)] = 0$$

يكون مقدر λ_1 بالشكل الأتي :

$$\widehat{\lambda}_1 = \frac{n^{-1}\sum_{i=1}^{n}([Y_i - f(\widehat{\beta},T_i)] - [f(\widehat{\beta},T_i) - \widehat{m}(T_i)])}{n^{-1}\sum_{i=1}^{n}[f(\widehat{\beta},T_i) - \widehat{m}(T_i)]^2} + 1 \qquad ...(10)$$

مع ملاحظة إن $f(\widehat{\beta},T_i) \neq \widehat{m}(T_i)$

(2-2-2) مقدر Wooldridge(Woo)[9]

اقترح هذا المقدر من قبل الباحث Wooldridge عام (1992) [9] ويعمل هذا المقدر على دمج مقدر معلمي $f(\beta,T_i)$ ، و مقدر لا معلمي وكما يأتي :

$$\widehat{\theta}_2(T_i) = f(\widehat{\beta},T_i) + \widehat{\lambda}_2\widehat{m}(T_i) \qquad ...(11)$$

اذ تشير λ_2 الى معلمة المدمجة (combining parameter) ، يلاحظ إن معلمة المدمجة محتواة فقط بالجزء اللا معلمي وهي تقع بين $0 \le \lambda_2 \le 1$ فإذا كانت $\lambda_2 = 1$ فان الأنموذج سيكون أنموذج خطي جزئي والذي يدمج الانحدار المعلمي مع الانحدار اللامعلمي وصيغه كما يأتي :

$$Y_i = m(T_i) + f(\beta,T_i) + \varepsilon_i$$

وإذا كانت $\lambda_2 = 0$ فان الأنموذج سيكون معلمي وصيغته كما يأتي :

$$Y_i = f(\beta,T_i) + \varepsilon_i$$

و بعد تقدير الجزء المعلمي مع الجزء اللامعلمي نعمل على استبدال كل من ب $f(\beta,T_i)$ ب $f(\widehat{\beta},T_i)$ و $m(T_i)$ ب $\widehat{m}(T_i)$ لذلك يصبح الأنموذج كما يأتي:

$$Y_i - f(\beta,T_i) = \lambda_2 m(T_i) + \varepsilon_i$$

لإيجاد λ_2 نعمل على اشتقاق المعادلة بالنسبة إلى λ_2 وكالاتي:

$$\sum_{i=1}^{n}\varepsilon^2{}_i = \sum_{i=1}^{n}(Y_i - f(\widehat{\beta},T_i) - \lambda_2\widehat{m}(T_i))^2$$

وبالاشتقاق بالنسبة إلى λ_2

ومساواة المعادلة أعلاه بالصفر

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n} \varepsilon^2{}_i}{\partial \lambda_2} = -2[\sum_{i=1}^{n}([Y_i - f(\widehat{\beta}, T_i)] - \lambda_2 \widehat{m}(T_i)])]\widehat{m}(T_i) \Rightarrow [\sum_{i=1}^{n}([Y_i - f(\widehat{\beta}, T_i)] - \lambda_2 \widehat{m}(T_i)])]\widehat{m}(T_i) = 0$$

يكون مقدر λ_1 بالشكل الأتي :

$$\widehat{\lambda}_1 = \frac{n^{-1}\sum_{i=1}^{n}[Y_i - f(\widehat{\beta}, T_i)]\widehat{m}(T_i)}{n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\widehat{m}(T_i)^2} \qquad ...(12)$$

مع ملاحظة إن $\sum_{i=1}^{n}\widehat{m}(T_i)^2 \neq 0$

(3-2-2) مقدر Fan &Ullah (F&U) [14]

اقترح هذا المقدر من قبل الباحثين **Fan &Ullah** عام **(1999)**، ان فكرة هذا المقدر تطابق مقدر **Burman and Chaudhuri** ، يعمل هذا المقدر على دمج كلا من المقدر المعلمي مع المقدر الانحدار المدمج المقترح من قبل **Burman and Chaudhuri** $\theta_1(T_i) = \lambda_1 f(\beta, T_i) + (1-\lambda_1)m(T_i)$ بالاعتماد على معلمة دمج تقع بين الصفر والواحد . نلاحظ إن هذا المقدر يحتوي على معلمتي دمج الواحدة داخل الأخرى ، الأولى معلمة المدمجة الخاصة بالمقدر الانحدار المدمج والتي يتم تقديرها، إما الثانية فهي خاصة بهذا المقدر . ان صيغة هذا المقدر هي :

$$\widehat{\theta}_3(T_i) = \lambda_3 f(\widehat{\beta}, T_i) + (1-\lambda_3)\widehat{\theta}_1(T_i)$$

