توزيع تحويل لابلاس

أ. سليم اسماعيل الغرابي/ قسم الاحصاء
كلية الادارة والاقتصاد/ جامعة بغداد

أ. صباح هادي عبود/ قسم الاحصاء
كلية الادارة والاقتصاد/ جامعة بغداد

١. المقدمة

يمكن اشتقاق صنف كبير من التوزيعات المستمرة بمعلمة واحدة من تحويل لابلاس لدالة معينة.
لتكن $f(x)$ دالة محددة ومستمرة مقطعياً في اية فترة مغلقة في مجال تعريفها، مجموعة الاعداد الحقيقية الموجبة. ان التكامل المثالي:

$$F(\theta)=\int_0^\infty f(x)e^{-\theta x}dx \qquad \text{....................(1)}$$

متقارب بجميع قيم θ الحقيقية الموجبة ويسمى تحويل لابلاس (Laplace Transform) للدالة $f(x)$ ويكتب بالشكل $F(\theta)=L(f(x))$.
ان تحويل لابلاس هو تحويل خطي كما ان تحويل لابلاس لاية دالة $f(x)$ تحقق الشروط اعلاه، هو دالة وحيدة وبالمقابل فان الدالة $f(x)$ تسمى معكوس تحويل لابلاس للدالة $F(x)$ ونكتب ذلك بالشكل $F(x)=L^{-1}(F(\theta))$ وهو ايضاً دالة وحيدة وتحقق الخاصية الخطية.
لنعرف المتغير العشوائي X بالدالة المثالية:

$$g(x)=f(x)e^{-\theta x}/F(\theta) \qquad \underset{(0,\infty)}{I_{(x)}} \qquad \text{.....................(2)}$$

حيث ان الدوال $f(x)$ ، $F(\theta)$ موجبة، محددة وقابلة للتفاضل يمكن ان نبين بسهولة ان $g(x)$ هي دالة الكثافة الاحتمالية (p.d.f) للمتغير العشوائي المستمر X وعلى هذا الاساس فان صنف المتغيرات العشوائية المستمرة التي تمتلك دالة الكثافة الاحتمالية (٢). تسمى بتصنيف توزيع تحويل لابلاس ويمكن ان نشير اختصاراً لهذا الصنف بالرمز $LTD(\theta,F(\theta))$ حيث ان $F(\theta)$ يمكن ان نسميها بالدالة المولدة للمتغيرات العشوائية التي تنتمي لهذا الصنف. ينتمي لصنف توزيع تحويل لابلاس عدداً كبيراً من التوزيعات المستمرة ومنها بعض التوزيعات الشائعة مثل التوزيع الاسي وتوزيع كاما ويمكن توضيح اسلوب توليد متغيرات عشوائية مستمرة تنتمي لهذا الصنف باختيار مناسب للدالة $F(\theta)$ التي تحقق الشروط الانفة الذكر ولغرض توضيح ذلك نورد الامثلة التالية:

مثال(١) لتكن $F(\theta)=\theta^{-k}$ حيث k ثابت موجب

$$f(x)=L^{-1}(F(\theta)) \qquad , \quad \theta>0$$
$$=L^{-1}(\theta^{-k})=\frac{1}{\sqrt{k}}X^{k-1}$$

اذا يكون لدينا

$$g(x)=\frac{f(x)e^{-\theta x}}{F(\theta)}=\frac{1}{\Gamma(k)}\theta^{k}X^{k-1}e^{-\theta x} \quad ; x>0$$

وهي دالة الكثافة الاحتمالية لمتغير كاما العشوائي بمعلمة θ

$$F(\theta)=e^{-\theta^2/2+k\theta} \quad ,\theta>0$$

مثال(٢) لتكـن

يمكن ان نبرهن بسهولة على صحة ما يلي:

$$L^{-1}\left(e^{-\theta^2/2}\right)=\sqrt{\frac{2}{\Pi}}\; e^{-x^2/2}$$
$$L^{-1}\left(e^{k\theta}.e^{-\theta^2/2}\right)=G(x)=\left|\begin{array}{ll} f(x-k) & ; \chi\ge k \\ o & ; \chi<k\end{array}\right.$$

