مقارنة بين الطريقة التقليدية Classical Method وطريقة تحليل الطيف Spectral Analysis لإيجاد ثابت التمهيد التكيفي α_t عند وجود قيم شاذة Outlier Values

م . طاهر ريسان دخيل
قسم الإحصاء
جامعة القادسية

م . م زينب يوسف داود
قسم الإحصاء
الجامعة المستنصرية

الخلاصة

في هذا البحث تم دراسة مقارنة لطريقتين تعنى بإيجاد القيمة المثلى لثابت التمهيد التكيفي α_t والذي يستخدم في طريقة التمهيد الاسي التكيفية **Adaptive Single Exponential smoothing** حيث تمت المقارنة بين طريقة تستخدم مجال الزمن **Time Domain** وطريقة أخرى تستخدم مجال الترددات **Frequency Domain** وذلك عند وجود قيم شاذة **Outlier Value** لنموذج الانحدار الذاتي من الرتبة الأولى **AR(1)** أو نموذج ماركوف **Markov Model** عندما تكون السلسلة مستقرة أو غير مستقرة وعند أحجام عينات مختلفة.

Abstract

In this paper , two method which deal with finding the optimal value for adaptive smoothing constant α_t, are compared .This constant is used in adaptive Single Exponential Smoothing (ASES).
The comparing is between a method uses time domain and another uses frequency domain when the data contain outlier value for autoregressive model of order one AR(1) , or Markov Model, when the time series are stationary and non stationary with deferent samples .

المقدمة Introduction

إن الهدف من السلسلة الزمنية Time Series هو لاكتشاف نمط الظاهرة المدروسة وذلك بتسجيل قيمتها الماضية والتغيرات التي تطرأ عليها خلال الزمن كي تمهد لنا طريق دراسة هذه التغيرات وسيكون بمقدورنا إحصائيا التنبؤ بشكل دقيق ومعرفة المؤثرات التي تؤثر على تطور الظاهرة وتبعاً لكيفية عمل طريقة التنبؤ فأن قسم أو جزء من طرائق التنبؤ بالسلاسل الزمنية يسمى الطرائق التنبؤية التمهيدية Smoothing Forecasting Method وفي هذا النوع يتم تمهيد Smooth أو تنعيم السلسلة الزمنية وذلك باستخدام حد يدعى بحد التمهيد α وحسب نوع التمهيد فانه يمكن تقسيم الطرائق إلى نوعين هما:-

- الطرائق التمهيدية باستخدام حد تمهيد ثابت ، وفي هذه الحالة فان حد التمهيد يكون ثابتاً عند جميع عمليات التنبؤ ، ومن الطرائق التي تستخدم حد تمهيد ثابت ، طريقة التمهيد الاسـي الأحـادية Single Exponential Smoothing وطريقة هولت – ونتر Holt-Winter Method .
- الطرائق التمهيدية باستخدام حد تمهيد متغير وهذه الطرائق هي عكس الطرائق السابقة، وهذا يعني أن حد التمهيد يتغير من فترة إلى فترة أخرى ، ومن الطرائق التي تستخدم حد تمهيد متغير، طريقة التمهيد الاسي الأحادية التكيفية Single Adaptive Exponential Smoothing .

هدف البحث Purpose of Study

يهدف هذا البحث إلى دراسة مقارنة بين الطريقة التقليدية Classical Method وطريقة تحليل الطيف Spectral Analysis باستخدام منفذي Tukey Window و Parzan Window لحساب قيمة ثابت التمهيد التكيفي α_t وذلك عند وجود قيم شاذة Outlier values في نموذج ماركوف Markov Model بغية معرفة أفضلية الطريقتين في حساب التنبؤات المستقبلية وباستخدام سلاسل زمنية مستقرة وغير مستقرة وعند أحجام عينات مختلفة، وقد استخدمت المحاكاة Simulation لتحقيق هذا الغرض .

