



# مقارنة طرائق التعويض الأحادي عن القيمة المفقودة لأنموذج الانحدار اللامعلمي

د. مناف يوسف  
جامعة بغداد- كلية الإدارة والاقتصاد  
قسم الإحصاء

د. قتيبه نبيل  
جامعة بغداد- كلية الإدارة والاقتصاد  
قسم الإحصاء

## المستخلص

في هذا البحث سيتم دراسة أنموذج الانحدار اللامعلمي الذي يعاني فيه متغير الاستجابة من حالة فقدان (عدم استجابة) في بعض مشاهداته وتحت افتراض آلية فقدان MCAR، إذ تم اقتراح طريقة تعويض قاعدة Kernel الأحادي اللامعلمي بدلاً عن القيمة المفقودة ومقارنة هذه الطريقة مع طريقة تعويض أقرب مجاور باستخدام أسلوب المحاكاة والمتمثل بعدة تجارب لعدة نماذج مختلفة وحالات مختلفة من حجوم العينة، التباين ونسب الفقدان.

## Abstract:

In this paper, we will study non parametric model when the response variable have missing data (non response) in observations it under missing mechanisms MCAR, then we suggest Kernel-Based Non-Parametric Single-Imputation instead of missing value and compare it with Nearest Neighbor Imputation by using the simulation about some difference models and with difference cases as the sample size, variance and rate of missing data.

## ١- مقدمة

تعد مشكلة البيانات المفقودة أو غير التامة من المشاكل الشائعة في مجال البحوث مثل استطلاع الرأي، استطلاعات دراسة التسويق، الدراسات الطبية، والعديد من التجارب العلمية. لذلك ظهرت العديد من الطرائق في التعويض عن القيم المفقودة وخاصة طرائق التعويض الأحادي **Single – Imputation** مثل تعويض الوسط الحسابي أو الوسيط .. الخ. في هذا البحث سوف نقوم بدراسة أنموذج الانحدار اللامعلمي الذي يعاني فيه متغير الاستجابة  $y$  من حالة فقدان (عدم استجابة) في بعض مشاهداته وتحت افتراض الية فقدان **MCAR (Missing Completely At Random)** وذلك باستخدام طريقة تعويض قاعدة **Kernel** الأحادي اللامعلمي **(KBNS) Kernel-Based Non-Parametric Single-Imputation** وطريقة تعويض أقرب مجاور **(NNI) Nearest Neighbor Imputation** وباستخدام أسلوب المحاكاة.

### ٢- طريقة تعويض قاعدة **Kernel** الأحادي اللامعلمي **KBNS** :

على فرض أن  $X_i$  متغير عشوائي ذو توزيع مستقل ومتماثل **i.i.d** وتام المشاهدات، وأن المتغير  $Y_i$  يمثل متغير استجابة والمتأثر بالمتغير  $X$  وعلى فرض أن الأزواج المرتبة  $(X_i, Y_i)$  تحقق الأنموذج التالي: [1]

$$y_i = m(x_i) + \varepsilon_i \quad \dots (1)$$

وأن المتغير  $Y_i$  يحتوي على بعض حالات عدم الاستجابة وأن  $m(x_i)$  دالة غير معرفة. وعلى فرض أن: [3]

$$r = \sum_{i=1}^n \delta_i$$

... (2)

$$m = n - r$$

إذ يمثل  $r$  مؤشر لمجموع حالات الاستجابة وعدم الاستجابة أو الفقدان حيث أن  $\delta_i = 1$  في حالة وجود استجابة و  $\delta_i = 0$  في حالة عدم الاستجابة وأن  $n$  يمثل مشاهدات العينة في حين يمثل  $m$  عدد حالات عدم الاستجابة للمتغير  $Y_i$ .

وعليه يمكن الرمز لحالة الاستجابة وعدم الاستجابة بـ  $S_r$  ،  $S_m$  وعلى التوالي. [5] على

فرض أن  $y_i^*$  ،  $i \in S_m$  يمثل القيم المعوضة بدل عن القيمة المفقودة أي أن :

$$y_i^* = \hat{m}_n(x_i) + \varepsilon_i^* , i \in S_m \quad \dots (3)$$

إذ يمثل  $\varepsilon_i^*$  متغير الخطأ العشوائي ذو البعد  $m$  ويمكن الحصول عليه من الصيغة التالية :  
 $m(x_i) - \hat{m}_n(x_i), i \in S_m \dots (4)$

أما  $\hat{m}_n(x_i)$  فيتم الحصول عليه باستخدام قاعدة Kernel وكما يلي [7]:

$$\hat{m}_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^n \delta_i y_i k\left(\frac{x - x_i}{h}\right)}{\sum_{i=1}^n \delta_i k\left(\frac{x - x_i}{h}\right) + n^{-2}} \dots (5)$$

وذلك بالاعتماد على المشاهدات التامة للأزواج المرتبة  $(x_i, y_i)$ .

