دراسة حصانة مقدرات بيز التجريبي (الخبري)
Empirical Bayse لنماذج الانحدار الذاتي من الدرجة الأولى

طاهر ريسان دخيل الخاقاني
مدرس مساعد
جامعة القادسية

ايهاب عبد السلام محمود
مدرس مساعد
جامعة الكوفة

الخلاصة

ان عملية التقدير تعد من أهم المراحل التي تمر عملية تحديد واختيار النموذج الملائم وان النموذج يعطي افضل النتائج إذا ما اعتمدت الطرائق الجيدة في تقدير معلماته ،واحدة من تلك الطرائق والتي تعتمد على مبدا كون المعلمة المقدرة تمتلك توزيعا معينا على عكس المبدأ الذي تقوم عليه بقية الطرائق والتي تفترض ان تلك المعالم ثابتة ،هي طريقة بيز.
ان هذه الدراسة تتناول دراسة حصانة مقدرات بيز التجريبي في محاولة لكشف بعض خصائص هذه المقدرات والوصول بالتالي الى نتائج قد تكون ذات قيمة لمن يستخدم هذه الطريقة.

Abstract

Estimation stage is one of most important in process of selecting and identification for fit model, this model gives a best results if the good methods of estimation are depended on, one of those methods is Bayes method for estimation the parameters, it puts an assumption that parameter have a distribution.

This paper studies the robustness of estimators of empirical Bayes to know the properties of those estimators.

المقدمة

ان موضوع السلاسل الزمنية يعد واحد من أهم الركائز الأساسية التي يستند أليها علم الإحصاء ، لما له من دور بارز في مجال التحليل والتقدير الإحصائي، حيث ان الكثير من الدراسات والبحوث تهتم بهذا الجانب وقد سعى العلماء لتطوير نظرياته وقواعده منذ القرن 19 حتى يومنا هذا، كما يعد موضوع التقدير في السلاسل الزمنية من العناصر الأساسية التي تعتمد عليها اغلب الدراسات والتخطيطات المستقبلية ولكل المجالات.

ان طريقة التقدير في نماذج السلاسل الزمنية مثل باقي الجوانب الإحصائي قد تخضع لإحدى المدرستين ،المدرسة الكلاسيكية "Classical School" وهي التي تفترض ان معالم النموذج تتمثل بمعالم غير معلومة يجب تقديرها وفق المعلومات المتاحة، آما المدرسة الثانية فهي المدرسة البيزيه" Bagesian School" وهي التي تفترض ان معالم النموذج متغيرات عشوائية تخضع لتوزيع معين، وان التقدير يعتمد على المعلومات قيد الدراسة وعلى المعلومات الاوليه التي يمكن الحصول عليها من المعالم قيد التقدير ، ولكن في الجانب التطبيقي فان اغلب الأحيان يكون توزيع المعالم مجهول، وعليه فقد استعيض عن ذلك بتحديد التوزيع التكراري لتلك المعلمة،إلا ان ذلك يتطلب مشاهدات عن المعلمة نفسها وهذا قد يتعذر أيضا . لذا فقد برزت أهمية طريقة بيز التجريبية (الخبرية) حيث تعتمد هذه الطريقة على المعلومات ألمتا تيه من المشاهدات نفسها كمعلومات أوليه عن المعلمة المراد تقديرها.

هدف البحث

يهدف هذا البحث الى دراسة مقدرات بيز التجريبيه لنماذج الانحدار الذاتي من الدرجه الأولى {AR (1)} عند خضوع حد الخطأ العشوائي (a_t) الى توزيعات مستمرة مختلفة ولحالات مختلفة من السلاسل الزمنية " مستقره و غير مستقره" وكذلك نموذج المسار العشوائي حيث تم إجراء دراسة تجريبية لأحجام عينات مختلفة صغيره ومتوسطة وكبيره في محاولة للكشف عن خصائص ومميزات المقدرات لمعلمة النموذج وفق تقدير بيز التجريبي.