طريقة التمهيد الأُسي الأحادية التكيفية (ASES) [5][4][3][1]

Adaptive Single Exponential Smoothing

إن طريقة التمهيد الاسي (SES) Single Exponential Smoothing أحد طرائق التنبؤ بالتمهيد الاسي Exponential Smoothing التابعة للسلاسل الزمنية Time Series والتي تعتمد بشكل أساسي على تحديد قيمة ثابت التمهيد α الذي تقع قيمته بين الصفر والواحد ومن ثم التنبؤ باستخدام المعادلة التالية

$$F_{t+1} = \alpha\, x_t + (1-\alpha)\, F_t \cdots\cdots\cdots 1$$

إذ أن $t = 1,2,\ldots\ldots T$

$F_{t+1}\ ,\ F_t$ هي القيم التنبؤية عند الزمن t و $t+1$ على التوالي

x_t هي المشاهدات الحقيقية عند الزمن t

وبالاعتماد على هذه الطريقة فانه يتم اختيار حد ثابت التمهيد α بحيث يكون قيمة ثابتة لكل عمليات التنبؤ التي يتم إجراءها، هذه القيمة الثابتة وحسب رأي هذه الطريقة ستؤثر على قيم متوسطات مربعات الأخطاء MSE مما يعطي تأثيراً واضحاً لهذا الثابت، أما في طريقة التمهيد الاسي الأحادية التكيفية (ASES) فتتعامل مع هذا الحد ليس كثابت وإنما كمتغير يعتمد على دالة معينة والتي تعتمد بدورها على الزمن t ، حيث تفترض هذه الطريقة بان تكون معادلة التنبؤ الخاصة بها كما يلي

$$F_{t+1} = \alpha_t x_t + (1-\alpha_t)\, F_t \cdots\cdots\cdots 2$$

وان جميع الحدود هي كما ذكرت في المعادلة ١

الطريقة التقليدية لحساب α_t [٣][١]

يمكن الحصول على α_t والتي تتطلبها المعادلة رقم ٢ من خلال المعادلة التالية

$$\alpha_{t+1} = \left|\frac{A_t}{M_t}\right| \cdots\cdots\cdots 3$$

إذ أن

$$A_t = \beta e_t + (1-\beta)\, A_{t-1} \cdots\cdots\cdots 4$$

$$M_t = \beta \left| e_t \right| + (1-\beta)\, M_{t-1} \cdots\cdots\cdots 5$$

$$e_t = x_t - F_t$$

إذ أن β ثابت تقع قيمته بين الصفر والواحد الصحيح .

ونلاحظ من خلال المعادلتين ٤ و ٥ أن هناك قيم ابتدائية يجب الحصول عليها كي يتم البدء باستخدام هذه الطريقة ، لذلك يمكن أن تعطى القيم الأولية التالية وعندما يكون t =1

$$F_{t+1} = F_{1+1} = F_2 = x_1$$

هذا يعني أن القيمة الأولية للتنبؤ عند الفترة $t+1=2$ يمكن أن تكون القيمة الحقيقية للمشاهدة الأولى x_1.

أما قيم α_i الأولية i=1,2,3,4 فيمكن أن تعطى مساوية إلى قيمة الثابت β فلو كان $\beta = 0.4$ فان $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \beta = 0.4$ أما قيم A_1 و M_1 الأولية فيمكن وضعها مساوية إلى الصفر والواحد على التوالي.

طريقة الطيف لحساب α_t α_t Spectral Method For [٦][٢]

لقد أقترح الباحثان Shapiro وRao عام ١٩٧٠ طريقة لحساب ثابت التمهيد التكيفي α_t حيث تعتمد هذه الطريقة على دالة الطيف Spectral Function ،فعلى فرض أن x_t و $t = 1,2,\cdots,T$ هي سلسلة زمنية، إذ يمكن تعريف دالة كثافة الطيف كالآتي

$$f_x(w) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k \quad e^{iwk} \cdots\cdots\cdots 6$$

γ_k هي دالة التباين المشترك ل x_t

w هي التردد والتي تقع ضمن الفترة $(0,\pi)$

T طول السلسلة الزمنية

وعلى فرض أن السلسلة الزمنية x_t مستقرة فان المقدر للطيف يمكن أن يكون بالشكل الأتي

$$\hat{f}_x(w) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=-M}^{M}\lambda_k C_k\ e^{iwk}\cdots\cdots\cdots 7$$

إذ أن

C_k هي دالة التباين المشترك ل x_t

λ_k هي المنفذ Window الذي يتم اختياره بشكل مناسب

وان $M < T$ تسمى نقطة البتر Truncation Point

أما إذا كانت x_t غير مستقرة فان الطيف يمكن أن يقدر داخل كل منفذ Window متراكب .