وأن :

$$\delta_i = 0 \text{ إذ كان } y_i \text{ مفقود .}$$

$$\delta_i = 1 \text{ إذ كان } y_i \text{ مشاهد .}$$

أما  $h$  فتمثل المعلمة التمهيدية أو معلمة عرض الحزمة (Bandwidth) والتي تكون عدد موجب [7] ، أما  $k(\cdot)$  فتمثل دالة لبيه والتي يمكن الحصول عليها من دالة الكثافة الطبيعية القياسية أو ما يطلق عليها بـ Gaussian Kernel :

$$K(z) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp(-z^2/2) \dots (6)$$

أما فيما يخص المعلمة التمهيدية  $h$  فهناك العديد من الطرائق في تقديرها ومن هذه الطرائق الصيغة التالية والتي تدعى بطريقة المصدر الطبيعي: [2]

$$h = 1.06 \cdot s \cdot n^{-\frac{1}{5}} \dots (7)$$

وهذه الصيغة تكون جيدة للبيانات التي تكون مقاربة للتوزيع الطبيعي [1].

### ٣- طريقة تعويض أقرب مجاور NNI:

تعد هذه الطريقة من الطرائق الحديثة في التعويض عن القيم المفقودة، ولفهم آلية عمل هذه الطريقة نفرض لدينا متغير الاستجابة  $y_i$  والذي يعاني من فقدان في بعض مشاهداته والمتغير التوضيحي  $x_i$  الذي يكون تام المشاهدات وكما يلي: [4]

$$\underbrace{Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-m}}_{\text{obs.}}, \underbrace{Y_{n-m+1}, Y_{n-m+2}, \dots, Y_n}_{\text{miss.}}$$

$$\underbrace{X_1, X_2, \dots, X_{n-m}, X_{n-m+1}, X_{n-m+2}, \dots, X_n}_{\text{obs.}} \quad \dots (8)$$

$$i = 1, 2, \dots, n \quad \text{and} \quad l = n - m + 1, n - m + 2, \dots, n$$

$$j = 1, 2, \dots, n - m$$

اذ تمثل  $m$  عدد القيم المفقودة في مشاهدات  $Y_i$  وان  $n$  تمثل عدد المشاهدات الكلية وعلية يتم اختيار قيمة  $Y_j$  ،  $1 \leq j \leq n - m$  التي تقابل اقل فرق مطلق بين  $X_j, X_1$  وحسب الصيغة التالية :

$$\left| X_j - X_1 \right| = \min_{1 \leq j \leq n-m} \left| X_j - X_1 \right| \quad \dots (9)$$

و إذا لم يكن هناك قيمة وحيدة يتم التعويض بقيمة متوسط البيانات.

#### ٤- المحاكاة

لغرض معرفه اداء المقدرات اللامعلميه في حاله وجود مشاهدات غير تامة وبيان اختلاف كل من نسب واليه الفقدان، وتغير التباين للأخطاء وكذلك حجوم العينات فضلا عن تغير النماذج المستخدمة سوف يتم استخدام ثلاثة نماذج افتراضية وهي:

Model I:

$$y_i = 3 \cos(x_i) + 4 \exp(-x_i^2) + \varepsilon_i$$

Model II:

$$y_i = \sin(2\pi x_i) + x_i^2 + \varepsilon_i$$

Model III:

$$y_i = \frac{\cos(2.5\pi x_i)}{(1 + 3x_i^2)}$$

أما حالة الفقدان وحسب إلية الفقدان MCAR فسيتم توليدها حسب الصيغة التالية: [6]

MCAR:

$$p(x) = p(\delta = 1 / X = x) = 0.9, \forall x$$

وتم افتراض قيم مختلفة لتباين الخطأ، وهي (1, 1.5, 2). إما حجوم العينات المستخدمة فكانت (50, 100)، في حين كانت نسب فقدان (10%, 20%, 30%).  
والجدول الآتي يوضح قيم MSE لمقدرات دالة الانحدار اللامعلمية باختلاف النماذج المستعملة، التباينات، حجوم العينات ونسب الفقدان.