بعض المفاهيم الأساسية ذات العلاقة بالبحث

يقصد بالسلسلة الزمنية بأنها مجموعه من المشاهدات لقيم ظاهره معينه مقاسه لفترات زمنية محدده ويمكن من خلال السلسلة الزمنية التنبؤ بالقيم المستقبلية للظاهرة المدروسة .

تقسم السلاسل الزمنية الى سلاسل مستقره وغير مستقره حيث يقال للسلسلة الزمنية بأنها مستقره بشكل تام (Strictly Stationary) إذا كان التوزيع المشترك لـــ "X_{t1}, X_{t2} .....X_{tn}" هو نفس التوزيع المشترك لـــ (X_{t1+k}, X_{t2+k},.....X_{tn+k}) حيث ان (k) ثابت حقيقي .

وتكون السلسلة مستقره من الدرجه الأولى إذا كانت التوزيع ثابت ومستقلاً عن الزمن ، وتكون السلسلة مستقرة من الدرجه الثانية (Second Order) أو ضعيفة الاستقرار (Weakly stationary) إذا كان التوقع ثابت ومستقل عن الزمن والتباين ثابت ومستقل عن الزمن ودالة التباين المشترك الذاتي (Auto covariance function)أيضا مستقلة عن الزمن.

نموذج الانحدار الذاتي من الدرجة الأولى

Autoregressive model from first order AR(1)

ان نموذج الانحدار الذاتي يعد من أهم النماذج الإحصائي المعتمدة في موضوع السلاسل الزمنية للتنبؤ بالمستقبل ، وان الصيغة العامة لهذا النموذج من الدرجه P هي :-

$$x_t=\phi_1 x_{t-1}+\phi_2 x_{t-2}+....+\phi_p x_{t-p}+a_t$$

حيث ان :-

a_t :- متغير البواقي وتكون مشاهداته مستقلة عن بعضها البعض ويفترض غالباً خضوعه للتوزيع الطبيعي وعندما تكون (p=1) فان الصيغة في المعادلة أعلاه ستكون كآلاتي :-

$$X_t=\phi_1 X_{t-1}+ a_t$$

وعندئذ سيطلق عليه اسم النموذج من الدرجه الأولى AR (1) أو نموذج ماركوف Markov model آما عملية المسار العشوائي فتمثل غاية عملية ماركوف عندما تقترب قيمة ϕ من الواحد الصحيح حيث ان صيغته هي :-

$$X_t=X_{t-1}+a_t$$

طريقة بيز التجريبية الخبرية Empirical bayes estemate

لقد ابدى الباحثون اهتماماً كبيراً في مسالة ايجاد الطرائق الإحصائي الدقيقه التقدير المعالم العشوائية(أي التي تتغير بتغير الزمن) حيث تلاحظ اغلب التطبيقات العملية هي من هذا النوع حيث يتم اعتماد مشاهدات سابقه لبناء النموذج الإحصائي الملائم مع الأخذ بنظر الاعتبار حالة التغير في المستقبل ،وان طريقة بيز التجريبية (الخبرية) هي واحدة من أهم هذه الطرائق ،ولتوضيح طريقة بيز التجريبية (الخبرية) نفترض ان المعلمة (ϕj) تختلف قيمتها من عينة الى أخرى ،فيتم تحديد التوزيع التكراري لهذه المعلمة من العينات المختلفة المدروسة غير انه في الواقع العملي لا يمكن معاينة ϕj بل ان المتاح هو معاينة المشاهدات للسلسلة الزمنية xj التي تخضع لنموذج معلمته ϕj واذا تم افتراض خضوع ϕj لنموذج معين بالمتوسط (μ) فانه يمكن التعبير عن التوقع اللاحق لـــ (ϕj) عند معرفة (xj) كمتوسط موزون ϕj و (μ) حيث ان (ϕj) يمثل تقدير لـــ(ϕj) وان هذا التقدير اللاحق يمثل تقدير بيز (Bayes estimate) . بما ان (μ) غير معلومة عموما نتيجة لعدم معرفة توزيع ϕj فيتم الاستعاضه عنها بتقدير (μ) من المشاهدات فيدعى التوقع اللاحق عندئذ بتقدير بيز التجريبي (الخبري) وطريقة حسابه هي:-