وإذا افترض أن السلسلة الزمنية مستقرة في كل منفذ Window وبطول ثابت على سبيل المثال إذا كانت السلسلة الزمنية x_t ، t = 1,2,...T حيث أن T = 60 وتم اخذ q = 15 من المنافذ، إذن سيكون كل منفذ يحتوي على T - q + 1= 46 من المشاهدات ، ويقدر الطيف لكل من $x_1, x_2, \cdots, x_{46}$ و $x_2, x_3, \cdots, x_{47}$ والى أن نصل إلى $x_{15}, x_{16}, \cdots, x_{60}$ ولكل منفذ من هذه المنافذ سوف يقدر الطيف عند مجموعة من الترددات والذي يكون نصف عدد البيانات.

وحسب رأي Shapiro و Rao فان التغيرات في تركيب السلسلة الزمنية سيكون واضحا من خلال الفروقات في القيم المطلقة للوغاريتم الأطياف المتتابعة وهذا يعني $\left|\ln\ \hat{f}_t(w_k) - \ln\ \hat{f}_{t+1}(w_k)\right|$ وفي أدناه الآلية التي استخدمها Shapiro و Rao عام 1970 حيث تم استخراج الأوساط المتحركة لثلاثة قيم من $\ln\ \hat{f}_t(w_k)$ وكالاتي

$$\delta_{tk} = \frac{1}{3}\left[\ln\ \hat{f}_{t-2}(w_k) + \ln\ \hat{f}_{t-1}(w_k) + \ln\ \hat{f}_t(w_k)\right] - \ln\ \hat{f}_t(w_k)\cdots\cdots\cdots 8$$

ومن ثم يتم اختيار القيمة الأكبر من قيم تمهيد الطيف وبغض النظر عن الإشارة أي أن

$$\Delta t = Max_k\left|\delta_{tk}\right|\cdots\cdots\cdots 9$$

فإذا كانت قيمة Δt صغيرة بالمقارنة مع الانحراف المعياري الخاص بها فان هذا يتضمن بأنه لا تظهر تغيرات واضحة في تركيب السلسلة الزمنية وبالتالي فان القيمة الواطئة من ثابت التمهيد الأفضل.

أما إذا كانت قيمة Δt كبيرة بالمقارنة مع الانحراف المعياري الخاص بها فان قيمة ثابت التمهيد التكيفي يجب أن تزداد تصاعدياً نحو الواحد ، وقد استخدم Shapiro وRao الطريقة التالية لتحديد قيمة ثابت التمهيد التكيفي α_t

$$\beta_t = b + c\,(\Delta t/\sigma)^2\cdots\cdots\cdots 10$$

إذ أن

σ هو الانحراف المعياري ل δ_{tk}

c, b تحدد من الشرطين التاليين

$$b + r_1^{\ 2}c = 0.67 \quad \text{و} \quad b + r_2^{\ 2}c = 0.095$$

بحيث أن

$$\alpha_t = Max\left[0.1, Min\left(\exp(\beta_t) - 1\right), 1\right]\cdots\cdots\cdots 11$$

r_1 تمثل قيمة $\frac{\Delta t}{\sigma}$ التي ترفع التغير في α_t نحو ٠.٩٥.

r_2 تمثل قيمة $\frac{\Delta t}{\sigma}$ التي تبقي α_t عند ٠.١.

بحيث يتم اختيار r_2, r_1 بالاعتماد على التوزيع التقريبي لـ Δt

فقد اثبت كل من Shapiro وRao عام ١٩٧٠ أن

$$p(\Delta t < \chi) = Exp\left(-n\ P(|\delta_{tk}| > \chi)\right) \cdots\cdots\cdots 12$$

حيث أن χ هو جذر المقدار χ^2

وان n هو عدد نقاط التردد في كل منفذ وبما أن $\ln \hat{f}_t(w_k)$ يتوزع توزيع طبيعي تقريبي، إذ يكون δ_{tk} والذي يمثل التركيبة الخطية لقيم $\ln \hat{f}_t(w_k)$ هو أيضاً يتوزع توزيع طبيعي تقريبي، وان المقدار $\frac{\delta_{tk}^2}{\sigma^2}$ يتوزع توزيع مربع كاي تقريبي بدرجة حرية واحدة .