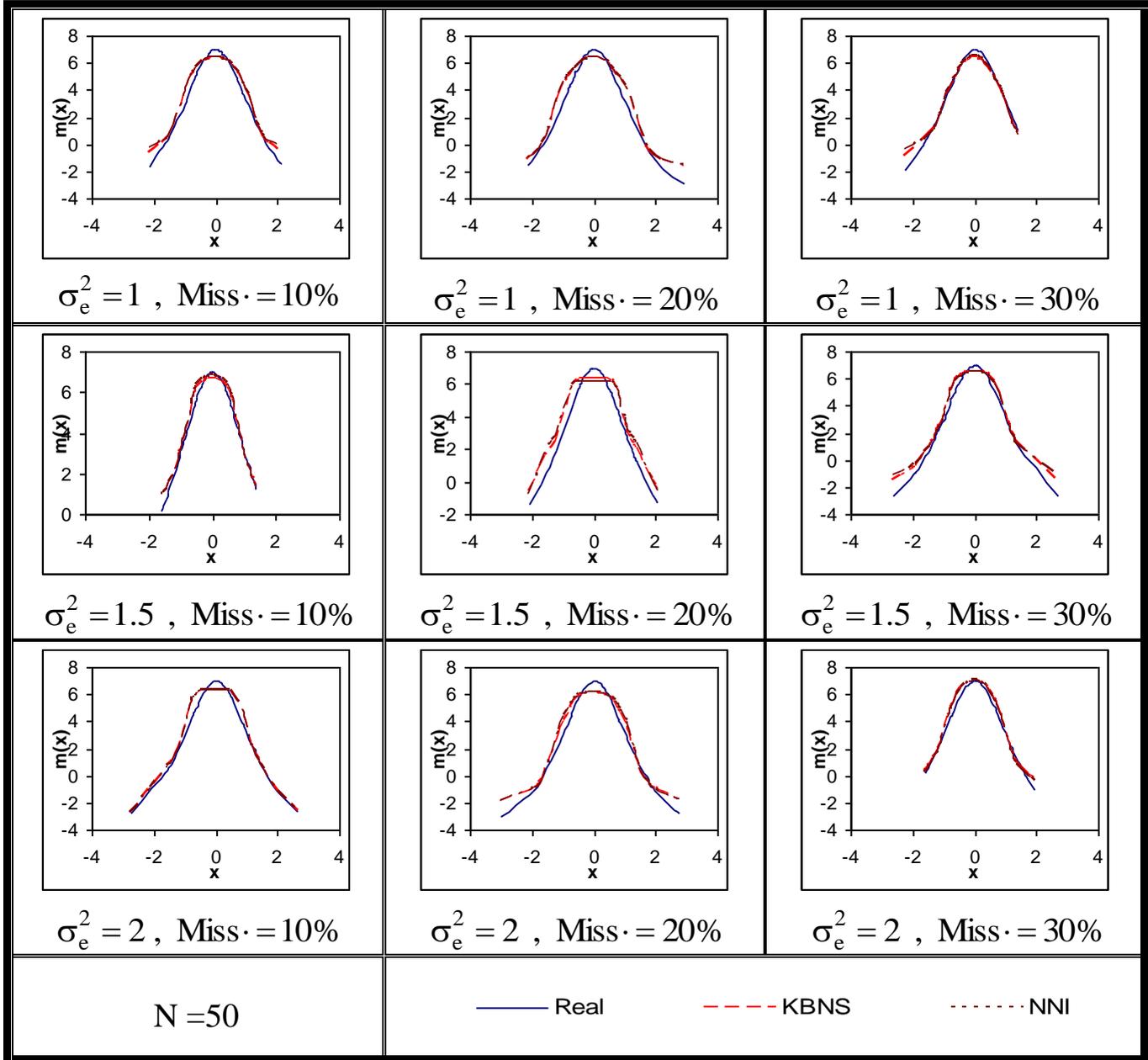
جدول (١)

يشير إلى MSE لتقدير دالة الانحدار اللامعلمية  $m(x)$  لجميع النماذج بالاعتماد على حجوم عينات، تباينات ونسب فقدان مختلفة