اذا يكون لدينا

$$L^{-1}\left(e^{-\theta^2/2+k\theta}\right)=\sqrt{\frac{2}{\Pi}}\; e^{-\frac{1}{2}(X-k)^2}$$
$$g(x)=\sqrt{\frac{2}{\Pi}}\; e^{-\frac{1}{2}(X-k)^2+\frac{\theta^2}{2}-k\theta-X\theta}$$
$$=\sqrt{\frac{2}{\Pi}}\; e^{-\frac{1}{2}[(X-k)+\theta]^2}$$
$$=\sqrt{\frac{2}{\Pi}}\; e^{-\frac{1}{2}[X-(k-\theta)]^2}$$

وعليه فان
$$g(y)=\frac{1}{\sqrt{2\Pi}}\; e^{-\frac{1}{2}[y-(X-\theta)]^2}$$

حيث مجال تعريف المتغير y هو مجموعة الاعداد الحقيقية.

ويكون توزيع المتغير العشوائي Y هو التوزيع الطبيعي بوسط $k-\theta$ حيث k ثابت اختياري وتباين يساوي الوحدة.

٢. هدف البحث

يمكن تحديد هدف البحث بالنقاط التالية:

اولاً: اشتقاق بعض القواعد لحساب العزوم وعلاقاتها التكرارية لأي متغير عشوائي يتوزع $LTD(\theta,F(\theta))$.

ثانياً: ايجاد اسلوب لتوليد متغيرات عشوائية تنتمي لصنف توزيع تحويل لابلاس وذلك باستخدام دالة المعدل (Mean Function).

ثالثاً: دراسة بعض خواص مقدر الامكان الاعظم لمعلمة التوزيع.

رابعاً: تميز توزيع تحويل لابلاس في عمليات ماركوف العشوائية.

ان الاهمية النظرية لهذا الصنف تكمن في الشمولية حيث ان ما تم التوصل اليه من القواعد والمبرهنات لتوزيع تحويل لابلاس تكون صحيحة بدون شك لعدد كبير من التوزيعات المستمرة وفي هذا توفير للوقت والجهد للدراسات التي تهتم بموضوع التوزيعات المستمرة وخاصة فيما يتعلق بمواضيع الاستدلال الاحصائي لمعالم هذه التوزيعات.

٣. العزوم والدالة المولدة للعزوم

ليكن X متغير عشوائي يتوزع $LTD(\theta,F(\theta))$. ان الدالة المولدة للعزوم للمتغير العشوائي X هي:

$$M_x(t)=\frac{1}{F(\theta)}\int_o^{\infty} e^{tx}\; g(x)\,dX$$
$$=\frac{F(\theta-t)}{F(\theta)}\quad,\ \theta>t \qquad ....(3)$$

ويكون العزوم حول نقطة الاصل للمتغير العشوائي X:

$$\mu_r'(\theta)=E\left(X^r\right)$$
$$=(-1)^r\,\frac{F^{(r)}(\theta)}{F(\theta)} \qquad ....(4)$$

حيث ان (١) $r=1,2,3,\ldots$

(٢) $F^{(r)}\theta$ **هي المشتقة من الرتبة r للدالة** $F(\theta)$.

بشكل خاص اذا كانت الدوال $m(\theta)$, $V(\theta)$ ترمز لدالتي الوسط والتباين على الترتيب للمتغير العشوائي X فأن

$$m(\theta)=E(X)=-\frac{d}{d\theta}m\,F(\theta) \qquad ....(5)$$

$$\begin{aligned}V(\theta)&=\operatorname{var}(X)\\&=\frac{F''(\theta)}{F(\theta)}-\left(\frac{F'(\theta)}{F(\theta)}\right)^2\\&=-\frac{d}{d\theta}\,m(\theta) \qquad ....(6)\end{aligned}$$

لما كانت

$$\frac{d}{d\theta}\mu_r'(\theta)=(-1)^r\,\frac{F(\theta)\overset{(r+1)}{F}(\theta)-\overset{(r)}{F}(\theta)F'(\theta)}{[F(\theta)]^2}$$

فان العزوم حول نقطة الاصل تحقق العلاقة التكرارية التالية:

$$\mu_{r+1}'(\theta)=-\frac{d}{d\theta}\mu_r'(\theta)+\mu_r'(\theta)\mu_1'(\theta) \qquad ....(7)$$

وباتباع نفس الاسلوب يمكن ان نبرهن ان العزوم حول الوسط تحقق العلاقة التكرارية التالية:

$$\mu_{r+1}(\theta)=-\frac{d}{d\theta}\mu_r(\theta)+r\,\mu_{r-1}(\theta)\mu_2(\theta) \qquad ....(8)$$