ولإيجاد قيمة χ بحيث أن $P(\Delta t < \chi) = 0.99$ فانه يمكن الملاحظة من معادلة رقم ١٢ أن

$$P\left(|\delta_{tk}| > \chi\right) = \frac{-\ln(0.99)}{n} \cdots\cdots\cdots 13$$

وهذا يتضمن أن

$$P\left[\frac{\delta_{tk}^2}{\sigma^2} > \frac{\chi^2}{\sigma^2}\right] = \frac{-\ln(0.99)}{n} \cdots\cdots\cdots 14$$

إذ يمكن تحديد قيمة مربع كاي وذلك بالاعتماد على قيمة n .

ومن هنا فانه يتم اختيار r_1 لتمثل النقطة $\frac{\chi}{\sigma}$ وهذا يعني بان α_t ستبدأ بـ ٠.٩٥ عندما $P(\Delta t < \chi) = 0.99$.

أما r_2 فيتم اختيارها اقل من $\frac{\chi}{\sigma}$ والتي تبقى α_t عند ٠.١ عندما $P(\Delta_t > \chi) = 0.99$.

كذلك يمكن كتابة المعادلة التالية من خلال المعادلة رقم ١٢

$$P\left(|\delta_{tk}| > \chi\right) = \frac{-\ln(0.01)}{n} \cdots\cdots\cdots 15$$

ومن هنا فان r_2 هي أدنى من $\frac{\chi}{\sigma}$ بحيث أن

$$P\left(\frac{\delta_{tk}^2}{\sigma^2} > \frac{\chi^2}{\sigma^2}\right) = \frac{-\ln(0.01)}{n} \cdots\cdots\cdots 16$$

ويمكن اختيار عدد نقاط الترددات بحيث أن

$$0 \le \frac{-\ln(0.99)}{n} \le 1 \qquad , \qquad 0 \le \frac{-\ln(0.01)}{n} \le 1$$

وبعد تحديد قيمة α_t من خلال المعادلة رقم ١١ فانه يمكن إيجاد التنبؤ التمهيدي الاسي التكيفي ل x_{t+1} وحسب المعادلة التالية

$$F_{t+1} = \alpha_t x_t + (1-\alpha_t)F_t$$

إذ أن

$t \ge 1$ ، $F_1 = x_1$

منافذ الطيف Spectral Windows [٧][١]

لقد رأينا من خلال المعادلة الطيفية Spectral Function والموصوفة في المعادلة رقم ٧ بأنها تتطلب حساب ما يسمى بالمنفذ Window والذي هو ببساطة عبارة عن مجموعة من الأوزان يتم اختيارها وفق دوال مقترحة من قبل بعض الباحثين . وسيتم شرح منفذين فقط وهما اللذان استخدما في هذا البحث وهما :-

* منفذ Tukey (Tukey Window) ، حيث يمكن تمثيل هذا المنفذ ضمن دالة وبالشكل الآتي

$$\lambda_k = \frac{1}{2}\left(1+\cos\left(\frac{\pi k}{M}\right)\right) \qquad k = 0,1,\cdots M \qquad \cdots\cdots\cdots 17$$

* منفذ Parzen (Parzen Window) حيث يمكن تمثيل هذا المنفذ ضمن دالة وبالشكل التالي

$$\lambda_k = \begin{cases} 1-6\left(\frac{k}{M}\right)^2+6\left(\frac{k}{M}\right)^3 & 0 \le k \le \frac{M}{2} \\ 2\left(1-k/M\right)^3 & M/2 \le k \le M \end{cases} \cdots\cdots\cdots 18$$