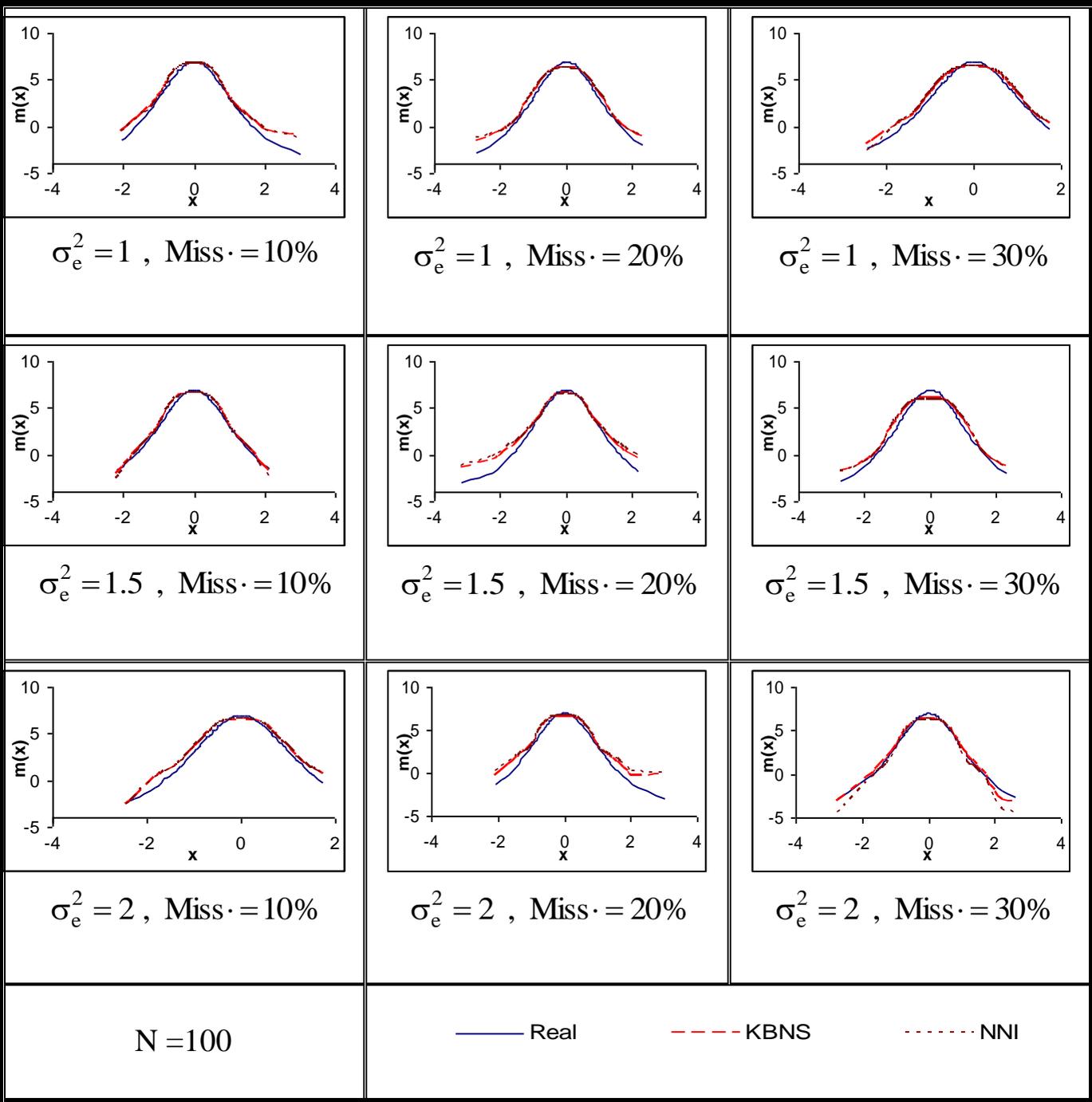
Model	N	Methods	KBNS			NNI		
		$\sigma_e^2$ Miss.	1	1.5	2	1	1.5	2
I	50	10%	0.2164	0.2709	0.3383	0.2361	0.3080	0.4054
		20%	0.2114	0.2565	0.3401	0.2548	0.3469	0.4732
		30%	0.2000	0.2473	0.3082	0.2656	0.3803	0.5462
	100	10%	0.1398	0.1785	0.2242	0.1482	0.2017	0.2636
		20%	0.1351	0.1645	0.2146	0.1573	0.2052	0.2977
		30%	0.1348	0.1593	0.1919	0.1719	0.2344	0.3202
II	50	10%	0.1523	0.2105	0.3190	0.1894	0.2631	0.4026
		20%	0.1440	0.2108	0.3008	0.2192	0.3107	0.4714
		30%	0.1381	0.1996	0.2688	0.2732	0.3864	0.5624
	100	10%	0.1018	0.1380	0.2084	0.1219	0.1751	0.2595
		20%	0.0963	0.1367	0.1823	0.1355	0.2033	0.2888
		30%	0.0890	0.1252	0.1685	0.1511	0.2472	0.3366
III	50	10%	0.0567	0.1228	0.2199	0.0761	0.1623	0.2884
		20%	0.0519	0.1083	0.1806	0.0901	0.1962	0.3265
		30%	0.0447	0.0995	0.1598	0.1074	0.2416	0.4072
	100	10%	0.0301	0.0696	0.1208	0.0407	0.0934	0.1595
		20%	0.0297	0.0598	0.1040	0.0493	0.1075	0.1897
		30%	0.0252	0.0564	0.0992	0.0580	0.1417	0.2572

والإشكال الآتية توضح تأثير كل من نسب الفقدان وتغير قيم التباين على مقدرات دالة الانحدار باختلاف حجوم العينات والنماذج المستعملة.