اما العزوم العاملية (Factorial Moment) من الرتبة r هي:

$$\begin{aligned}\mu^{[r]}(\theta)&=E\{x(x-1)\ldots[x-(r-1)]\}\\&=\frac{1}{F(\theta)}\int_o^\infty\{x(x-1)\ldots[x-(r-1)]\}f(x)e^{-\theta x}dx\end{aligned}$$

وهي تحقق العلاقة التكرارية الاتية:

$$\mu^{[r+1]}(\theta)=-\frac{d}{d\theta}\mu^{[r]}(\theta)+\mu^{[r]}(\theta)\mu^{[1]}(\theta)-r\mu^{[r]}(\theta) \qquad ....(9)$$

والمتراكمات (Cumul ants) K_r حيث $r=1,2,3,...$ التي هي معاملات $\frac{\neq\gamma}{\gamma`!}$ في مفكوك مكلورين للدالة $\psi_x(t)=\ln M_x(t)$ تعطي بالطريقة التالية:

$$K_{r+1}(\theta) = -\sum_{j=1}^{r} \binom{r-1}{j-1} \mu'_{r-1}(\theta) \frac{dk_j(\theta)}{d\theta}$$
$$= -\sum_{j=2}^{r} \binom{r-1}{j-2} \mu'_{r+1-1}(\theta) K_j(\theta)$$

وهي تحقق العلاقة التكرارية

$$K_{r+1}(\theta) = \frac{d}{d\theta} K_r(\theta)$$

حيث ان $r = 1,2,3,...$

٤. مبرهنة (١)

اذا كان X متغيرعشوائي يتوزع $LTD(\theta, F(\theta))$ **فان**

$$F(\theta) = \exp\{-\int m(\theta) d\theta\}$$

البرهان

$$\because m(\theta) = \frac{-F'(\theta)}{F(\theta)}$$
$$-\int m(\theta) d\theta = \ln F(\theta) - \ln C$$

حيث C ثابت اختياري موجب

$$F(\theta) = C \exp\{-\int m(\theta) d\theta\}$$

بدون فقدان التعميم، افرض ان C =1 نحصل على المطلوب وذلك لان C سوف تختصر عند تعريف دالة الكثافة الاحتمالية g(x) للمتغير العشوائي المستمرX.
يمكن استخدام المبرهنة (١) لغرض توليد متغيرات عشوائية تنتمي الى صنف توزيع لابلاس بشرط ان تحقق دالة المعدل ولتكن $m(\theta)$ **وكما يلي:**

١. $m(\theta)$ **قابلة للتكامل.**
٢. **الدالة** $f(x) = L^{-1}(F(\theta))$ **.**

حيث ان

$$F(\theta) = \exp\left[-\int m(\theta) d\theta\right]$$

لها وجود وموجبة.

مثال(٣)

لتكن

$$m(\theta) = -\frac{\theta^2+1}{\theta(\theta^2-1)} \quad , \quad \theta > 1$$

$$F(\theta) = \exp\left[\int \frac{\theta^2+1}{\theta(\theta^2-1)} d\theta\right]$$

$$= \frac{\theta}{\theta^2-1}$$

$$L^{-1}\left(\frac{\theta}{\theta^2-1}\right) = \cosh X$$

$$g(x) = \left(\frac{\theta^2-1}{\theta}\right)e^{\theta X} \ \cosh\chi \ , \ \chi > 0$$

٥.مقدر الامكان الاعظم

ليكن $\overline{X}$ وسط العينة العشوائية $X_1, X_2, ..., X_N$ المسحوبة من مجتمع يتوزع $LTD(\theta, F(\theta))$.

ان معادلة الامكان الاعظم للمعلمة θ هي

$$N\left[\overline{X} - m(\theta)\right] = 0 \qquad ....(11)$$

وبحل هذه المعادلة نحصل على:

$$\overline{X} = m(\hat{\theta}) \qquad ....(12)$$

وبفرض ان الدالة m لها دالة عكسية فان تقدير الامكان الاعظم $\hat{\theta}$ للمعلمة θ هو

$$\hat{\theta} = m^{-1}(\overline{X}) \qquad ....(13)$$

في حالة كون الدالة m ليس لها دالة عكسية يمكن استخدام احدى الطرائق العددية لحساب $\hat{\theta}$.