وان M تسمى نقطة البتر Truncation Point ويتم اختيارها بشكل مناسب بحيث يجب أن لا تكون صغيرة وبالتالي فان الخصائص المهمة ل $f(w)$ يمكن أن تختفي ولا أن تكون كبيرة جداً بحيث لا يصبح هناك داعي لاستخدام دالة الطيف Spectral Function لعدم تأثير التمهيد لهذه الدالة

لقد اقترح الباحث C.Chatfield أن يتم اختيار نقطة البتر بحيث تكون $M = 2\sqrt{n}$

المحاكاة Simulation

لقد تم استخدام المحاكاة لغرض إيجاد قيم MSE وذلك بعد إيجاد التنبؤات لسلاسل زمنية مستقرة متمثلة بقيم $\phi = 0.1, 0.8$ وغير مستقرة متمثلة بقيم $\phi = 1.1$ وعند أحجام العينات التالية n= 20, 40 ,80 لنموذج الانحدار الذاتي من الرتبة الأولى AR(1) أو نموذج ماركوف Markov Model التالي

$$x_t = \phi\, x_{t-1} + e_t$$

وقد تم تلويث حد الخطأ العشوائي e_t بنسب 10% و 20% من توزيعات متقطعة هي التوزيع المنتظم المتقطع بالمعلمة T والتي تمثل حجم العينة ،وتوزيع بواسون بالمعلمة $\lambda = \frac{1}{3}$ ،والتوزيع الهندسي بالمعلمة $P = 0.3$ وقد تم إعادة التجربة ١٠٠٠ لضمان استقرار النتائج المستحصلة وسوف نشير في تحليل النتائج إلى المصطلحات التالية بالاختصارات المقابلة لها وهي

المختصر	الإشارة إلى
C	الطريقة التقليدية
T	طريقة الطيف باستخدام منفذ Tukey
P	طريقة الطيف باستخدام منفذ Parzen
الحالة الأولى	عندما لا يكون هناك تلوث في البيانات
الحالة الثانية	عند وجود تلوث في البيانات بتوزيع بواسون
الحالة الثالثة	عند وجود تلوث في البيانات بالتوزيع الهندسي
الحالة الرابعة	عند وجود تلوث في البيانات بالتوزيع المنتظم المتقطع

تحليل النتائج Results

١- الحالة الأولى

نلاحظ من خلال جدول رقم (١) في الملاحق والذي يمثل قيم MSE عند عدم وجود تلوث في البيانات بأنه قيم MSE تكون متوازية بصورة عامة عند زيادة حجم العينة ونلاحظ أيضاً أن قيم هذا

المعيار تكون اقل في حالة $\phi = 0.8$. ويمكن ملاحظة أن طريقة الطيف تكون أفضل من الطريقة التقليدية و لكلا المنفذين المستخدمين وذلك عندما تكون السلسلة الزمنية غير مستقرة عندما $\phi = 1.1$ وعندما $\phi = 0.8$ بينما أعطت الطريقة التقليدية قيماً اقل لـMSE في حالة السلسلة الزمنية المستقرة وعندما $\phi = 0.1$.

٢- الحالة الثانية

نلاحظ من خلال الجدول رقم (٢) في الملاحق والذي يمثل قيم MSE عند وجود تلوث في البيانات بنسبة 10% و20% بتوزيع بواسون $\left(\lambda = \frac{1}{3}\right)$ بان التأثر بهذه البيانات الملوثة بدأ واضحاً من خلال ارتفاع قيم MSE بصورة عامة عما كانت عليه عند عدم وجود التلوث ونلاحظ أيضاً انه كلما زادت نسبة التلوث وزاد حجم العينة فان التأثير يكون اكبر .
وقد كانت أفضل الطرق في هذه الحالة هي :-

أ- الطريقة التقليدية عندما تكون السلسلة مستقرة عند $\phi = 0.1$

ب- طريقة الطيف باستخدام منفذ Tukey عندما تكون السلسلة الزمنية غير مستقرة عندما $\phi = 1.1$ وعندما تكون مستقرة عند $\phi = 0.8$.

أيضاً نلاحظ أن تأثير السلسلة المنية الغير مستقرة $\phi = 1.1$ كان أكبر من تأثير السلاسل الزمنية المستقرة .