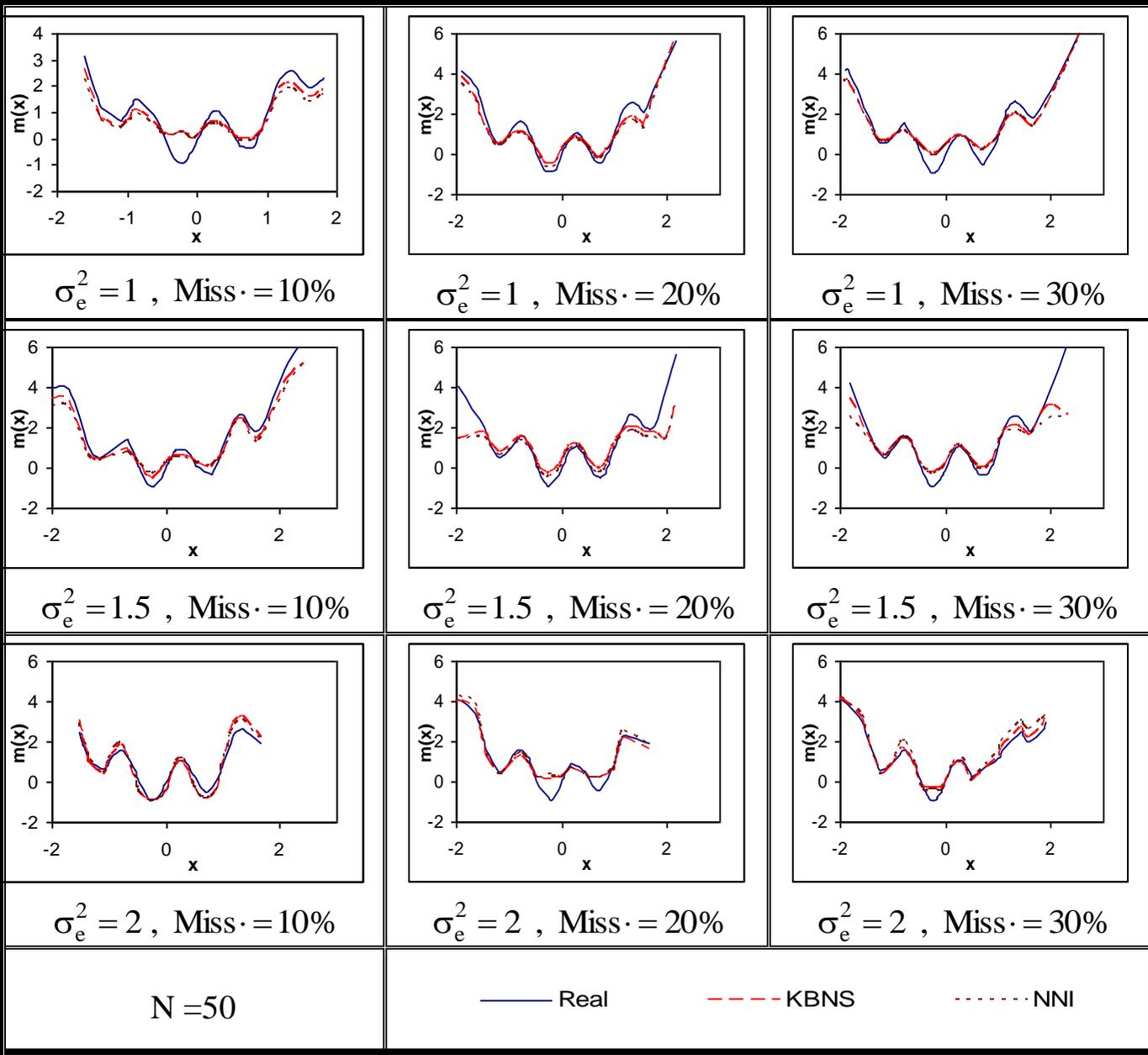
شكل (1) تأثير نسب الفقدان وتغير قيم التباين على مقدرات دالة الانحدار  $m(x)$  للأنموذج الأول  
عندما  $N=50$