علما ان الصيغة المذكورة انفا تعد لمقدر دالة الانحدار:

$$Y_i = \theta_3(T_i) + \varepsilon_i \qquad ...(13)$$

اذ ان

$$\theta_3(T_i) = \lambda_3 f(\beta, T_i) + (1-\lambda_3)\theta_1(T_i) \qquad ...(14)$$

اي تصبح دالة الانحدار بعد تعويض المعادلة (14) في (13) بالآتي :

$$Y_i = \lambda_3 f(\beta, T_i) + (1-\lambda_3)\theta_1(T_i) + \varepsilon_i$$

اذ إن λ_3 تشير الى معلمة المدمجة **(combining parameter)** وهي تقع بين $0 \le \lambda_3 \le 1$ فإذا كانت $\lambda_3 = 1$ فان الأنموذج سيكون معلمي وفي هذه الحالة يكون محدد بشكل صحيح **correctly specified.** وصيغته كما ياتي:

$$Y_i = f(\beta, T_i) + +\varepsilon_i$$

وإذا كانت $\lambda_3 = 0$ فان الأنموذج سيكون أنموذج انحدار مدمج وفي هذه الحالة يكون محدد بشكل خاطئ **incorrectly specified** وصيغته كما يأتي :

$$Y_i = \theta_1(T_i) + \varepsilon_i$$

وفي حالة λ_3 تكون قيمتها قريبة من الصفر فانة يكون ذات مواصفات قريبة من الصحة approximately correct.يتم تقدير معلمة المدمجة بطريقة المربعات الصغرى بعد تقدير الجزء ألمعلمي وتقدير مقدر الانحدار المدمج، وان طريقة تقديرها تكون مشابه إلى تقدير λ_1 ، لذلك

$$\hat{\lambda}_3 = \frac{n^{-1}\sum_{i=1}^{n}([Y_i - f(\hat{\beta},T_i)] - [f(\hat{\beta},T_i) - \hat{\theta}_1(T_i)])}{n^{-1}\sum_{i=1}^{n}[f(\hat{\beta},T_i) - \hat{\theta}_1(T_i)]^2} + 1 \qquad ...(15)$$

مع ملاحظة إن $f(\hat{\beta},T_i) \neq \hat{\theta}_1(T_i)$

(4-2-2) مقدر الانحدار المدمج المقترح

تستند هذه الطريقة على اقتراح انموذج انحدار شبه معلمي مدمج وذلك من خلال الانموذج الاتي

$$Y_i = f(\beta,T_i) + \lambda_4\theta_1(T_i) + \varepsilon_i \qquad ...(16)$$

اذ ان

$$\theta_1(T_i) = \lambda_1 f(\beta,T_i) + (1-\lambda_1)m(T_i)$$

ويلاحظ من الأنموذج المقترح انه عبارة عن مزيج بين طريقتين Fan & Ullah من ناحية الفكرة و مقدر Wooldridge من ناحية هيكلية المقدر لكن الفرق يكون بتعويض $\theta_1(T_i)$ عوضا عن $m(T_i)$. لتقدير هذا الانموذج نقوم اولا بتقدير كل من $f(\beta,T_i)$ وبعدها ايجاد تقدير $\theta_1(T_i)$ وفقا للأساليب المذكورة أنفا مستخدمين بذلك طريقة B&C ومعيار OLS لتقدير معلمة المدمجة λ_1 . بعد عمل الخطوات جميعا يتم ايجاد تقدير λ_4 أيضا بطريقة المربعات الصغرى، و أيضا تقع بين$(1 \le \lambda_4 \le 0)$ فإذا كانت $\lambda_4 = 1$ فان المقدر سيكون بالشكل الأتي:

$$\theta_4(T_i) = (\lambda_1 + 1) f(\beta,T_i) + (1-\lambda_1)m(T_i)$$

وإذا كانت $\lambda_4 = 0$ فان المقدر سيكون معلمي وبالشكل التالي :

$$\theta_4(T_i) = f(\beta,T_i)$$

و بعد تقدير الجزء المعلمي مع الجزء اللامعلمي نعمل على استبدال كل من ب$f(\beta,T_i)$ ب $f(\hat{\beta},T_i)$ و $\theta_1(T_i)$ ب $\hat{\theta}_1(T_i)$ لذلك يصبح الأنموذج كما يأتي:

$$Y_i - f(\beta,T_i) = \lambda_4\theta_1(T_i) + \varepsilon_i$$

لإيجاد λ_4 نعمل على اشتقاق المعادلة بالنسبة إلى λ_4 وكالاتي:

$$\sum_{i=1}^{n}\varepsilon^2{}_i = \sum_{i=1}^{n}(Y_i - f(\hat{\beta},T_i) - \lambda_4\hat{\theta}_1(T_i))^2$$

$$\frac{\partial\sum_{i=1}^{n}\varepsilon^2{}_i}{\partial\lambda_4} = -2[\sum_{i=1}^{n}([Y_i - f(\hat{\beta},T_i)] - \lambda_4\hat{\theta}_1(T_i)])]\hat{\theta}_1(T_i)$$

وبالاشتقاق بالنسبة إلى λ_4
ومساواة المعادلة أعلاه بالصفر

$$-2[\sum_{i=1}^{n}([Y_i - f(\hat{\beta},T_i)] - \lambda_4\hat{\theta}_1(T_i)])]\hat{\theta}_1(T_i) = 0$$

يكون مقدر λ_4 بالشكل الأتي :

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{n^{-1}\sum_{i=1}^{n}[Y_i - f(\hat{\beta},T_i)]\hat{\theta}_1(T_i)}{n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\hat{\theta}_1(T_i)^2} \qquad ...(17)$$

مع ملاحظة إن $\sum_{i=1}^{n}\hat{\theta}_1(T_i)^2 \neq 0$

3- الجانب التجريبي:

تم تنفيذ عددا من تجارب المحاكاة لمعايير اختيار أفضل المقدرات ، إذ سوف يتم تطبيق ما تم عرضه في الجانب النظري في المبحث السابق , وفي هذه التجارب تم استخدام ثلاث دوال للانحدار هي :

1- $m_1(X) = X^3$ $\quad X$ ~**N(0,1)**

2- $m_2(X) = Sin(2X) + 2\exp(-16X^2)$ $\quad X$ ~**N(0,1)**

3- $m_3(X) = 1 - X + \exp(-200(X - \frac{1}{2})^2)$ $\quad X$ ~**N(0,1)**

وبافتراض ان **Y** يمثل متغير عشوائي و ان المتغير **X** تم توليدة وفق التوزيع الطبيعي القياسي لذلك تم استعمال الانموذج اللامعلمي لغرض مقارنة المقدرات

$$Y_i = m(X) + \varepsilon_i$$

وقد تم افتراض 3 قيم للخطأ هي (0.25 , 0.5 ,1) وان الخطأ يتوزع طبيعيا $\varepsilon_i \sim N(0,\sigma^2)$ ، وان تجارب المحاكاة المنفذة تمت باستخدام ثلاث إحجام للعينات هي $(n = 50,100,150)$ وبتكرارات $(Replicates = 500)$ لكل تجربة محاكاة .. علما ان تفسير الرموز في جدول (1) كالأتي :

LLS مقدر **Local linear smoother**
OLS مقدر **Multiple regression**
B&C مقدر **Burman and Chaudhuri**
Woo مقدر **Wooldridge**
F&U مقدر **Fan &Ullah**
Suggest المقدر المقترح

جدول رقم (1)

يبين معدل متوسط مربعات الخطأ للمقدرات المذكورة انفا مع كون قيم التباين المفروضة للمتغير x تكون (1, 0.5, 0.25) وباحجام عينات (50 ,100 ,150)