على افتراض ان المشاهدات(j) xt في السلسلة (j=1,2,3,.....n) عند الزمن (t=1,2,.....T) تتمثل بنموذج ماركوف آلاتي .

$$x_t(j)= \phi j\, x_t(j)+a_t(j)$$

حيث ان :- ϕj معالم النموذج تخضع للتوزيع الطبيعي ، بمتوسط (yB) وتباين γ حيث ان (y متجه التباينات المشتركه).

at(j) : اخطاء النموذج يخضع للتوزيع الطبيعي بمتوسط (صفر) وتباين (σ^2) ويتم تقدير معالم النموذج بالخطوات التالية:-

$$\xi j = \sigma^2 + \gamma^2 \sum x_{t-1}^2(j)$$

وبافتراض ان σ^2، γ^2 معلومة فيكون

$$\hat{\mu}_n = \frac{\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} x_t(j)x_{t-1}(j) / \xi j}{\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} x_{t-1}^2(j) / \xi j}$$

$$\xi = \sigma^2 + \gamma^2 \sum_{t=1}^{T} x_{t-1}^2(n+1)$$

$$\phi = \frac{\sum_{1}^{T} x_{S}^{t-1}(u+1)}{\sum_{1}^{T} x^{t}(u+1)x^{t-1}(u+1)}$$

$$B = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_S^2} \hat{\mu}_u + (1 - \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_S^2})\phi$$

حيث ان (B) هو تقدير بيز التجريبي (الخبري) للمعلمه (ϕj) لنموذج الانحدار الذاتي من الدرجه الأولى AR(1)

المحاكاة Simulation

ان اسلوب المحاكاة (simulation) هو الوسيلة الفعالة لدراسة كفاءة الكثير من الاختبارت والتحليلات الاحصائية حيث يتعذر في كثير من الاحيان الحصول على بيانات دقيقة وخالية من الاخطاء ، ولان أهمية الدراسات تعتمد على مدى دقة البيانات المدروسة ، لذا فقد اهتم الباحثون بهذا المجال وتم تطويره مع تطوير سرعة الحاسب وكفاءته الذي ساعد على اداء اسلوب المحاكاة بصورة اسرع واسهل للحصول على بيانات دقيقة وسليمة وخاضعة لاي توزيع وحسب الرغبة
سيتم في هذا الجانب توليد متغيرات الاخطاء العشوائية at والخاضعة للتوزيعات التالية (Lognormul , Normul , Expontiol ,Gamma) ومنها يتم ايجاد متغير السلسلة (Xt) ومن ثم اتباع طريقة بيز التجريبية (الخبرية) لتقدير معالم نموذج الانحدار الذاتي ((AR(1) وكما ذكرت في الجانب النظري ، واعتماد (MSE) كمعيار للمقارنه .

وصف تجربة المحاكاة

سيتم في هذه التجربه دراسة حصانة مقدرات بيز التجريبية (الخبرية) لتقدير معلمة نموذج الانحدار الذاتي من الدرجه الأولى ((AR(1) وللتوزيعات ,(Normal, Lognormal Expoonential,Gamma) وفق الافتراضات الاتيه :-

1- تم افتراض عدة قيم لمعلمة نموذج ماركوف منها ما تجعل السلسلة مستقره (ϕ =0.8,0.1,-0.8,-0.1) ومنها ما تجعل السلسلة غير مستقرة (ϕ=1.1,-1.1) ومنها ما يجعل السلسلة ذات نموذج مسار عشوائي عندما (ϕ=1) .
2- تم افتراض حجوم عينات مختلفة منها ما هو صغير (T= 10,20) ومنها ما هو متوسط (T=50) ومنها ما هو كبير (T=100)
3- تم افتراض عدد سلاسل خبرية مختلفة (n=1,3,7,10)

وتم اعتماد (MSE) كمعيار للمقارنه بين النتائج .

