مقارنة بين دالة الإنتماء ودالة الأنتروبي في الإنحدار الخطي الضبابي المكيف

أ.م.د. محمد جاسم محمد/ كلية الادارة والاقتصاد/ جامعة بغداد
الباحث/ أحمد فاروق عباس

تاريخ التقديم:2017/5/25
تاريخ القبول:2017/9/20

المستخلص

يوجد العديد من مصادر عدم التأكد التي تؤثر في المنطق الإحصائي، إلا أنّ الأساليب التقليدية لا تستطيع التعامل مع جميع أنواع عدم التأكد الأمر الذي دفع العديد من الباحثين إلى تطوير الأساليب التقليدية ومازالت الدراسات قائمة إلى يومنا هذا تضع الفروض من أجل إيجاد فهم مشترك لغرض الوصول إلى حلول جديدة عبر أستخدام أساليب متطورة تدمج بين النظريات التقليدية والنظريات الحديثة لمصادر عدم التأكد.

يهدف البحث الى تطوير أنموذج الإنحدار الخطي الضبابي المكيف في حالة إعتماد عدم الدقة في البيانات مصدراً لعدم التأكد وبالتحديد الأنموذج المقترح من قبل الباحثين (Coppi, & et al) في المصدر [1]، لكن بدلاً عن السائد في تحليل الإنحدار الخطي الضبابي تم إعتماد طريقة تضبيب حديثة النشأة والتي تعتمد على الموقع ودوال الأنتروبي لرقم ضبابي ثلاثي ذي شكل منحنى أنتماء مختلف بدلاً عن أستخدام دوال الأنتماء التي تعتمد على مجموعة المركز والأنتشار، أما لغرض مقارنة النماذج في هذا البحث فقد تم أستخدام متوسط الفرق المطلق كمقياس لتقييم الأداء.

كما أظهرت نتائج الدراسة كفاءة أستخدام الموقع ودوال الأنتروبي لوصف الأرقام الضبابية وتفوقها على أستخدام دوال الأنتماء، إذ أشارت النتائج أن الأنموذج المكيف الذي تم تطويره في هذا البحث قد أمتلك أفضل النتائج بالمقارنة مع الأنموذج المكيف بأستخدام دوال الأنتماء المقترح في المصدر [1].

المصطلحات الرئيسة للبحث/ أرقام ضبابية ثلاثية، دالة الأنتماء، دالة الأنتروبي، مربعات صغرى ضبابية تكرارية، إنحدار ضبابي مكيف.

مجلة العلوم
الاقتصادية والإدارية
العدد 103 المجلد 24
الصفحات 453-476

*بحث مستل من رسالة ماجستير.

1. المقدمة Introduction

تتسم معظم البيانات في واقع الحال بأنها مثقلة بأنواع مختلفة من مصادر عدم التأكد، وأنّ العديد من هذه المصادر تؤثر في المنطق الإحصائي فعلى سبيل المثال لا الحصر: العشوائية والغموض والألتباس وعدم الدقة وكذلك الأهمال الجزئي أو تفويت تسجيل بعض المعلومات كلٌ منها يعتبر سبّبياً لتمثيل عدم التأكد لظاهرة ما [2]. إنّ معرفة نوع عدم التأكد في النماذج التي يتم بنائها لتمثيل أية ظاهره يعد الخطوة الأساس للتحليل، وذلك لغرض أختيار أسلوب المعالجة الصحيح للتخلص من أوجه عدم التأكد ومن ثم إتخاذ قرارات فعّالة، غير أنّ التحليل الإحصائي التقليدي لا سيما فيما يتعلق بنمذجة الإنحدار غير قادر على تفسير جميع مصادر عدم اليقين المعقدة في الحياة، أدى هذا الى تطوير الأساليب التقليدية وتوسعتها عبر النظر في أفكار ومفاهيم جديدة وفق نظريات مختلفة للتعامل مع هذه المصادر.

تعد نماذج الإنحدار من أشهر أنواع النمذجة الإحصائية التي تستخدم بشكل واسع لموائمة العلاقة الدالية بين مجموعة بيانات تتمثل بالمُخرج (Output) والمدخلات (Inputs)، ويعزى مصدر عدم التأكد في الأساليب التقليدية لتقدير وتحليل المعلمات المجهوله في هذه النماذج إلى جميع المؤثرات العشوائية مما جعلها تتبنى النظرية الإحتمالية لمعالجة مثل هذا النوع من المصادر، لكن في الواقع العديد من الظواهر لا يمكن الحصول على قياسات مفرداتها بشكل مضبوط أو دقيق نتيجة لتعقد النظام أو لتدخل التفكير والأستنتاج البشري فضلاً عن أن بعضها يتم وصفه بشكل متغيرات لغوية مبهمه، في مثل هذه الحالات تبدو النظرية الإحتمالية غير ملائمة لمعالجة مثل هذا النوع من البيانات عبر العشوائية فحسب، إذ ستكون نتائج التحليل ضعيفة ومضللة ولأجل التعامل مع هذا النوع من النماذج لابد من تبسيطها إلى مستوى معقول عبر الأخذ بنظر العناية أنواع عدم التأكد الأخرى.

توجد العديد من الطرائق التي تستخدم لتبسيط هذه النماذج لكن أشهرها أستخدام النظرية الضبابية إذ يجدها الباحثون أسهل في التعامل بالمقارنة مع نظيراتها، فضلاً عن أنَّ الحصول على بياناتها يكون أقل كلفة بالمقارنة مع البيانات الدقيقة [3]، وهذا ما أهتم به عمل البحث الحالي بوساطة السماح لنماذج الإنحدار بأستخدام المعلومات الأضافية عن عدم دقة القياسات رغبة للوصول إلى نتائج مُرضية ومفيدة.