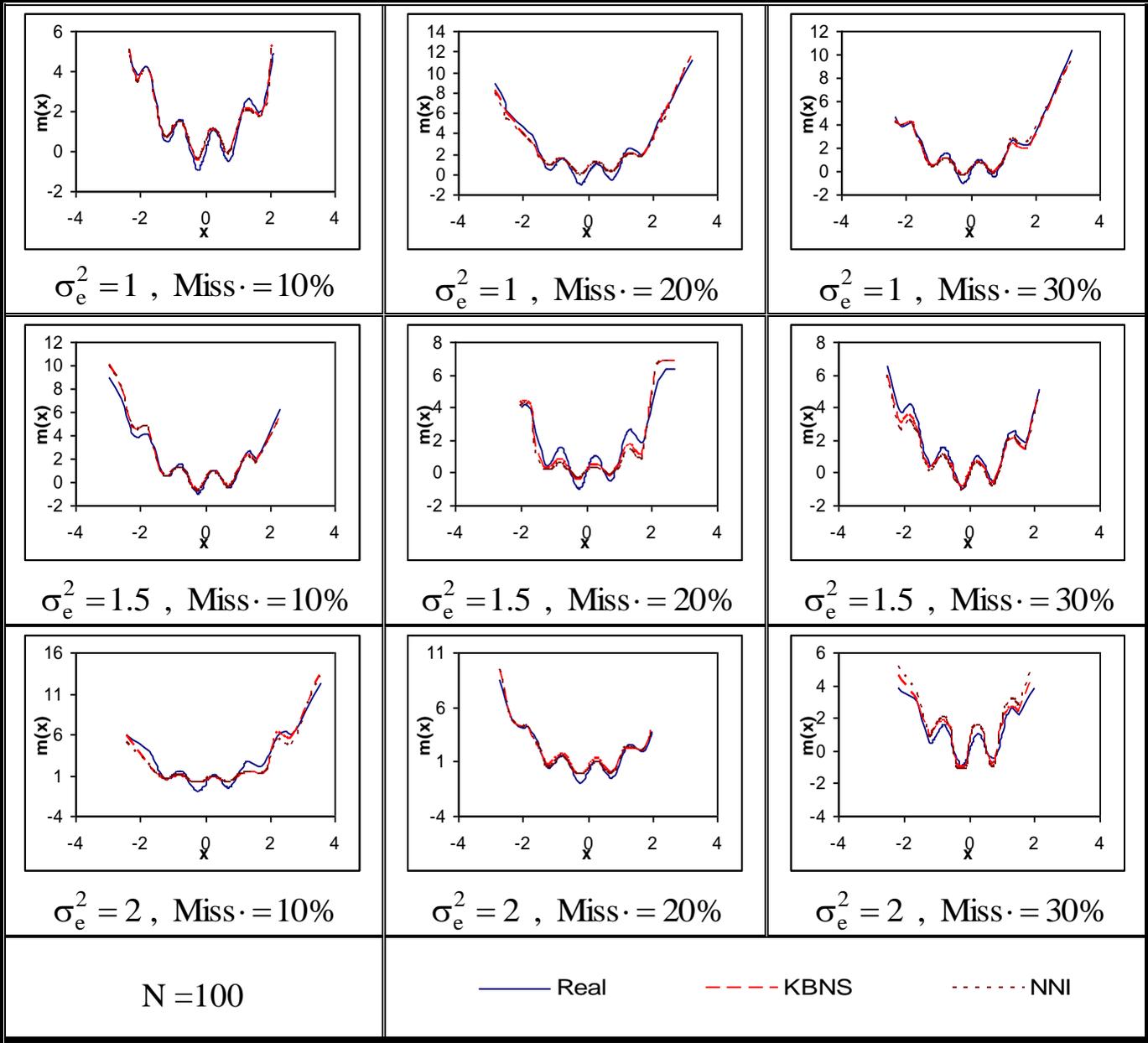
شكل (٢) تأثير نسب فقدان وتغير قيم التباين على مقدرات دالة الانحدار  $m(x)$  للأنموذج الأول عندما  $N=100$ .



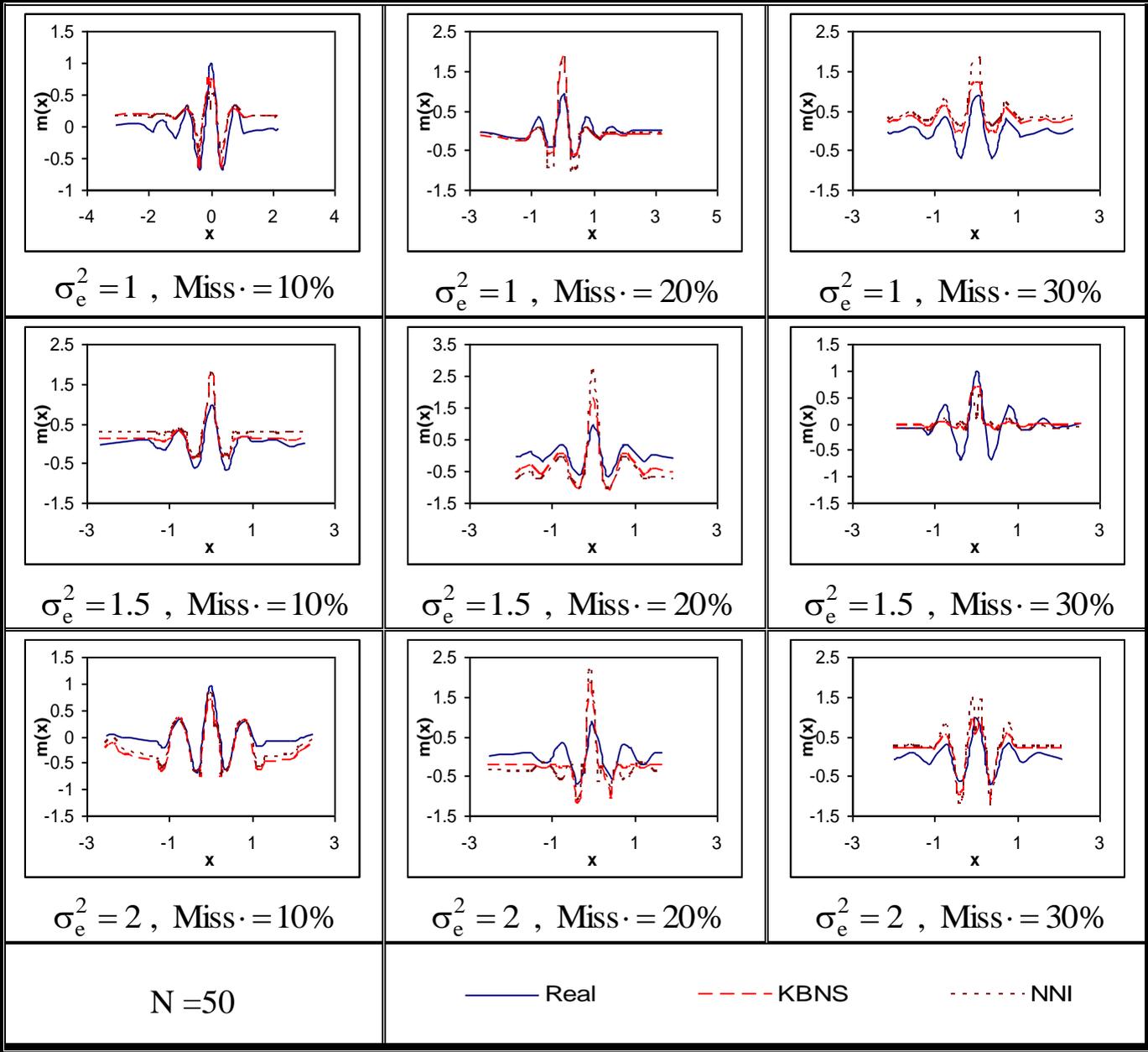
شكل (٣) تأثير نسب فقدان وتغير قيم التباين على مقدرات دالة الانحدار  $m(x)$  للأنموذج الثاني عندما  $N=50$