تحليل النتائج

تحليل النتائج للتوزيع الطبيعي (Normal)

نلاحظ من خلال الجدول (1) ان هنالك ثبوتاً نسبياً لقيم المتوسط (MSE) ولجميع أنواع السلاسل الزمنية عند زيادة حجم العينه ولم تظهر الإشارة الموجبة أو السالبة لمعلمة النموذج أي تأثيرا على قيمة (MSE)

تحليل نتائج للتوزيع اللوغارتيمي (Log normal)

نلاحظ من خلال الجدول (2) ان هنالك تذبذباً بسيطاً في قيم (MSE) بازدياد حجم العينه للتوزيع الطبيعي LOG NORMAL)) بالنسبه للسلاسل الزمنية غير المستقرة بينما السلاسل الزمنية المستقرة نلاحظ قيمة (MSE) تزداد بشكل بسيط عند زيادة حجم العينه .ونلاحظ أيضا بان السلاسل الزمنية المستقرة ذات إشارة المعلمة السالبه تعطي (MSE) اقل من المعلمة التي تحمل الاشارة الموجبه بينما نلاحظ العكس في السلاسل الزمنية غير المستقرة .

تحليل النتائج للتوزيع الاسي(Exponentil)

نلاحظ من خلال الجدول (3) ان سلوك قيم (MSE) بالنسبه لهذا التوزيع تقارب السلوك في التوزيع الطبيعي ولجميع أنواع السلاسل الزمنية عند زيادة حجم العينه نرى هنالك ثبوتاً لقيم المتوسط (MSE) ولم تظهر الاشاره الموجبه أو الاشارة السالبه لمعلمة النموذج أي تأثيرا على قيمة(MSE) .

تحليل النتائج لتوزيع (Gamma)

نلاحظ من خلال الجدول (4) ان قيم (MSE) تكون عاليه مقارنةً بالتوزيعات الباقية وعلى العموم نلاحظ ان هنالك تناقصاً كبيراً في قيم (MSE) وذلك عند زيادة حجم العينه. بالنسبه للسلاسل الزمنية المستقرة ونموذج المسار العشوائي بينما نلاحظ العكس في السلاسل الزمنية غير المستقرة حيث نلاحظ ان لقيم (MSE) تزداد بزيادة حجم العينه .

الاستنتاجات

1- نستنتج من خلال الدراسة بان توزيع الطبيعي يمتلك أفضليه كون قيم (MSE) تعطي اقل القيم من بين التوزيعات الباقيه يليه التوزيع الاسي واللوغارتيم الطبيعي ثم توزيع كاما.
2- ان اكبر قيم (MSE) هي عند توزيع كاما (GAMMA) مقارنةً بالتوزيعات الباقيه
3- لم نلاحظ ان هنالك تاثير للشارة السالبه والموجبه لقيم المعالم بالنسبه للتوزيعات " الطبيعي LOG ، والاسي " بينما ظهر تاثير للاشارة الموجبه والسالبه في توزيع (Gamma) .
4- نلاحظ ان قيم (MSE) تقل بازدياد عدد السلاسل الخبرية ولجميع التوزيعات المستخدمه.

التوصيات

1- نوصي باستخدام طريقة بيز التجريبي عندما يتبع توزيع الخطأ توزيعات "اللوغارتيم الطبيعي والتوزيع الاسي" بينما لا نوي باستخدام طريقة بيز التجريبي عند خضوعه لتوزيع كاما Gamma.
2- نوصي بزيادة المعلومات خبريه من خلال اخذ سلاسل زمنية خبريه مسبقة اكثر ما يمكن.
3- نوصي باستخدام الطريقة " طريقة بز التجريبي" في حالة كون إشارة المعالم المقدرة سالبه أو موجبة وللتوزيعات التي أوصينا باتباع الطريقة ضمتها .