ما ذكر انفا على الأغلب يتم بأستخدام المجموعات الضبابية التي يتم تمثيلها بأقتران يدعى بدالة الأنتماء يجعل عناصر المجموعة تتخذ تدريجاً لعضويتها (ضبابيتها) ضمن الفترة [0,1] وليس أعداداً أعتيادية، أما عند التطبيق وبشكل عام لتسهيل عملية المعالجة عادة ما تستخدم الأرقام الضبابية ذات المدى من اليمين واليسار التي توصف بثلاث سمات هي: مجموعة المركز والأنتشار من جهة اليمين والأنتشار من جهة اليسار، على الرغم من أنّ ضبابية الرقم الضبابي توصف بوساطة دوال الأنتماء لكن في بعض الأحيان يفضل الباحثون تمثيل الضبابية بمؤشرات قياس الضبابية مثل دوال الأنتروبي التي تتميز بعدة خصائص جعلتها بديلاً مثالياً يمكن الأعتماد عليه في العديد من التطبيقات بدلاً عن دوال الأنتماء فأصبح بالأمكان وصف الرقم الضبابي عبر موقعه ومؤشر قياس الضبابية عوضاً عن مجموعة المركز والأنتشار [4].

إنَّ طرائق التقدير والتحليل لدراسة الإنحدار في ظل بيئة ضبابية متنوعة كطرائق التقدير والتحليل التقليدية فمنها ما يستخدم أساليب هندسية ومنها ما يستخدم أساليب أحصائية بحتة كالمربعات الصغرى ومثيلاتها والأخيرة تخلصت من عدد من مشاكل الإنحدار الضبابي وتفوقت بنتائجها على الأولى [5].

أقتصر البحث الحالي على أنموذج إنحدار خطي ذو مُخرج ضبابي ومدخلات غير ضبابية إذ هدفت الرسالة إلى توفيق أفضل خطوط مستقيمة من خلال الحصول على مقدرات تجعل مربع معيار (Metric) مناسب بين مشاهدات المخرج الضبابي وتقديراته على الأقل في أعظم أدنى حد لها وهذا تم بالإعتماد على أسلوب المربعات الصغرى التكرارية لأنموذج إنحدار خطي ضبابي مكيف.

2. الهدف والغاية Aim and Objective

يتحدد هدف الرسالة ببناء أنموذج إنحدار خطي لبيانات غير دقيقة له قدرة التعامل مع المعلومات المتوفرة حول عدم الدقة بشكل سهل ومعقول.

أما الغاية لتحقيق الهدف فتمثلت بتطوير تقديرات المربعات الصغرى الضبابية لأنموذج إنحدار خطي ضبابي مكيف ذو مُخرج ضبابي ومدخلات غير ضبابية عبر أستخدام دوال الأنتروبي الضبابية والمقارنة بين النتائج بأستخدام مقياس تقييم الأداء.

3. تمهيد رياضي Mathematical Preliminaries

1.3 المجموعات التقليدية والمجموعات الضبابية

تعرف المجموعات التقليدية (Crisp sets) على أنها تشكيلة من الأشياء تدعى بالعناصر تشترك بعدة خصائص ضمن مجال معين سواء كان محدد أمْ غير محدد، ليكن $\mathcal{X} \neq \emptyset$ يمثل فضاء المجموعات التقليدية فأن أي عنصر في الفضاء $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ قد ينتمي للمجموعة الجزئية التقليدية $\mathbf{A} \subseteq \mathcal{X}$ إذا أمتلك تلك الخصائص المميزة لها أو العكس فلا ينتمي إليها وعادةً ما يتم وصف المجموعات التقليدية بدالة تدعى بالدالة المميزة (Characteristic function) والتي تَقرن (Mapping) كل عنصر ينتمي للفضاء $\mathcal{X}$ إلى عنصري المجموعة الثنائية $\{0,1\}$ كما موضح في أدناه [6]:

$$\mathbf{I}_{\mathcal{A}}(x): \mathcal{X} \longrightarrow \{0,1\} \quad (1)$$

هذه الخاصية (الدالة المميزة) تم تعميمها من قبل (Zadeh, 1965) في المجموعات الضبابية فأصبح أنتقال العنصر من عضويته إلى عدمها يكون بشكل تدريجي مستمر بين 0 و 1 بدلاً عن الحاد في المجموعات التقليدية، على فرض أن $\mathcal{K}(\mathbb{R}^m) \neq \emptyset$ يمثل فضاء المجموعات الضبابية فأن المجموعة الضبابية $\mathcal{A}$ تعرف على أنها مجموعة جزئية من الفضاء المتجهي الحقيقي $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^m$ تتميز بأقتران يدعى بدالة الأنتماء (Membership function) الذي يصف درجة أنتماء العنصر x في $\mathcal{A}$ كالآتي [6]:

$$\mu_{\mathcal{A}}(x): \mathcal{K}(\mathbb{R}^m) \longrightarrow [0,1] \quad (2)$$

2.3 مصطلحات في المجموعات الضبابية Terminologies in Fuzzy Sets

يمكن تعريف عدد من المصطلحات للمجموعة الضبابية $\mathcal{A} \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^m)$ بشكل مجموعات تقليدية كما موضحة في الشكل (2.2) وكالآتي [6]:

1. المستوى $\alpha-$ ($\alpha-$Level): $\mathcal{A}^\alpha = \{x \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^m) | \mu_{\mathcal{A}}(x) \geq \alpha\} \ \forall\ \alpha \in (0,1]$
2. السند (Support): $\mathcal{S}(\mathcal{A}) = \{x \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^m) | \mu_{\mathcal{A}}(x) > 0\}$
3. المركز أو اللب (Core (Kernel)): $\mathcal{C}(\mathcal{A}) = \{x \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^m) | \mu_{\mathcal{A}}(x) = 1\}$

3.3 الأرقام الضبابية Fuzzy Numbers

ليكن $\mathcal{F}(\mathbb{R}^m) \neq \emptyset$ يمثل فضاء الأرقام الضبابية فأن الرقم الضبابي $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$ يعرف على أنهُ المجموعة الضبابية التي تحقق دالة أنتمائها $\mu_{\mathcal{A}}(x): \mathcal{F}(\mathbb{R}^m) \longrightarrow [0,1]$ الشروط الآتية [7],[8]:

1. $\mu_{\mathcal{A}}(\alpha) = \{x | \mu_{\mathcal{A}}(x) \geq 0\}$ لأي $\alpha \in [0،1]$
2. $\exists\, x$ تحقق $\mu_{\mathcal{A}}(1) = \{x | \mu_{\mathcal{A}}(x) = 1\}$
3. $-\infty < \tau < \infty$، $\lim_{x \to \tau} sup(\mu_{\mathcal{A}}(x)) = \mu_{\mathcal{A}}(\tau)$
4. $\mu_{\mathcal{A}}(\rho x_1 + (1-\rho)x_2) \geq min\left(\mu_{\mathcal{A}}(x_1)،\mu_{\mathcal{A}}(x_2)\right)$ لأي $\rho \in [0،1]$

وكحالة خاصة من الأرقام الضبابية ما يدعى بالأرقام الضبابية ذات المدى من اليمين واليسار (-LR Fuzzy Numbers) التي تعرف بدالتين $L: \mathbb{R}^+ \to [0,1]$ و $R: \mathbb{R}^+ \to [0,1]$ إذ أن كل من $R(\cdot)$ و $L(\cdot)$ تمثل دوال رتيبة غير تصاعدية تشير إلى شكل دالة الأنتماء من جهة اليمين واليسار على التوالي والتي تحقق الشرطين: $L(x) = R(x) = 0 \ ,if\ x \geq 1$ و $L(x) = R(x) = 1 \ ,if\ x \leq$ [6]، بشكل عام أنَّ أي رقم ضبابي من النوع LR يمكن تمثيلة بدالة الأنتماء الآتية:

$$\mu_{\mathcal{A}}(x) \triangleq \begin{cases} L(x) & \text{if} \ \ x < m^l \\ 1 & \text{if} \ \ x \in [m^l, m^r] \\ R(x) & \text{if} \ \ m^r > x \end{cases} \tag{3}$$

إذ أنّ كل من m^l, m^r يمثلان الحد الأعلى والأدني لمجموعة المركز على التوالي، إنَّ هذا النوع من الأرقام الضبابية يمكن تقسيمهُ على صنفين هما رقم ضبابي نوع LR_1 يمتلك مركز واحد (عندما $m^l = m^r$) مثل الرقم الضبابي الثلاثي و رقم ضبابي نوع LR_2 يمتلك مركزين (عندما $m^l \neq m^r$) مثل الرقم الضبابي الرباعي.

4.3 رقم ضبابي ثلاثي Triple-FN

يعرف $\mathcal{Y}^R = (\omega; \psi, \delta)_{LR} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^3)$ على أنه رقم ضبابي ثلاثي (Triple-FN) ذو منحنى دالة أنتماء من الدرجة R إذا كانت دالة الأنتماء لهُ معرفة كالاتي [9]:

$$\mu_{\mathcal{Y}}{}^R(x) \triangleq \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{\omega - x}{\psi}\right)^R & \text{if } x \in [\omega - \psi, \omega) \\ 1 & \text{if } x = \omega \\ 1 - \left(\dfrac{x - \omega}{\delta}\right)^R & \text{if } x \in (\omega, \omega + \delta] \\ 0 & Otherwise \end{cases} \tag{4}$$

إذ أنّ: ω تمثل قيمة الوسط الحسابي لمجموعة المركز و $\psi, \delta \in \mathbb{R}^+$ تمثل قيم الأنتشار و$R \in (0,\infty)$. يمكن ملاحظة مما ورد انفا أنّ دالتي الأنتماء لكلا الرقمين (2.8) و (2.9) محددة بشكل كامل على مجموعتي المركز $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ والسند $\mathcal{S}(\mathcal{A})$. علاوةً على ذلك ولأي $R \in (0,\infty)$ فإن الدالتين $L(x)$ و $R(x)$ للرقمين المذكورين انفا يمكن تعريفهما بالشكل الآتي:

$$L(x) = R(x) = 1 - |x|^R \ ,0 \leq x \leq 1 \tag{5}$$

إنّ أختيار درجة منحنى الأنتماء R مهم في التطبيقات وبالأخص التي تهتم بأخذ وزن لتأثير نوع عدم الدقة في الرقم الضبابي فإذا كانت $R \in (0,1)$ فأن عدم دقة البيانات تتناقص بشكل سريع (تزداد دقتها) أما عندما $R = 1$* فأن عدم دقة البيانات تتناقص بشكل خطي بينما إذا كانت $R \in (1,\infty)$ فأن عدم دقتها تتناقص بشكل بطيء [10]، كذلك ومن خلال التعويض بقيم R المختلفة تبين للباحث الآتي:

* في حالة $R = 1$ فأن (4) ستختصر إلى الرقم الضبابي المثلثي والشبة المنحرف على التوالي.

نتيجة (1.3): في حالة الرقم الضبابي الثلاثي $\mathcal{Y}^R = (\omega;\psi,\delta)_{LR} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^3)$ ذي الرتبة R وعلى أفتراض أنّ $\psi,\delta \neq 0$، يلاحظ عندما $R \longrightarrow 0$ فأن:

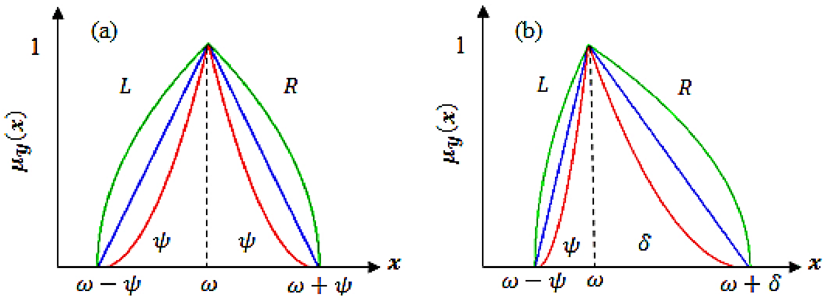
$$\lim_{R\to 0} \mu_{\mathcal{Y}}{}^R(x) \triangleq \begin{cases} 1 & \text{if } x = \omega \\ 0 & Otherwise \end{cases}$$