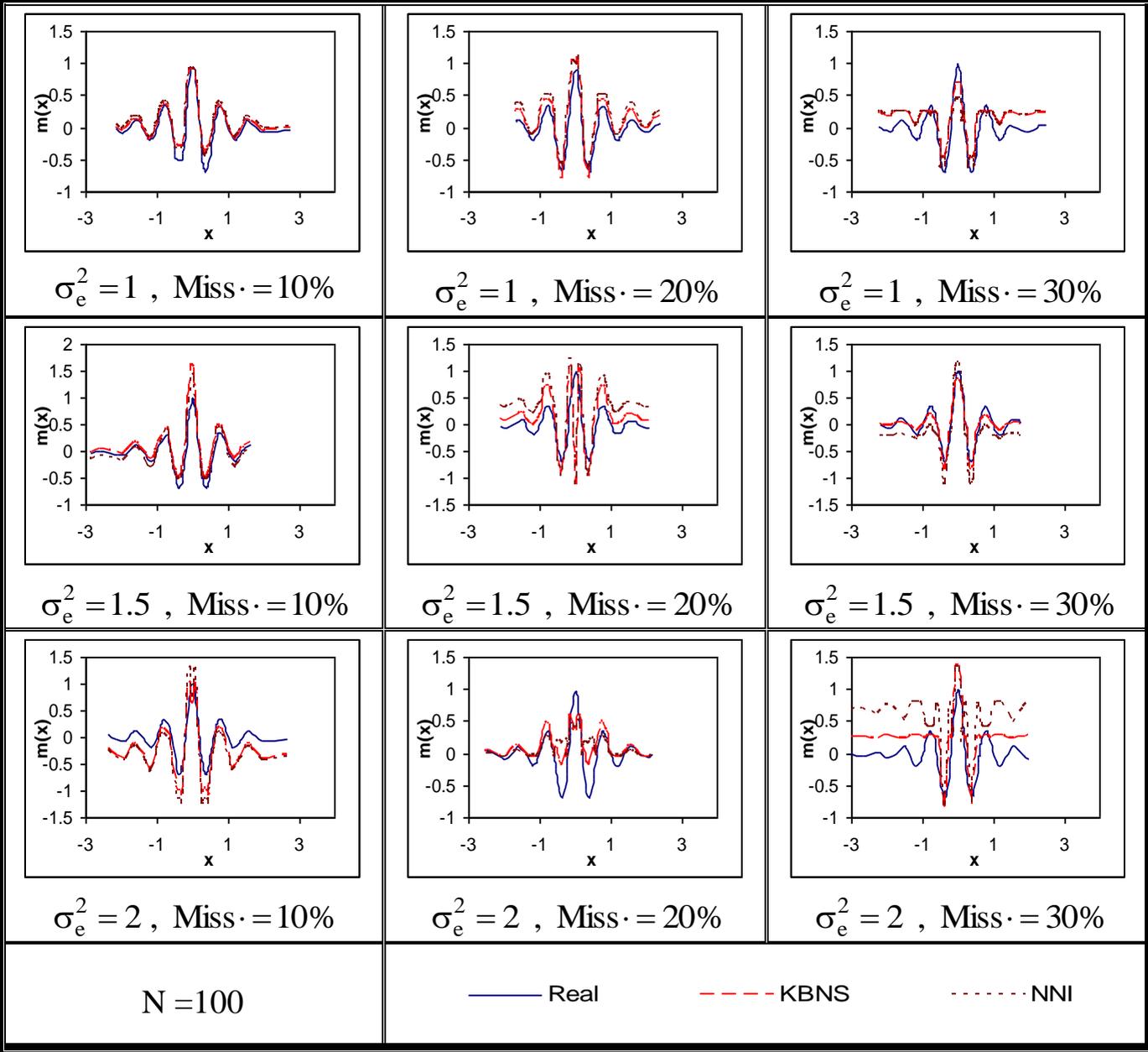
شكل (4) تأثير نسب فقدان وتغير قيم التباين على مقدرات دالة الانحدار  $m(x)$  للأنموذج الثاني  
عندما  $N=100$