٣- الحالة الثالثة

توضح نتائج الجدول رقم (٣) في الملاحق والتي تمثل قيم MSE عند وجود تلوث في البيانات بالتوزيع الهندسي $(P = 0.3)$ بان قيم المعيار تزداد أيضاً بزيادة نسبة التلوث وحجم العينة ونلاحظ أيضاً أن :-

أ- الطريقة التقليدية كانت الأفضل عندما $\phi = 0.1$.

ب- طريقة الطيف باستخدام منفذ Tukey كان الأفضل عندما $\phi = 0.8 , 1.1$

وبصورة عامة فان السلسلة الزمنية الغير مستقرة تأثرت أكثر من تأثر السلاسل الزمنية المستقرة بالتلوث في البيانات.

٤- الحالة الرابعة

نلاحظ من خلال الجدول رقم (٤) في الملاحق والذي يمثل قيم MSE عند وجود تلوث في البيانات بالتوزيع المنتظم المتقطع بالمعلمة (T) والتي تمثل حجم العينة بان قيم معيار MSE يزداد عند زيادة نسبة التلوث وزيادة حجم العينة ونلاحظ أيضاً أن

أ- الطريقة التقليدية كانت الأفضل عندما $\phi = 0.1$.

ب- طريقة الطيف باستخدام منفذ Parzen كانت الأفضل عند حجم العينة ٢٠ ولكن طريقة الطيف باستخدام منفذ Tukey تصبح هي الأفضل عند زيادة حجم العينة .

كذلك نلاحظ أن السلسلة الزمنية الغير مستقرة كانت أكثر تأثراً بالقيم الشاذة من بقية الطرائق.

الاستنتاجات

يمكن أن نضع بعض الاستنتاجات من خلال ما تم تحليله وملاحظتة من الجداول الأربعة في الملاحق والتي تمثل قيم MSE عند وجود وعدم وجود تلوث في البيانات ومن هذه الاستنتاجات

١- إن جميع الطرائق المستخدمة تتأثر بصورة كبيرة بالقيم الشاذة في البيانات.

٢- عندما تزداد نسبة التلوث في البيانات يكون له تأثيراً سلبياً على طرائق التنبؤ.
٣- عند زيادة حجم العينة وعند وجود تلوث في البيانات تكون الطرائق متأثرة بهذا التلوث أكثر.
٤- إن أفضل طريقة يمكن استخدامها عند السلسلة الزمنية المستقرة $\phi = 0.1$ هي الطريقة التقليدية .
٥- إن أفضل طريقة يمكن استخدامها في السلسلة الزمنية الغير مستقرة $\phi = 1.1$ وعندما تكون السلسلة الزمنية مستقرة وبالمعلمة $\phi = 0.8$ هي طريقة الطيف باستخدام منفذ Tukey .
٦- إن السلسلة الزمنية الغير مستقرة هي أكثر تأثراً بالقيم الشاذة من السلاسل الزمنية المستقرة ولجميع طرائق التنبؤ المستخدمة .

المصادر Reference

1- Chatfield,C.1984 "The Analysis Of Time Series An Introduction " Chapman an Mall .
2- Elizabeth, A.M.2003 " Using Evolutionary Spectra To Forecast Time Series" Working Paper 4.Monash University .
3- Makridakis,S.,Wheelwright,S.And Hyndman,.R.(1997) "Forecasting Method And Applications Third Edition" John Wiley And Sons, New York.
4- Park, D.,Rilett,L.And Han, G.(1999) " Spectral Basis Neural Network For Real Time - Travel Time Forecasting" , Journal Of Transportation Engineering 125-515.
5- Priestley,M.B.(1965) " Evolutionary Spectra And Non – Stationary Processes" Journal Of The Royal Statistical Society,(B),27, 204 -237.
6- Rao,A.G.And Shapiro, A.(1970). " Adaptive Smoothing Evolutionary Spectra" ,Management Science,17,208 – 281.
7- Wie, W.W.S. (1990) " Time Series Analysis : Univariate And Multivariate Methods" Addison – Wesley Publishing Company Inc.