أما عندما $R \longrightarrow \infty$ فأن:

$$\lim_{R\to \infty} \mu_{\mathcal{Y}}{}^R(x) \triangleq \begin{cases} 1 & \text{if } x \in [(\omega-\psi),(\omega+\delta)] \\ 0 & Otherwise \end{cases}$$

أي كلما أقتربت البيانات إلى أشد دقتها يتحول الرقم الضبابي الثلاثي إلى رقم تقليدي حقيقي مساوي لقيمة الوسط الحسابي لمجموعة المركز بينما كلما أقتربت البيانات إلى أشد عدم دقتها يتحول الرقم الضبابي الثلاثي إلى فترة معرفة على مجموعة السند، أنّ النتيجة (1.3) في أعلاه يمكن تعميمها إلى حالات أكثر تعقيداً عندما تكون دالتي الشكل ليمين $R(x)$ و يسار $L(x)$ دالة الأنتماء تمتلك درجات منحنى شكل R مختلفة.

شكل (1): التمثيل الهندسي لدالة الأنتماء الثلاثية المتماثلة $(\psi = \delta)$ (a) والثلاثية غير المتماثلة $(\psi \neq \delta)$ (b) مع منحنيات أنتماء مختلفة [من إعداد الباحث].



5.3 الأنتروبي الضبابي Fuzzy Entropy

يُعرَّف الأنتروبي الضبابي على أنهُ دالة قياس الضبابية التي تعبر عن مقدار معدل الغموض والألتباس في عملية أتخاذ أي قرار ضمن بيئة ضبابية وأيضاً يُعرَّف بأنه كمية المعلومات التي تم فقدانها في عملية تحويل الأرقام التقليدية الى أرقام ضبابية [4],[11]، كما من معروف أنهُ كلما كبرت قيمة الأنتروبي دلّ هذا على أتساع الأنتشار للمجموعة الضبابية والعكس صحيح.

ليكن الأقتران $e(\mu_{\mathcal{A}}(x)) : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ يمثل دالة الأنتروبي الضبابي للمجموعة الضبابية $\mathcal{A}$، فعند قيمة x معينة يتبين بأنّ دالة الأنتروبي تتزايد بشكل رتيب في الفترة $[0,1/2]$ و تتناقص بشكل رتيب في الفترة $[1/2,1]$ ، تأخذ دالة الأنتروبي الضبابي e أشكالاً عديدة الا أنَّ أشهر صيغة لها يمكن تعريفها كالآتي [12]:

$$e(\mu_{\mathcal{A}}(x)) \triangleq \mu_{\mathcal{A}}(x)\, ln\left(\frac{1}{\mu_{\mathcal{A}}(x)}\right) + (1-\mu_{\mathcal{A}}(x))\, ln\left(\frac{1}{1-\mu_{\mathcal{A}}(x)}\right) \quad (6)$$

إذ أنَّ الدالة (2.16) تُعرَف بأسم دالة شانون (Shannon function) ومن أجل تحديد قياس أنتروبي مطلق E مستقل عن قيم x يتم تكامل الأنتروبي e على جميع مجال الفضاء $\mathcal{K}(\mathbb{R}^m)$ المعرفة فيه دالة الأنتماء التي يفترض أنْ تكون قابلة للتكامل وكالآتي:

$$E_{(\mathcal{A}_{(x)})} = \int_{x \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^m)} e\left(\mu_{\mathcal{A}_{(x)}}\right) \mathcal{P}(x)\, dx \qquad (7)$$

إذ أنَّ $\mathcal{P}(x)$ تمثل دالة كثافة أحتمالية لمجموعة البيانات المتوفرة حول الفضاء $\mathcal{K}(\mathbb{R}^m)$ والتي عادةً ما تفرض كتوزيع منتظم (Uniform distribution) $\mathcal{P}(x) = k$ [4] أي تفرض على أنها كمية ثابتة (Constant). إنّ من أهمية دوال الأنتروبي الضبابية كما سبق ذكره سابقاً هي وصف مقدار كمية الضبابية وعليه تم تطبيق دوال الأنتروبي الضبابية كمؤشر أبسط لوصف ضبابية الأرقام الضبابية عوضاً عن أستخدام دوال الأنتماء [4]، إذن بالعودة إلى الرقم الضبابي الثلاثي المعرف في (2.8) فأن دالة الأنتروبي (7) سيتم تجزئتها إلى مركبتين الأولى للجزء المتزايد $[\omega - \psi, \omega)$ والثانية للجزء المتناقص $(\omega, \omega + \delta]$ كما موضح في أدناه:

$$E_{(y^R{}_{(x)})} = k\left[\int_{x \in [\omega-\psi,\omega)} e\left(\mu_y{}^R(x)\right) dx + \int_{x\in(\omega,\omega+\delta]} e\left(\mu_y{}^R(x)\right) dx\right] \qquad (8)$$

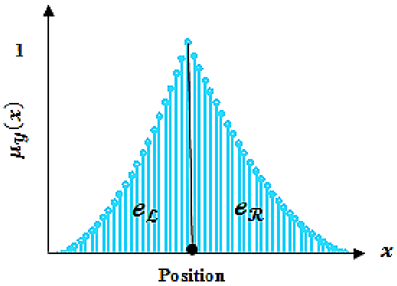
يدعى الحد الأول والثاني في المعادلة (8) بالأنتروبي الضبابي من جهة اليسار $e_{\mathcal{L}}$ والأنتروبي الضبابي من جهة اليمين $e_{\mathcal{R}}$ على التوالي و الذي تمكن الباحث من تمثيلهُ بالشكل الآتي:

$$E_{(y_{(x)})} \triangleq \left[e_{\mathcal{L}} \triangleq \int_{-\infty}^{m} e(L(x))\, dx < +\infty\right] + \left[e_{\mathcal{R}} \triangleq \int_{m}^{\infty} e(R(x))\, dx < +\infty\right] \qquad (9)$$

إذ أنّ m تمثل النقطة أو الفترة التي تكون فيها دالة الانتماء مساوية للواحد $\mu_y(x) = 1$. يجدر الأشارة هنا بأنَّ دالة الأنتروبي الضبابية الكلية $E_{(y^R{}_{(x)})}$ تعتمد بشكل تام على الأنتشار فقط ، علاوة على هذا أنّ الأنتروبي من جهة اليمين والأنتروبي من جهة اليسار يكون متساوي $e_{\mathcal{L}} = e_{\mathcal{R}}$ في حالة أستخدام أرقام ضبابية متماثلة.