Model	n	σ^2	LLS	OLS	B&C	Woo	F&U	Suggest
1	50	0.25	0.0077	0.0049	0.0039	0.0032	0.0036	0.0031
	100		0.0058	0.0026	0.0019	0.0016	0.0017	0.0016
	150		0.0044	0.0017	0.0011	0.0010	0.0010	0.0010
	50	0.5	0.0217	0.0201	0.0147	0.0131	0.0141	0.0120
	100		0.0149	0.0099	0.0072	0.0062	0.0068	0.0058
	150		0.0097	0.0067	0.0048	0.0041	0.0044	0.0040
	50	1	0.0853	0.0814	0.0643	0.0672	0.0623	0.0567
	100		0.0685	0.0413	0.0305	0.0295	0.0295	0.0258
	150		0.0274	0.0269	0.0191	0.0180	0.0185	0.0163
2	50	0.25	0.0324	0.0077	0.0065	0.0054	0.0052	0.0054
	100		0.0171	0.0054	0.0038	0.0036	0.0033	0.0037
	150		0.0161	0.0045	0.0029	0.0029	0.0026	0.0030
	50	0.5	0.0869	0.0216	0.0192	0.0147	0.0154	0.0143
	100		0.0425	0.0130	0.0106	0.0088	0.0087	0.0087
	150		0.0319	0.0093	0.0078	0.0063	0.0063	0.0064
	50	1	0.1666	0.0793	0.0681	0.0523	0.0599	0.0494
	100		0.0872	0.0432	0.0368	0.0296	0.0319	0.0286
	150		0.0632	0.0298	0.0246	0.0198	0.0210	0.0197
3	50	0.25	0.0340	0.0567	0.0228	0.0453	0.0236	0.0523
	100		0.0195	0.0552	0.0190	0.0442	0.0201	0.0519
	150		0.0145	0.0549	0.0160	0.0435	0.0167	0.0518
	50	0.5	0.0494	0.0711	0.0437	0.0580	0.0448	0.0611
	100		0.0326	0.0629	0.0341	0.0513	0.0355	0.0565
	150		0.0257	0.0603	0.0283	0.0487	0.0299	0.0553
	50	1	0.1066	0.1319	0.0962	0.1125	0.0966	0.1040
	100		0.0688	0.0922	0.0655	0.0760	0.0664	0.0761
	150		0.0528	0.0800	0.0542	0.0659	0.0557	0.0673

تفسير نتائج الجانب التجريبي:

الأنموذج الأول:

- أظهرت النتائج إن المقدر المقترح هو أفضل مقدر ولجميع قيم تباين البواقي و أحجام العينات المستخدمة ، يليه مقدر Wooldridge فيما عدا حالة التباين واحد وحجم العينة 100,50 فان المقدر F&U هو أفضل من مقدرWooldridge ، كما يلاحظ انه في حال التباين 0.25 وحجم عينة 100 و150 فان قيم MASE تكون متساوية تقريبا وهذا ما أوضحه الشكل (1).
- يلاحظ انه في حالة تباين البواقي صغير وحجم العينة كبير فان مقدرF&U Wooldridge , والمقدر المقترح تكون MASE متساوية .
- يلاحظ إن أسوأ مقدر هو مقدر الانحدار الخطي الموضعي وذلك لان MASE كان كبير مقارنتا مع بقية المقدرات .
- تناقص قيم MASE مع تزايد حجم العينة ولجميع المقدرات.
- تزايدMASE مع تزايد قيم تباين البواقي.

الأنموذج الثاني:

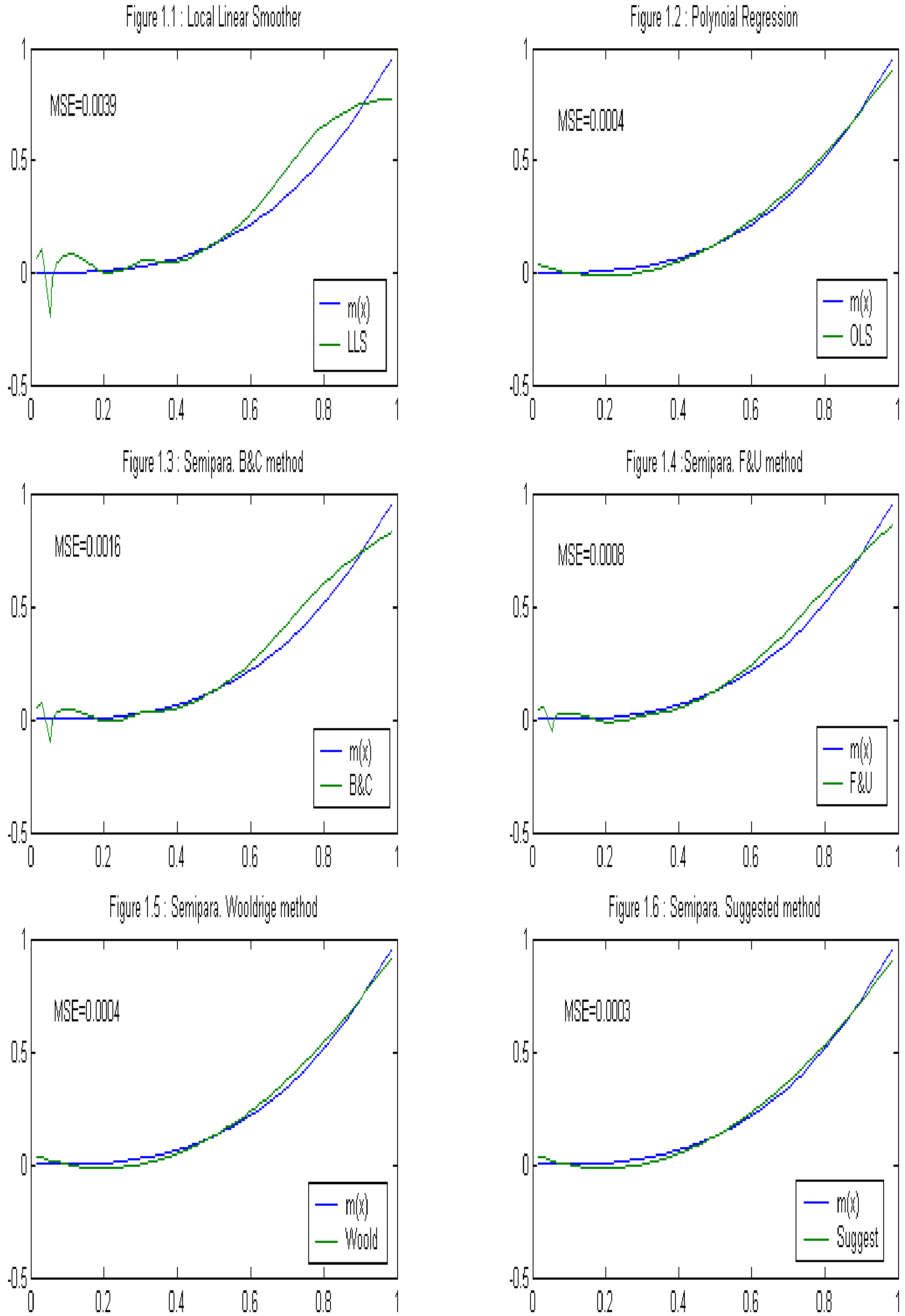
- أظهرت النتائج إن مقدر F&U هو أفضل مقدر في حالة تباين الخطأ 0.25 لجميع إحجام العينات ،يليه مقدر Wooldridge .إما في حالة تباين الأخطاء 0.5 و واحد فان المقدر المقترح هو الأفضل ، يليه مقدر Wooldridge وهذا ما بينه الشكل (2) .عدا حالة التباين 0.5 وحجم عينة 100 فان قيم MASE للمقدرWooldridge والمقدر F&U والمقدر المقترح تكون متقاربة .
- أظهرت النتائج إن أسوأ مقدر كان الانحدار الخطي الموضعي وذلك لان MASE كبير مقارنتا مع بقية المقدرات .
- تناقص قيم MASE مع تزايد حجم العينة ولجميع المقدرات.
- تزايد MASE مع تزايد قيم تباين البواقي.

الأنموذج الثالث:

- أظهرت النتائج وكحالة عامة إن مقدر B&C هو أفضل مقدر لبعض قيم تباين البواقي و أحجام العينات المستخدمة ، يليه المقدر F&U في حالة MASE والشكل (3) يبين ذلك.
- في حالة تباين الخطأ 0.25 و 0.5 وبحجم عينه 150 يلاحظ إن مقدرLLS هو الأفضل .
- أظهرت النتائج إن أسوأ مقدر كان مقدر الانحدار المتعدد وذلك لان MASE كبير مقارنتا مع بقية المقدرات .
- تناقص قيم MASE مع تزايد حجم العينة ولجميع المقدرات.
- تزايد MASE مع تزايد قيم تباين البواقي.