مثـال (٤)

لتكن $F(\theta) = \theta^{-k}$ **حيث k ثابت موجب،** $\theta > o$ **اذا يكـون توزيـع المجتمـع هو كاما بمعلمـة k ويكون لدينا:**

$$m(\theta) = \frac{k}{\theta}$$

$$m(\hat{\theta}) = \frac{k}{\hat{\theta}} = \overline{X}$$

$$\hat{\theta} = \frac{k}{\overline{X}} = \frac{kN}{\sum_{i=1}^{N} X_i}$$

٦.مبرهنة (٢)

ليكن X متغير عشوائي مستمر يتوزع:
$LTD(\theta, F(\theta))$ **، عندئذ يكون تقدير الامكان الاعظم للمعلمة** θ **غير متحيز اذا واذا فقط كان تبان X يسوي الوحدة.**

البرهـان

$$V(\theta) = -m(\theta)$$

وبحل المعادلة التفاضلية اعلاه نحصل على:

$$m(\theta) = -\theta + k = E(X)$$

حيث k ثابت اختياري

$$m(\hat{\theta}) = -\hat{\theta} + K = \overline{X}$$

$$\hat{\theta} = K - \overline{X}$$

$$E(\hat{\theta}) = E(K - \overline{X}) = K - E(\overline{X})$$

$$= K - (-\theta + K)$$

$$= \theta$$

اما برهان الاتجاه الاخر فهو مباشرة.

يمكن ان نبين بسهولـة ان تقدير الامكان الاعظم في صنف توزيع تحويل لابلاس يكون غير متحيز فقط للتوزيع الطبيعي بوسط $k - \theta$ **وتباين يساوي الوحدة.**
انظـر مثــال (٢)

مبرهنة (٣)

التباين المحاذي (Asymtitic Varconce) للمقدر $\hat{\theta}$ يعطي بالطريقة التالية:

$$Var\left(\hat{\theta}\right) = -\frac{1}{N\ m'(\theta)}$$

حيث ان

$$m'(\theta) = \frac{d}{d\theta}\ m(\theta)$$

البرهان

$$\ln\ g(\propto) = \ln F(x) - \theta X - \ln\ F(\theta)$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln(\propto) = -X - \frac{F'(\theta)}{F(\theta)}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln g(\propto)\right]^2 = X + 2X\frac{F'(\theta)}{F(\theta)} + \left[\frac{F'(\theta)}{F(\theta)}\right]^2$$

$$E\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln g(\propto)\right]^2 = E\left(X^2\right) + 2\frac{F'(\theta)}{F(\theta)}E(X) + \left[\frac{F'(\theta)}{F(\theta)}\right]^2$$

$$= \frac{F''(\theta)}{F(\theta)} - 2\frac{F'(\theta)}{F(\theta)}.\frac{F'(\theta)}{F(\theta)} + \left[\frac{F'(\theta)}{F(\theta)}\right]^2$$

$$= \frac{F''(\theta)}{F(\theta)} - \left[\frac{F'(\theta)}{F(\theta)}\right]^2 = \mu_2(\theta)$$

$$= -\frac{d}{d\theta}m(\theta)$$

وباستخدام متباينة $Cramer' - Rao$
نحصل على:

$$Var(T) \geq \frac{1}{NE\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln y(k)\right]^2}$$

$$= \frac{1}{N\mu_2(\theta)} = \frac{1}{N\,m'\theta}$$

حيث T أي مقدر غير متحيز للمعلمة θ.

$$\therefore Var\left(\hat{\theta}\right)=-\frac{1}{Nm'(\theta)}$$

بالنسبة للمبرهنة(٣) يمكن الامتداد باتباع نفس الاسلوب أي انه، اذا كانت الدالة $\phi=\propto(\theta)$ هي دالة ١-١ فان مقدر الامكان الاعظم للدالة ϕ هو $\hat{\phi}=\propto\left(\hat{\theta}\right)$ ويكون التباين المحاذي لـ $\hat{\phi}$ يعطي بالطريقة التالية

$$V\left(\hat{\phi}\right)=\frac{-\left(\frac{d\phi}{d\theta}\right)^{2}}{N\mu_{2}(\theta)}$$

٧.تميز توزيع تحويل لابلاس في عمليات ماركوف العشوائية

<u>مبرهنة(٤)</u>

اذا كان X يتوزع $LTD(\theta,F(\theta))$ فان توزيع X هو التوزيع الاسي اذا واذا فقط تحقق ما يأتي

$$P(X>a+b\mid x>a)=P(X>b)$$

حيث ان b,a اعداد حقيقية غير سالبة.