إنَّ دالة الأنتماء للأرقام الضبابية التي تمثل ضبابية الأرقام الضبابية تكون رتيبة على جهتي قيم الوسط التي تتجمع حولها أعلى قيم لدالة الأنتماء ووفقاً لهذا أقترح كل من [4] أنهُ بالأمكان تغير الوصف السابق لأي رقم ضبابي عن طريق أبدال قيمة الوسط بالموقع الذي تتجمع حولهُ أعلى قيم الأنتماء و وصف الضبابية عبر دوال الأنتروبي التي تعرف أيضاً بأنها رتيبة حول قيم الموقع، فضلاً عما سبق إن هذه الطريقة تتميز بقابليتها للتطبيق لجميع الأرقام الضبابية ذات الرابط واحد لواحد (One-to-one correspondence) بين دالة الأنتماء و قياس الأنتروبي، مما جعل الأرقام الضبابية تتحدد بشكل فريد (Unique) بثلاث صفات هي الموقع والأنتروبي من جهة اليمين والأنتروبي من جهة اليسار والعكس بالعكس أي عبر الموقع والأنتروبي من جهة اليمين والأنتروبي من جهة اليسار يمكننا وصف الأرقام الضبابية بشكل فريد. أي بناءاً على هذا الأساس فأن الرقم الضبابي الثلاثي $y^R = (\omega; \psi, \delta)_{LR}$ يوصف بثلاث سمات هي الموقع المتمثل بقيمة الوسط ω (مجموعة المركز) عندما $\mu_y{}^R(x) = 1$ والأنتروبي من جهة اليسار $e_{\mathcal{L}}$ والأنتروبي من جهة اليمين $e_{\mathcal{R}}$ أي أنّ $y^R = \{\omega, e_{\mathcal{R}}, e_{\mathcal{L}}\}$.

شكل (2): التمثيل الهندسي لرقم ضبابي ثلاثي بالإعتماد على الموقع ودوال الأنتروبي [من إعداد الباحث].



ومن خلال استخدام الموقع والأنتروبي بدلاً عن دوال الأنتماء يرى الباحث أنّ مساهمتها كبيرة جداً في وصف الرقم الضبابي إذ تم جعل عناصر الرقم الضبابي تعتمد على قيم غير ضبابية (Crisp) كما موضح في الشكل (2)، أي أصبح الرقم الضبابي يوصف بعدد من القيم المعرفة في الفضاء الحقيقي وبالتالي تحررت الأرقام الضبابية من القيود المفروضة على العمليات الحسابية في الفضاء (L-R). علاوة على هذا أن تكامل دوال الأنتروبي لمجال الفضاء المعرف عليه الرقم الضبابي جعلها تتأثر بدرجة منحنى دالة الأنتماء للرقم الضبابي (نوع عدم الدقة) فصار قياس الضبابية للرقم الضبابي يعبر عن نوع وكمية عدم الدقة سوية على خلاف الطرق التقليدية التي تستخدم دوال الأنتماء إذ لا تتأثر على الأطلاق بنوع عدم الدقة ويصب الأهتمام على قيمة الأنتشار حصراً عند التطبيق.

6.3 معيار كمي عددي Scalar Metric

يعرّف الأقتران الموجب Δ على أنه معيار كمي عددي* في $\mathcal{K}(\mathbb{R}^m)$:

$$\Delta: \mathcal{K}(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{K}(\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^+$$

و يدعى $(\mathcal{K}(\mathbb{R}^m), \Delta)$ بالفضاء المتري، إذا حققت Δ الشروط الآتية لكل المجموعات الضبابية الثلاث (10)

$\mathcal{A}, \mathcal{A}^*, \mathcal{A}' \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^m)$ [13]:

1. عدم السالبية (التطابق): $\Delta(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*) \geq 0 \; (0 \; if \; \mathcal{A} = \mathcal{A}^*)$
2. التناظر: $\Delta(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*) = \Delta(\mathcal{A}^*, \mathcal{A})$
3. متباينة المثلث: $\Delta(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*) \leq \Delta(\mathcal{A}, \mathcal{A}') + \Delta(\mathcal{A}', \mathcal{A}^*)$

في حالة عدم تحقق شرط التطابق فأن الأقتران يدعى بمعيار زائف (Pseudometric) أما إذا لم يتحقق شرط متباينة المثلث حينها يدعى الأقتران بشبه المعيار(Semimetric).

تستخدم المعايير (Metrics) بشكل عام لقياس درجة التقارب (التباعد) بين نقطتين أو بين مجموعتين سواء كانت تقليدية أمْ ضبابية و أن أشتقاق معيار مناسب للمجموعات الضبابية على وجه الخصوص يعد اساساً لتحقيق أداء أفضل في العديد من التطبيقات مثل: معالجة الأشارة، الإنحدار، العنقدة، الترتيب ...الخ والتي غالباً ما يُستخدم في هذه التطبيقات معايير تعد تعميماً للمعايير التقليدية بوصفها مقبولة جداً في حالة تحليل البيانات غير الدقيقة، كما من الجدير بالذكر أن مشكلة إيجاد معيار للمجموعات الضبابية يعطي نتيجة مرضية بشكل كامل لم يتم حلها بعد [14]، إذ أن ما يتحقق في الحالة الخاصة (التقليدية) ليس بالضرورة أن يكون قابل للتعميم في الحالة العامة (الضبابية).