جدول رقم (1)
ويمثل نتائج التوزيع الطبيعي

n	ϕ T	10	20	50	100
1	-0.8	0.884	0.9572	0.9968	0.9962
	-0.1	0.9107	0.9653	0.9826	1.0009
	0.1	0.9119	0.9743	0.9918	0.9967
	0.8	0.908	0.9511	0.997	0.9976
	1	0.8862	0.9478	0.9851	0.9914
	-1.1	0.8988	0.9287	0.9799	0.9848
	1.1	0.8879	0.933	0.9732	0.9971
3	-0.8	0.3069	0.3212	0.3294	0.3319
	-0.1	0.3115	0.3174	0.3318	0.3305
	0.1	0.2998	0.313	0.3282	0.3324
	0.8	0.3051	0.3238	0.3306	0.3278
	1	0.3128	0.3258	0.3276	0.3299
	-1.1	0.3015	0.3103	0.3246	0.3264
	1.1	0.2932	0.3188	0.3261	0.3365
7	-0.8	0.1269	0.1378	0.1396	0.144
	-0.1	0.1294	0.1416	0.1417	0.143
	0.1	0.1321	0.1342	0.1414	0.1426
	0.8	0.1342	0.134	0.141	0.1425
	1	0.1287	0.1324	0.1418	0.1418
	-1.1	0.1249	0.1325	0.1381	0.1425
	1.1	0.1272	0.1353	0.141	0.142
10	-0.8	0.0905	0.0961	0.0999	0.1001
	-0.1	0.0931	0.0978	0.0982	0.0996
	0.1	0.0912	0.0962	0.0981	0.1
	0.8	0.0881	0.0961	0.0922	0.0995
	1	0.0912	0.0959	0.0984	0.099
	-1.1	0.082	0.093	0.0979	0.0987
	1.1	0.0867	0.093	0.0968	0.0992

جدول رقم (2)

ويمثل نتائج التوزيع اللوغارتمي الطبيعي

n	ϕ T	10	20	50	100
1	-0.8	2.7901	3.1784	3.0923	3.4039
	-0.1	5.2844	3.1967	3.6448	3.5531
	0.1	3.5734	4.1705	4.0366	3.8313
	0.8	3.077	3.3583	3.2496	3.1002
	1	2.92522	3.1225	3.1736	3.1803
	-1.1	3.5904	3.6922	3.5504	3.5504
	1.1	3	3.5929	3.9287	3.5589
3	-0.8	1.2264	1.1275	1.0768	1.0323
	-0.1	1.1751	1.1898	1.2284	1.2889
	0.1	1.2582	1.2851	1.2907	1.2433
	0.8	1.1037	1.102	1.0623	1.1072
	1	1.2999	1.2034	1.2698	3.1803
	-1.1	1.0732	1.1481	1.1412	1.1412
	1.1	1.4081	1.2556	1.0837	1.1439
7	-0.8	0.5242	0.4305	0.4724	0.4473
	-0.1	0.6843	0.5488	0.4803	0.5221
	0.1	0.5183	0.4864	0.5228	0.5396
	0.8	0.4558	0.4991	0.48	0.4765
	1	0.299	0.4991	0.4611	0.4426
	-1.1	0.3798	0.4914	0.525	0.525
	1.1	0.4373	0.4584	0.4924	0.4831
10	-0.8	0.3115	0.3678	0.4088	0.3299
	-0.1	0.386	0.4519	0.3746	0.3711
	0.1	0.4173	3.4528	0.3681	0.3596
	0.8	0.299	0.371	0.3543	0.5128
	1	0.394	0.3525	0.3042	0.3241
	-1.1	0.3773	0.3027	0.3389	0.3389
	1.1	0.2754	0.3166	0.3449	0.3629