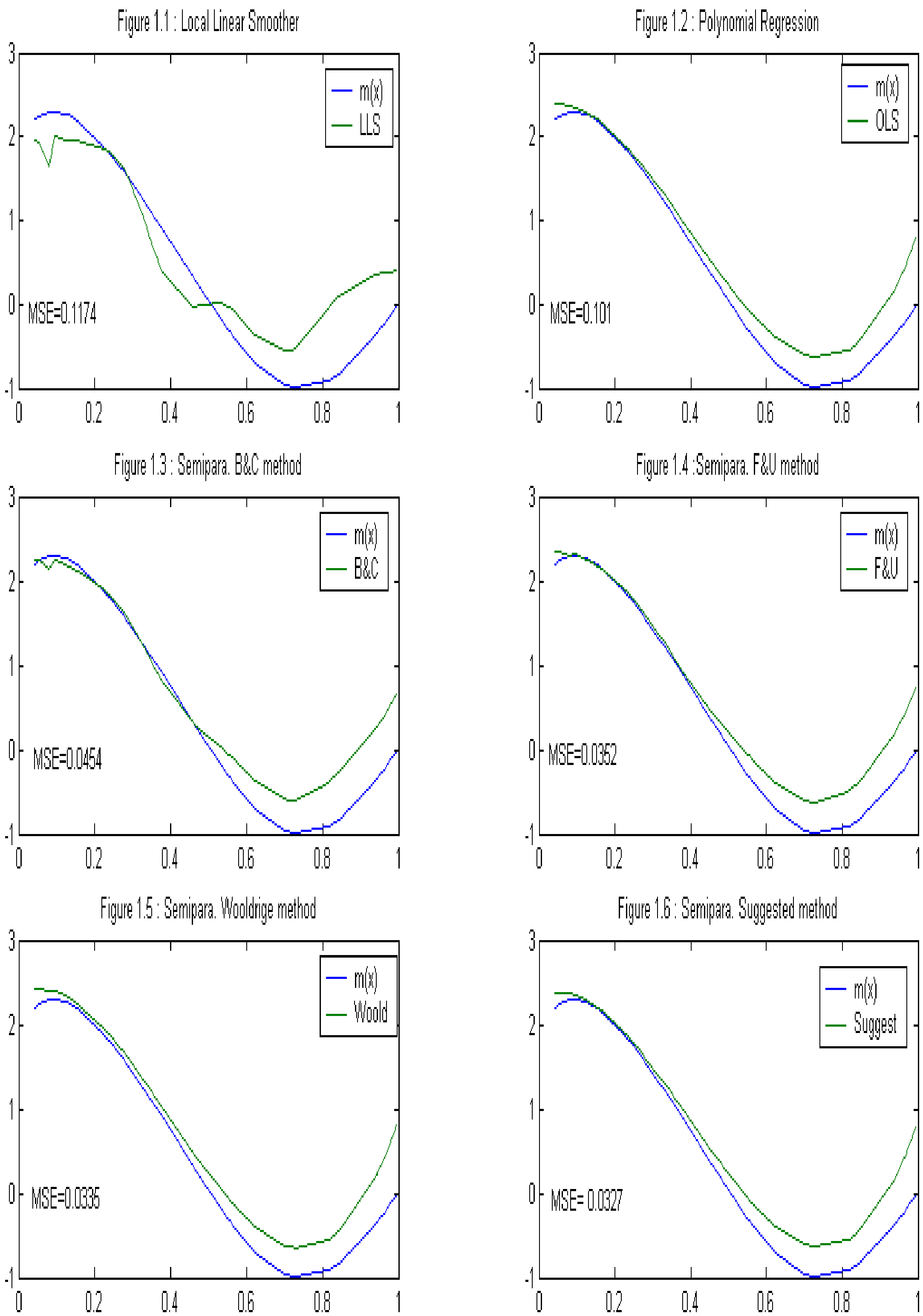
شكل (1)

يشير إلى المقدرات المعملية اللامعلميه وشبه المعلميه عند استعمال الأنموذج الأول ولحجم عينة 100