* يدعى بمعيار كمي عددي لأن ناتجه كمية عددية غير ضبابية وكذلك ليتم التفرقة بينهُ وبين المعايير الضبابية (Fuzzy metrics) أما لغرض الأختصار سيتم تسميته بالمعيار فقط.

إنّ أشهر معيارين للمجموعات الضبابية هي تعميم لمعيارين تقليديين تخص المجموعات المحدبة و المتراصة (Compact and convex sets)، يتم هذا التعميم بالإعتماد على مجموعات المستوى $-\alpha$ التي تمثل بدورها مجموعات محدبة ومتراصة، إذ يمكن بناء المعيار وفق تكامل الفترة $\alpha \in [0,1]$، نبتدأ بمعيار هاوسدورف (Hausdorff metric) الذي يعرف للمجموعتين الضبابيتين $M,N \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^m)$ كما موضح فيما يأتي:

$$\Delta_h(M,N) \triangleq \begin{cases} \sqrt[h]{\int_0^1 \left(\Delta_H(M^\alpha,N^\alpha)\right)^h d\alpha}\,, & h \in [1,\infty) \\ \overset{*}{\sup_{\alpha\in[0,1)}} \Delta_H(M^\alpha,N^\alpha)\,, & h = \infty \end{cases} \qquad (11)$$

إذ أنَّ $\Delta_H(M^\alpha,N^\alpha) = \|M^\alpha,N^\alpha\|_H$ وM^α,N^α تمثل المستوى $-\alpha$ للمجموعتين الضبابيتين M,N على التوالي. أما المعيار الآخر فهو معرف في الفضاء (L_2) بدلالة دالة الأسناد التي تحدد بشكل فريد للمجموعة المحدبة و كالآتي:

$$\Delta_s \triangleq \sqrt{p\int_0^1 \int_{S^{p-1}} v\left(s_M(u,\alpha) - s_N(u,\alpha)\right)^2 du\, d\alpha} \qquad (12)$$

إذ أن v يمثل مقياس ليبيج (Lebesgue measure)، $s_M(u,\alpha)s_N(u,\alpha),$ تمثل دالة الإسناد للمجموعة الضبابية M وN على التوالي و التي يمكن وصفها عبر المستوى $-\alpha$ للمجموعة الضبابية كالآتي:

$$s_M(u,\alpha) = \sup_{m^\alpha \in M^\alpha} \langle m^\alpha,u\rangle \quad \forall\, \alpha \in [0,1];\; u \in S^{p-1}$$

$$s_N(u,\alpha) = \sup_{n^\alpha \in N^\alpha} \langle n^\alpha,u\rangle \quad \forall\, \alpha \in [0,1];\; u \in S^{p-1}$$

إذ أنّ: $\langle\cdot,\cdot\rangle$ يمثل الضرب الداخلي في $\mathbb{R}^p$ و S^{p-1} تمثل وحدة كروية ذات بعد$(p-1)$ في $\mathbb{R}^p$.

إنَّ المعيارين السابقين (11) و (12) معرفة بشكل عام للمجموعات الضبابية لكن يمكن تبسيطها عبر أشتقاق عدة معايير خاصة بأستخدام أرقام ضبابية معينة ولمزيد من التفاصيل أنظر [16],[15]. كلا المعيارين السابقة لها أهميتها النسبية عند التطبيق لكن يمكن ملاحظة بعض العيوب فيهما إذ أنَّ معيار هادورسوف يعطي لكل نقطة في المجموعة الضبابية الوزن نفسه و لا يوجد أي حضور لتأثير نوع عدم الدقة بينما المعيار الأخير قد حل هذه المشكلة لكن قد تم تعريفه بوساطة دالة الأسناد هذا يجعل كِلا المعياريين غير ملائمة في حالة أستخدامنا لطريقة التضبيب التي تعتمد على الموقع و الانتروبي، مما حث الباحث على أقتراح تعريف معيار موزون جديد في الفضاء L^2 بين رقمين ضبابين وعلى وجه التحديد بين رقمين ثلاثيين كما يمتلك هذا المعيار القدره على الأخذ بعين العناية تأثير شكل منحنى دالة الأنتماء بكونها خطية أو تربيعية أو أسية أو أي شكل آخر، فضلاً عن سهولتهِ في الحساب عند التطبيق.

للرقمين الضبابيين الثلاثيين $\mathcal{Y}^{R} = \{\omega, e_{\mathcal{R}}, e_{\mathcal{L}}\}$ $\in \mathcal{F}(\mathbb{R}^3)$ $\mathcal{Y}^{R*} = \{\omega^*, e_{\mathcal{R}}{}^*, e_{\mathcal{L}}{}^*\}$, وعلى أفتراض أن كل منهما مرصود في مجموعة ذات n من الوحدات فأن الأقتران الآتي $\Delta: \mathcal{F}(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{F}(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}^+$ يمثل معيار في $\mathcal{F}(\mathbb{R}^3)$ كما موضح في أدناه:

$$\Delta = \sqrt{[w_{\omega}\|\omega - \omega^*\|^2 + w_{\mathcal{R}}\|(\Gamma e_{\mathcal{R}} - \Gamma e_{\mathcal{R}}{}^*)\|^2 + w_{\mathcal{L}}\|(\Pi e_{\mathcal{L}} + \Pi e_{\mathcal{L}}{}^*)\|^2]} \quad (13)$$