جدول رقم (3)
ويمثل نتائج التوزيع الأسى

n	ϕ T	10	20	50	100
1	-0.8	1.7082	1.8436	1.8142	1.9012
	-0.1	1.5059	1.4963	1.513	1.5461
	0.1	1.208	1.4692	1.4666	1.1446
	0.8	1.2084	1.4717	1.1063	1.1334
	1	1.2626	1.3098	1.2678	1.2248
	-1.1	1.7724	1.8118	1.9533	1.9622
	1.1	0.1408	1.416	1.1583	1.7778
3	-0.8	0.6164	0.5231	0.6113	0.6282
	-0.1	0.4970	0.4891	0.4988	0.5138
	0.1	0.48	0.481	1.4666	0.4791
	0.8	0.4835	0.4	0.476	0.3692
	1	0.4155	0.4355	0.4766	0.4285
	-1.1	0.5869	0.637	0.6559	0.6633
	1.1	0.4444	0.4668	0.5271	0.6047
7	-0.8	0.2229	0.2571	0.2675	0.2736
	-0.1	0.2033	0.2108	0.2192	0.2196
	0.1	0.2122	0.2093	0.205	0.2026
	0.8	0.1834	0.1656	0.2048	0.1606
	1	0.1812	0.1823	0.1807	0.1805
	-1.1	0.2531	0.2668	0.2811	0.2808
	1.1	0.8306	0.1973	0.2265	0.2525
10	-0.8	0.1678	0.1455	0.1877	0.1917
	-0.1	0.157	0.1558	0.1529	0.1543
	0.1	0.1472	0.1489	0.1428	0.1454
	0.8	0.1294	0.1656	0.1125	0.1109
	1	0.1305	1.3043	0.1256	0.127
	-1.1	0.167	0.1846	0.1929	0.1977
	1.1	0.1408	0.1393	0.1595	0.1793

جدول رقم (4)
ويمثل نتائج توزيع كاما

n	ϕ T	10	20	50	100
1	-0.8	24162	10513	6057	4595
	-0.1	9185	4686	2090	1815
	0.1	8593	4818	2078	1235
	0.8	18884	10404	4994	3147
	1	26069	22516	20542	20666
	-1.1	52522	73248	82267	83868
	1.1	28246	34066	50936	66193
3	-0.8	7964	3835	2228	1626
	-0.1	2812	1599	654	426
	0.1	2904	1366	592	475
	0.8	5437	3504	1505	794
	1	7683	7477	7295	7211
	-1.1	18730	24271	28113	27807
	1.1	9329	11461	16856	22039
					942
7	-0.8	2459	1481	1171	177
	-0.1	1185	586	292	172
	0.1	1218	705	295	358
	0.8	2578	1412	663	3351
	1	3607	3237	3177	11883
	-1.1	9219	11098	11844	9461
	1.1	4672	4931	7392	
10	-0.8	2099	1072	604	608
	-0.1	920	470	286	154
	0.1	1701	492	202	105
	0.8	1945	1051	449	242
	1	2650	2222	2215	2125

	-1.1	6013	7259	8463	8550
	1.1	2833	3330	5186	6610

المصادر

1-الساقي،محمد فاضل محمد 1998 "استخدام المحاكاة لمقارنة طرائق تقدير انموذج الانحدار الخطي عند خضوع الخطا لعملية الانحدار الذاتي الطبيعية المستقرة من الدرجة الاولى " رسالة ماجستير ، كلية الادارة والاقتصاد ، الجامعة المستنصرية.

2-العقابي، عباس لفتة 1996 "استخدام اسلوب بيز التجريبي في التقدير (دراسة مقارنة) "رسالة ماجستير، كلية الادارة والاقتصاد، جامعة بغداد.

3-المفرجي، رحاب كاظم 2000 "استخدام المحاكاة لدراسة حصانة مقدرات بيز التجريبي (الخبري) لنماذج الانحدار الذاتي من الدرجة الاولى" رسالة ماجستير، الجامعة المستنصرية.

4-Berger,J. &Berliner L. 1983 "Robust Bayes &Empirical Bayes analysis with contaminated priors " Annals of statistics vol.14,no.2,pp.(461-486).

5-Bryan T. 1979 "Rates of convergence in a modified empirical Bayes estimation problem involving poisson distribution"commun. Statistical theory method , A8(2),pp. (167-174).