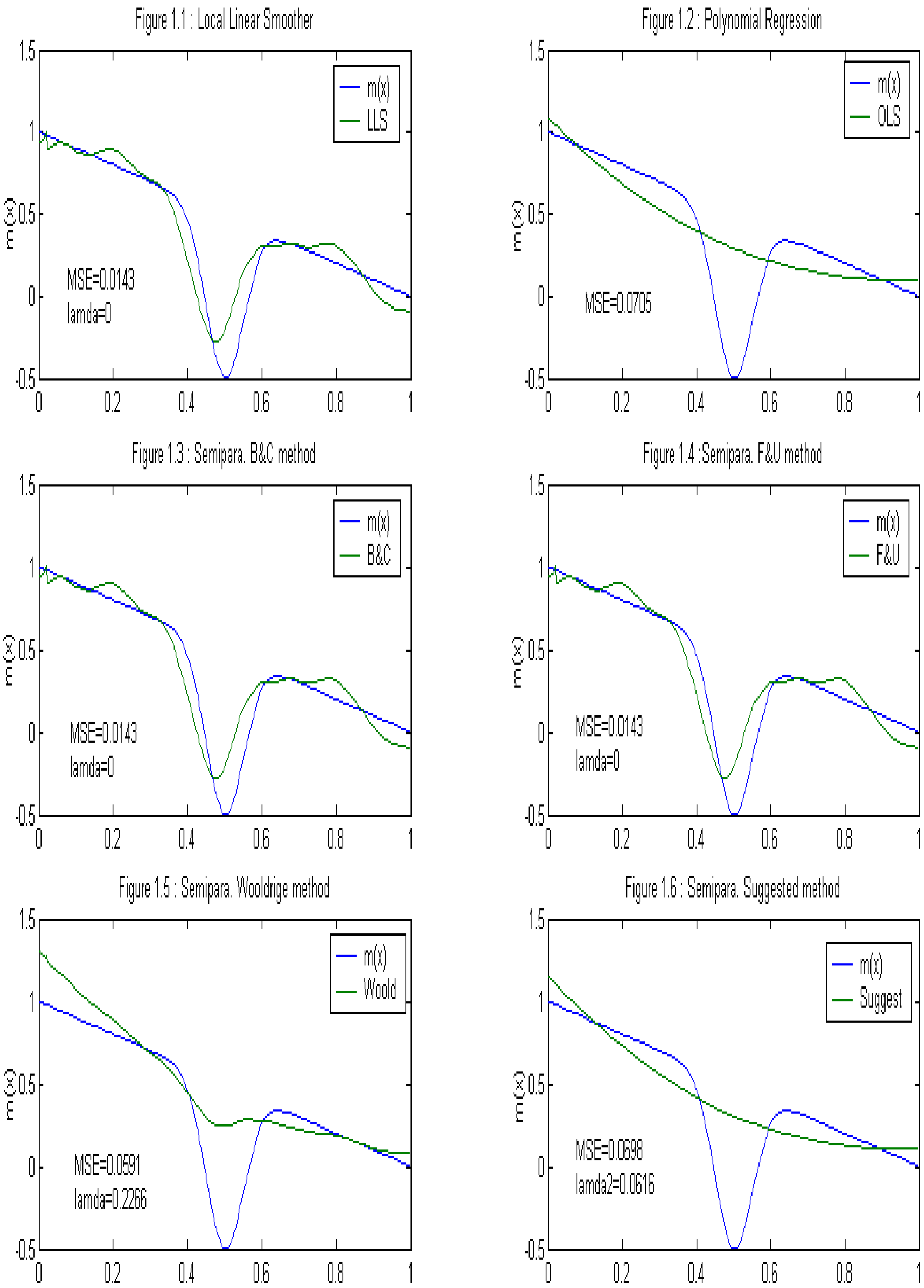


وتباين خطأ(0.25)

شكل(2)
يشير إلى المقدرات المعلميه واللامعلميه وشبه المعلميه عند استعمال الأنموذج الثاني ولحجم عينة 50 وتباين خطأ (1)



شكل (3)
يشير إلى المقدرات المعلميه واللامعلميه وشبه المعلميه عند استعمال الأنموذج الثالث ولحجم عينة 150 وتباين خطأ (0.5)



4- الاستنتاجات:

بناءا على ما تم تحليله من نتائج المحاكاة وفقا لكل أنموذج من نماذج الانحدار اللامعلمي ولجميع الحالات الأخرى تم التوصل إلى الاستنتاجات الآتية :

لأنموذج الانحدار ألالامعلمي ولجميع الحالات وكحالة عامة تم التوصل إلى الاستنتاجات الآتية:

1. إن قيم MASE تتناسب تناسبا عكسيا مع إحجام العينات و جميع قيم التباين، إي أنها تتناقص عند زيادة إحجام العينات .
2. إن قيم MASE تتناسب تناسبا طرديا مع قيم التباين ، إي أنـها تزداد بزيادة قيم التباين .
3. توسع حجم العينة يجعل من منحنيات المقدرات المستعملة أكثر قربا للمنحنى الحقيقي وذلك لكون المقدرات تتأثر بقلة البيانات وتشتتها .

ألان الاستنتاجات لكل أنموذج من نماذج الانحدار اللامعلمي الخاصة بالأنموذج الأول:

الأنموذج الأول

4. كحالة عامة تبين إن المقدر المقترح هو أفضل مقدر لجميع قيم تباين البواقي و أحجام العينات المستخدمة .

الأنموذج الثاني

5. وكحالة عامة إن المقدر المقترح هو الأفضل في حال قيم التباين متوسطة وكبيرة، إما في حال قيم التباين صغيرة فان مقدر F&U هو الأفضل .