الملاحق

جدول رقم (١)

ويمثل قيم MSE عند وجود تلوث

Normal (0, 1)

ϕ	الطريقة	n=20	n=40	n=80
0.1	C	233.37	246.54	210.23
	T	252.3	249.7	280.36
	P	259.95	281.37	248.18
0.8	C	149.23	130.41	127.52

	T	126.29	109.38	106.49
	P	136.44	122.74	108.04
1.1	C	254.77	265.67	262.52
	T	196.59	168.05	242.22
	P	159.43	143.65	196.73

جدول رقم (٢)
يمثل قيم MSE عند وجود تلوث بتوزيع
Poisson (1/3)

ϕ	الطريقة	n=20		n=40		n=80	
		نسبة التلوث		نسبة التلوث		نسبة التلوث	
		10%	20%	10%	20%	10%	20%
0.1	C	245.57	264.47	250.88	271.04	278.83	293.49
	T	275.9	307.94	330.58	330.58	351.34	332.26
	P	267.46	284.35	270.45	303.31	294.91	318.45
0.8	C	192.59	220.26	199.05	231.85	206.71	233.24
	T	160.77	183.54	162.57	188.23	172.88	214.47
	P	174.94	209.71	181.21	209.66	189.07	226.96
1.1	C	428	578.57	455.99	633.24	469.09	643.42
	T	261.51	303.72	291.61	334.55	313.38	367.81
	P	273.85	305.97	330.24	355.46	356.57	378.53

جدول رقم (٣)
يمثل قيم MSE عند وجود تلوث في توزيع
Geometric p=0.3

ϕ	الطريقة	n=20		n=40		n=80	
		نسبة التلوث		نسبة التلوث		نسبة التلوث	
		10%	20%	10%	20%	10%	20%
0.1	C	٢٦١.٤٥	٢٧٩.٥٦	٢٦٢.٥١	٣٠٢.٣٩	٢٩١.٣٩	٣٢٦.٢٩
	T	٢٦٩.٣٢	٣٠٩.٨٦	٢٨٠.٧٥	٣٢٣.٣٢	٢٩١.٤٢	٣٣٨
	P	٢٨٥.٢٤	٣٠٥.٩٦	٢٨٥.٥٢	٣٣٠.١٩	٣٢٢.٤٥	٣٥٣.٦٧

0.8	C	١٦٦.٢٩	١٩٥.٧٤	١٨٤.٢٦	٢١٣.٩٢	١٨٩.١٨	٢١٥.٧٥
	T	١٥٣.٢٩	١٦٥.٧١	١٦٣.٣٧	٢٠٦.٢٦	١٧٠.٤٢	١٧٩.٥٨
	P	١٤٥.١٧	١٧١.١٩	١٦٤.٨٤	١٩٤.٦١	١٧٢.٥٧	١٩٧.٧٧
1.1	C	٢٣٤.٩٤	٣٧١.٢٩	٣٨٩.٢٧	٣٩٥.٢٧	٤٤٤.٠٧	٤٥١.٢٥
	T	٢٢٧.٢٦	٢٦١.٩٣	٣٠١.٤٥	٣٦٤.٠٤	٣٧٣.٣٧	٤٣٤.٩٢
	P	٢٢٢.٤٨	٢٦٥.٩٩	٣١٨.٤٩	٣٧٥.٩٢	٣٨١.٠١	٤٣٦.٢٧

جدول رقم (٤)
يمثل قيم MSE عند وجود تلوث في توزيع
Discreet uniform (T)

ϕ	الطريقة	n=20		n=40		n=80	
		نسبة التلوث		نسبة التلوث		نسبة التلوث	
		10%	20%	10%	20%	10%	20%
0.1	C	236.91	295.09	314.33	332.72	382.19	445.1
	T	290.41	397.13	351.02	413.02	432.68	450.65
	P	262.96	315.07	338.53	354.76	397.77	468.15
0.8	C	186.27	258.69	229.28	264.04	329.08	361.04
	T	169.97	249.93	245.92	233.22	300.19	323.78
	P	168.11	236.05	207.43	242.66	300.29	331.87
1.1	C	311.74	314.48	539.85	541.61	595.51	601.75
	T	228.05	314.28	375.15	414.86	425.14	499.78
	P	277.29	284.22	479.53	579.59	504.51	595.19