إذ أنّ: $w_{\omega}, w_{\mathcal{L}}, w_{\mathcal{R}} \in \mathbb{R}^+$ تمثل أوزان أعتباطية، $\Gamma = diag(\mathcal{J}_{\mathcal{L}})$ و $\Pi = diag(\mathcal{J}_{\mathcal{R}})$ يمثلان مصفوفتان معرفة موجبة (Positive definite matrices) ذات حجم n و أن كل من $\mathcal{J}_{\mathcal{L}_{ii}}$ و $\mathcal{J}_{\mathcal{R}_{ii}}$ يدل على تأثير شكل منحنى دالة الأنتماء من جهة اليسار واليمين على التوالي والتي من شأنها أن تقلل أو تزيد من تأثير الضبابية في حساب المعيار بمعنى آخر أنها تمثل نوع عدم الدقة لدالة الأنتماء فبالعودة إلى (2.8) و (2.9) أن عدم الدقة يمكن تمثيلها بشكل خطي، تربيعي، جذر تربيعي إذا كانت R =1 ,2 ,0.5 على التوالي ويتم حساب هذا التأثير كما موضح فيما يأتي:

$$\mathcal{J}_{\mathcal{L}} = \int_0^1 L^{-1}(\varpi)\ d\varpi \quad (14)$$

$$\mathcal{J}_{\mathcal{R}} = \int_0^1 R^{-1}(\varpi)\, d\varpi \quad (15)$$

وعلى أفتراض أن شكل منحنى دالة الأنتماء متساوي لجهة اليمين واليسار فأن[9]:

$$R^{-1}(\varpi) = L^{-1}(\varpi) = \begin{cases} (1-\varpi)^{\frac{1}{R}} & 0 < \varpi < 1 \\ 0 & Otherwise \end{cases} \quad (16)$$

إنّ السبب الرئيس لإضافة الأوزان الاعتباطية هو لتقليل هيمنة اختلاف القياسات بمحاولة لتقليل تباين البيانات سوآء في الرقم الضبابي الثلاثي أو الرباعي عند حساب المعيار من أجل ضمان دقة أكثر كما يلاحظ أنهُ في حالة جعل جميع الأوزان مساوية للصفر فأنّ أي تأثير للأوزان سيهمل بينما في حالة استخدام رقم ضبابي متماثل عندها سيتساوى وزن كل من أنتروبي اليمين وانتروبي اليسار $w_{\mathcal{R}} = w_{\mathcal{L}}$. ولغرض أثبات المعيار المقترح في (13) أعدّ الباحث النظريتين الآتيتين:

نظرية (1.3): بأفتراض أنّ $\mathcal{F}(\mathbb{R}^3)$ تمثل مجموعة غير خالية فأنّ الزوج المرتب $(\mathcal{F}(\mathbb{R}^3), \Delta)$ يمثل فضاء متري للمعيار في (13).

نظرية (2.3): إنّ الزوج المرتب $(\mathcal{F}(\mathbb{R}^3), \Delta)$ يمثل فضاء متري تام للمعيار في (13).

4. الإنحدار الخطي الضبابي Fuzzy Linear Regression

يهدف التحليل التقليدي لنماذج الأنحدار بدراسة الأعتمادية الإحصائية عن طريق نمذجة دالة غير معلومة بفرض أنْ تمثل هذه الدالة أفضل موائمة لمجموعة البيانات المعطاة، ويبنى هذا التحليل عادةً على أساس عدم التأكد الذي يعزى إلى العشوائية المعرّفة وفق توزيع إحتمالي معين تحت شرط أن تكون البيانات دقيقة، لكن في الواقع غالباً ما تحتوي بيانات التحليل الخاصة بالظواهر على مصادر عدم الدقة وقد لا نبالغ إذ قلنا أنَّ جميع مصادر البيانات في يومنا الحاضر لا تخلو من تدخل الأستنتاجات والتقديرات البشرية، عليه وبهذا الشرط يهمل التحليل التقليدي مصادر عدم الدقة مما يؤدي إلى خسارة كمية من المعلومات كان بالأمكان أستغلالها لدعم التحليل [17] ومن ثم فأنّ الأنموذج لن يمثل أفضل موائمة لمجموعة البيانات المعطاة.

في هذه الحالة وجب تعميم بناء وتحليل النماذج التقليدية بشكل يجعلها تمتلك القدرة على تزويد العلاقة الإعتمادية بمعلومات تتعلق بعدم الدقة، هنا تظهر أهمية ما يدعى بنماذج الإنحدار الضبابية التي تستخدم لتحليل العلاقات ذات الطابع الضبابي أو العلاقات ذات البيانات الضبابية، أما فيما يتعلق بنماذج الإنحدار الخطية الضبابية فيمكن اعتبارها كأمتداد لأساليب الإنحدار الخطي التقليدية في بناء دالة خطية لكن ضمن محيط ضبابي.

يضاف على ما سبق، إنّ نماذج الإنحدار الضبابية تتميز بعدد من الخصائص جعلها تتخلص من قيود الطرائق التقليدية، إذ تلخيص أهم الأسباب الرئيسية لأستخدام الإنحدار الخطي الضبابي عوضاً عن الإنحدار الخطي التقليدي كالآتي [18]:

1. عندما يكون حجم العينة غير كافي لدعم تحليل الإنحدار التقليدي.
2. عندما لا يمكن تحقيق فرضيات التوزيعات الإحصائية.
3. عندما يتدخل الحكم والفكر البشري فيصبح المخرج و/أو المدخلات ضبابية.
4. إذا كانت هيكلية أنموذج الإنحدار التقليدي ضعيفة.
5. إذا كانت الأخطاء ترتبط مع هيكلية الأنموج ومع غموض الإدراك البشري للأنموذج على نقيض نماذج الإنحدار التقليدية التي ترتبط أخطائها مع المشاهدات.

هنالك العديد من الحالات الممكنة في بناء أنموذج إنحدار خطي ضبابي لكن تمكن الباحث من وضع الصيغة العامة لهُ بالشكل الاتي:

$$\mathcal{Y}^R \approx \bigoplus_{u=0}^{k} \left(\bigotimes_{u=0}^{k} \theta_u f_u \right) \tag{17}$$

إذ أنّ $f_0 = 1$، وعليه فأنّ المُخرج الضبابي $\mathcal{Y}^R$ يتم وصفهُ بنفس الأساليب التقليدية أي بشكل مجموع المدخلات الضبابية f الموزونة بالمعلمات الضبابية θ، من الواضح أنهُ يمكن أشتقاق حالات عديدة من المعادلة (2.34) في أعلاه إذ أي من المُخرج و/أو المدخلات و/أو العلاقة بين المُخرج والمدخلات قد تكون ضبابية أو غير ضبابية ولمزيد من المعلومات راجع [19].