الأنموذج الثالث

6. كحالة عامة تبين إن مقدر B&C هو أفضل مقدر لجميع قيم تباين البواقي و أحجام العينات المستخدمة .

5- التوصيات :

يمكن إجمال التوصيات الآتية على ضوء الاستنتاجات التي توصلنا إليها من خلال هذه الدراسة

1- استعمال المقدر المقترح في الأنموذج الأول عند تطبيق دالة الانحدار اللامعلميه، لأنه يعطي أفضل (MASE) .

2- استعمال المقدر المقترح في الأنموذج الثاني عند تطبيق دالة الانحدار اللامعلميه ، لأنه يعطي أفضل (MASE) .

3- استعمال مقدر Burman and Chaudhuri (B&C) في الأنموذج الثالث عند تطبيق دوال الانحدار اللامعلميه ، لأنه يعطي أفضل (MASE) .

4- استعمال صيغ من الدوال Kernel غير المذكورة في البحث في المقدرات شبه المعلميه وغيرها من الدوال لمعرفة كفاءة المقدرات في أنموذج انحدار.

5- استعمال صيغ من دوال الانحدار اللامعلميه في المقدرات شبه المعلميه مثل Spline و Piecewise لمعرفة كفاءة المقدرات في أنموذج انحدار .

المصـادر:
المصادر العربية

1. حمزة ، سعد كاظم ، (2009) ،"مقارنة بعض الطرائق أللبيه في تقدير نماذج الانحدار أللامعلميه بوجود بيانات تامة وغير تامة "، رسالة ماجستير في الإحصاء ، كلية الإدارة والاقتصاد ، جامعة بغداد .

2. حمود، مناف يوسف، (2000)، "مقارنة مقدرات kernel أللامعلميه لتقدير دوال الانحدار" "،رسالة ماجستير في الإحصاء ، كلية الإدارة والاقتصاد ، جامعة بغداد .

3. حمود، مناف يوسف،(2005)، "مقارنة المقدرات أللامعلميه لتقدير دوال الكثافة الاحتمالية" ، أطروحة دكتوراه في الإحصاء، كلية الإدارة والاقتصاد ، جامعة بغداد .

4. حمود، مناف يوسف ، "مقارنة المقدرات معلميه تمهيدية متغيرة باستخدام مقدرات انحدار خطي موضعي مع تطبيق عملي " .

المصادر الأجنبية :

5. A. Ullah and H. D. Vinod,(1993), General nonparametric regression estimation and testing in econometrics, in ``Handbook of Statistics'' (G. S. Maddala, C. R. Rao, and H. D. Vinod, Eds.), Vol. 11, pp. 85_117.
6. Julian Faraway,(1990)," Implementing Semiparametric Density Estimation " , Statistics & Probability Letters 10- 141-143.
7. Fan. J and Gijbels .I,(1992)," Variable Bandwidth and Local Linear Regression Smoothers" Ann.stst.No-4.pp 2002-2036 .
8. Marlene Muller,(2000)," Semiparametric Extensions to Generalized Linear Models"
9. Mezbahur Rahman, Gokhale, D.V and Ullah, (1997),"A note on combining parametric and non-parametric regression" , Communications in Statistics - Simulation and Computation , 26:2, 519 -529 .
10. Mezbahur Rahman ; D. V. Gokhale ; Aman Ullah ,(1997)," On testimation of a probability density: the normal case" , Communications in Statistics - Theory and Methods,26:2,263 — 278 .
11. Olkin and C. H. Speigelman, (1987), "A semiparametric approach to density estimation" , J. Amer. Statist. Assoc. 82 _858_865.
12. W.Hardle, and Muller, M. (2000)." Multivariate and Semiparametric kernel Regression", in M. G. Schimek (ed.), Smoothing and Regression. Approaches, Computation and Application, Wiley.
13. W. Härdle and Oliver Linton ,(1994)," Applied Nonparametric Methods ", Cowles Foundation For Research In Economics At Yale University .
14. Y. Fan and A. Ullah,(1999), "Asymptotic Normality of a Combined Regression Estimator", Technical Report, University of Windsor.
15. Paul Speckman , (1988) ," Kernel Smoothing in Partial Linear Models " , Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), Vol. 50, No. 3 , pp. 413-436 .
16. Paul H. Kvam and Brani Vidakovic, (2007)," Nonparametric Statistics with Applications to Science and Engineering", A John Wiley & Sons, Inc., Publication.
17. P. M. Robinson, (1988)," Root-N consistent semiparametric regression", Econometrical 56, No. 4, 931_954.