<u>البرهان</u>

$$P(X>a+b\mid X>a)=\frac{P(X>a+b\,and\;X>a)}{P(X>a)}\quad\Rightarrow$$

$$b\geq 0\;\;,X>a+b\Rightarrow X>a$$

$$P(X>a+b|X>a)=\frac{P(X>a+b)}{P(X>a)}$$

$$=\frac{\int_{a+b}^{\infty}\theta e^{-\theta X}\,dX}{\int_{a}^{\infty}\theta e^{-\theta X}\,dX}=e^{-\theta b}$$

$$=P(X>b)$$

$$P(X > a+b) = P(X > a)P(X > b) \qquad \Leftarrow$$

$$(1-G_\theta(a))(1-G_\theta(b)) = 1-G_\theta(a+b)$$

$$G_\theta(a)+G_\theta(b)-G_\theta(a)G_\theta(b) = G_\theta(a+b)$$

$$let \quad a=b$$

$$2G_\theta(a)-[G_\theta(a)]^2 = G_\theta(2a), \forall\, a > o$$

$$where\ G_\theta(a) = P(X < a)$$

$$2G_\theta(X)-[G_\theta(a)]^2 = G_\theta(2X)$$

١

$$2G'_\theta(x)-2G_\theta(x)G'_\theta(x) = 2G'(2x)$$

$$\frac{f(x)-\ e^{-\theta x}}{F(\theta)} - G_\theta(x)\frac{f(x)\ e^{-\theta x}}{F(\theta)} = \frac{f(2x)-\ e^{-2\theta x}}{F(\theta)}$$

$$1-G_\theta(x) = \frac{f(2x)}{f(x)}\ e^{-\theta x}$$

$$-G'_\theta(x) = -\frac{f(2x)}{f(x)}\ \theta e^{-\theta x} + \frac{e^{-\theta x}\ 2f(x)f''(2x)-f(2x)f'(x)}{(f(x))^2}$$

$$q_\theta(x) = \frac{f(2x)}{f(x)}\theta\ e^{-\theta x} - \ e^{-\theta x}, \frac{d}{dx}\left[\frac{f(2x)}{f(x)}\right] \quad ....(*)$$

وبما ان

$$q(x) = f(x)\ e^{-\theta x}/F(\theta)$$

$$\therefore as \quad x \to o \quad , \ q_\theta(x) \to \frac{f(o)}{f(\theta)}$$

ويكون لدينا باستخدام (*)

[*] هذا يعني اذا استغرقنا تواً بعض الزمن في الانتظار فان التوزيع الاقصى لزمن الانتظار هو نفسه توزيع زمن الانتظار الابتدائي وهذه الخاصية اساسية في عمليات ماركوف العشوائية Markow Proceesses والتوزيعات التي تحقق هذه الخاصية يقال انها تحقق خاصية ماركوف.

$$\frac{f(o)}{f(\theta)} = \theta - \frac{f(o)}{f(o)}$$

$$F(\theta) = \frac{f(o)}{\theta - \frac{f'(o)}{f(o)}}$$

بدون فقدان التعميم افرض ان $f(o) = 1$

$$F(\theta) = \frac{1}{\theta - k} \quad where \quad k = f'(o) \geq o$$

$$L\left(e^{kX}\right) = \frac{1}{\theta - k}$$

$$q_\theta(x) = (\theta - k)\ e^{-(\theta - k)}$$

وهو التوزيع الاسي بمعلمة $\theta - k$ **حيث** k **ثابت غير سالب.**

المصادر

١. الجاسم، صباح، د.ظافر حسين رشيد (١٩٩٥) " دراسة لصنف من المتغيرات العشوائية الموجبة المستمرة " .مجلة كلية الادارة والاقتصاد-العدد الرابع –جامعة بغداد.

٢. الجاسم، صباح هادي(١٩٩٦) " المقدر غير المنحاز ذو التباين الاصغر لتوزيع تحويل لابلاس "مجلة كلية الادارة والاقتصاد-جامعة بغداد-(بحث مقبول للنشر).

3. Alexander M.Mood,Franklin A.Graybill and Duane C.Boes (1987). "Intro duction to theory of statistics" Third Edition-McGrow-Hill International Edition.