شكل (5) تأثير نسب فقدان وتغير قيم التباين على مقدرات دالة الانحدار  $m(x)$  للأنموذج الثالث  
عندما  $N=50$



شكل (٦) تأثير نسب الفقدان وتغير قيم التباين على مقدرات دالة الانحدار  $m(x)$  للأنموذج الثالث  
عندما  $N=100$



## 5 - تفسير النتائج:

- يتضح من النتائج في الجدول (١) المذكور أنفاً الآتي:
- ❖ مقدر NW كان المقدر الأفضل ولجميع النماذج، حجوم العينات، التباينات ونسب الفقدان.
  - ❖ أشارت النتائج عند استعمال مقدر KBNS تناقص قيم MSE عند زيادة نسب الفقدان ولجميع حجوم العينات وقيم تباين (١, ١.٥). في حين عند قيمة تباين ٢ تزايدت قيم MSE عند زيادة نسب الفقدان.
  - ❖ أشارت النتائج عند استعمال مقدر KBNS ان قيم MSE تتناقص عند زيادة نسب الفقدان ولجميع حجوم العينات وقيم تباين (١, ١.٥). في حين عند قيمة تباين ٢ تزايدت قيم MSE عند زيادة نسب الفقدان.
  - ❖ أشارت النتائج عند استعمال مقدر NNI ان قيم MSE تزايدت عند زيادة نسب الفقدان ولجميع حجوم العينات وقيم التباين المستعملة.
  - ❖ أشارت النتائج الى تناقص قيم MSE عند زيادة حجوم العينات ولجميع النماذج ، قيم التباينات ونسب الفقدان.
  - ❖ تناقص قيم MSE لكلا مقدري دالة الانحدار عند تزايد قيم التباين ولجميع حجوم العينات، النماذج المستعملة ونسب الفقدان.
  - ❖ لكل نسبة من نسب الفقدان يلاحظ تناقص قيم MSE لكلا مقدري دالة الانحدار عند تزايد قيم التباين ولجميع حجوم العينات والنماذج المستعملة.

## ٦- الاستنتاجات

يلاحظ من النتائج المذكورة في المبحث السابق أفضلية مقدر KBNS المتمثل بمقدر NW ولجميع الحالات المفترضة من نماذج مفترضة، نسب فقدان، تباينات وحجوم عينات. لذا يوصى باستخدام هذا المقدر في حاله وجود بيانات مفقودة وعدم الاعتماد على مقدر NNI. يلاحظ كذلك من الإشكال إن مقدر NW لازال يتأثر بتأثيرات الحد مما يتطلب تعديلا لهذا المقدر عند نقاط الحد.

## ٧- المصادر

- [1] Hardle, W. (1990). *Applied nonparametric regression*. Cambridge University press.
- [2] Heumann, C.; Nittner, T.; Scheid, S. & Toutenburg, H. (2002) *Parametric and Nonparametric Regression Missing X's: A Review*, *Journal of the Iranian Statistical Society*, 1, No.1-2, 79-110.  
[www.stat.uni-muenchen.de/sfb386/papers/dsp/paper286.ps](http://www.stat.uni-muenchen.de/sfb386/papers/dsp/paper286.ps).
- [3] Little, R.J.A. and Rubin, D.B. (1987). *Statistical Analysis with Missing Data*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- [4] Nittner, T. (2002) *The Additive with Missing values in the Independent Variable: Theory & Simulation*, to appear in: *Computational Statistics*.  
<http://www.pms.ifi.lmu.de/research-report/index.pdf>
- [5] Schafer J. (1997) *Analysis of incomplete multivariate data*. 1<sup>st</sup> ed. London: Chapman and Hall.
- [6] Schafer J. (2002) *Dealing with Missing Data*. Res. Lett. Math. Sci., 3, 153-160.
- [7] Silverman, B.W. (1986), *Density estimation for statistics and data analysis*. London: Chapman and Hall.