بشكل عام تأخذ نماذج الإنحدار الضبابية إتجاهين مختلفين كما سبق توضيحهُ في الفصل الأول، يتمثل الأتجاه الأول بأساليب البرمجة الرياضية والتي يمكن أن تصاغ بالنحو الآتي [18]:

$$\begin{aligned} &\min \mathcal{V} \\ &\text{subject to } \mathcal{P}_t \supseteq \mathcal{O}_t \qquad ;\forall t \end{aligned} \tag{18}$$

إذ أنَّ $\mathcal{V}$ تمثل قياس الغموض المراد تقليله و $\mathcal{P}_t, \mathcal{O}_t$ تمثل المشاهدات والمشاهدات التقديرية على التوالي، ويهدف هذا الأسلوب إلى تقليل ضبابية الأنموذج وفق قيد أن تكون المشاهدات التقديرية تحتوي على جميع المشاهدات الفعلية ضمن حدود معينة. أما الأتجاه الثاني فيتمثل بالأساليب المشابهة لأساليب المربعات الصغرى الأعتيادية والتي يمكن صياغتها كالاتي [18]:

$$\min \sum_t \delta^2(\mathcal{O}_t, \mathcal{P}_t) \tag{19}$$

إذ أنّ δ يمثل معيار مناسب بين المشاهدات والمشاهدات التقديرية، وكما في أساليب المربعات الصغرى التقليدية يهتم هذا الأسلوب بتقليل مربع معيار مناسب بين المشاهدات وقيمها التقديرية.

بغض النظر عن مدى أفضلية أستخدام نماذج الإنحدار الضبابية على التقليدية في الكثير من الحالات إلا أنها عانت من أنتقادات شديدة ولاسيما هيكلية البرمجة الخطية للأنموذج (18) بسبب تحسسها الشديد للقيم الشاردة وعدم السماح لجميع المشاهدات بالمساهمة في عملية التقدير فضلاً عن زيادة الضبابية بإزدياد حجم العينة وللتغلب على هذه الهفوات تم تطوير الأنموذج من قبـل عـدد من الباحـثين بأستخدام البرمـجـة متـعـددة الأهــداف (Multi-objective programming)، هذا على عكس الأساليب المشابه للمربعات الصغرى فأنها لم تعاني انتقادات كثيرة على الرغم من تعقيدها الحسابي وربما يعود السبب إلى تشابهها الكبير مع الأساليب التقليدية وقلة الفروق بين المشاهدات والمشاهدات التقديرية الناتجة عنها [20]، على هذا الأساس سنهتم في هذا البحث بالأسلوب الثاني لتقدير المعلمات المجهولة لأنموذج الإنحدار الخطي الضبابي.

5. أنموذج الإنحدار الخطي الضبابي المكيف AFLRM

لنفترض بأنّ المدخلات $f_{i1}, f_{i2}, \dots, f_{ik}$ تتمثل بقيم غير ضبابية والمُخرج y^R يتمثل بقيم ضبابية لعينة ذات حجم n فأنّ الباحث تمكن من كتابة خط الإنحدار الضبابي بأستخدام العمليات الحسابية للأرقام الضبابية كالآتي:

$$y^R \approx \bigoplus_{u=0}^{k} . \theta_u . f_u \tag{20}$$

تتمثل الأساليب المعتادة لتقدير خط الإنحدار الضبابي ببناء عدد من النماذج الفرعية لكل من مجموعة المركز والأنتشار، الأنموذج (20) المذكور انفا يعد حالة خاصة من الأنموذج (19) وتحت مجموعة من القيود للعمليات الحسابية الضبابية فأن كل أنموذج فرعي يمكن تقديره بوسطة إيجاد مقدرات المربعات الصغرى الخاصه به.

من الخطأ الشائع الذي قد يقع فيه العديد من الباحثين هو أستخدام أسلوب المربعات الصغرى الأعتيادية على كل أنموذج فرعي من النماذج التي تخص مجموعة المركز والأنتشار بشكل مباشر، إذ تتطلب عملية التقدير عدد من التعقيدات لأجل تحقيق القيود الخاصة بالعمليات الحسابية الضبابية، فلو اعدنا كتابة المعادلة (20) في حالة أستخدام أرقام ضبابية ثلاثية TFN للمُخرج y^R سيتم الحصول على الشكل التالي:

$$y^R \approx \bigoplus_{u=0}^{k} f_u \left\{ \left(\theta^{\omega}; \theta^{\psi}, \theta^{\delta} \right)_{LR} \right\}_u \tag{21}$$

إذ أنّ $\theta^{\omega}; \theta^{\psi}, \theta^{\delta}$ تمثل معلمات النماذج الفرعية لمجموعة المركز والأنتشار في حالة أستخدام أرقام ضبابية ثلاثية $y^R = (\omega; \psi, \delta)_{LR}$ على التوالي.

بالأستناد على العمليات الحسابية للارقام الضبابية فأنّ الأنموذج (21) سيتقيد بأشارة كل من قيم المدخلات والمعلمات وعليه سيتم تجزئة الأنموذج إلى عدد من الحالات، لكن في الحقيقة الأنموذج (21) يمثل منظومة ذات n من المعادلات لكل من أزواج المشاهدات فيبقى السؤال فيما إذا احتوت المعادلة i على معلمات ومدخلات ذات أشارات مختلفة (سالبة و موجبة) فكيف سيتم التقدير بالأعتماد على أسلوب المربعات الصغرى في الفضاء L-R؟ بسبب هذا التعقيد أصبح التطبيق في العديد من الظواهر صعب وغير واقعي.

وعلى نفس فرضية الأنموذج المعرف في (20)، أقترح الباحثان في [21] نوع آخر من نماذج الإنحدار الضبابية تختلف عن الأساليب المعتادة في التقدير والتي تشير عادةً إلى عدم وجود أي علاقة بين النماذج الفرعية، فقد عد الباحثان ديناميكية الأنتشار تعتمد بشكل ما على مجموعة المركز التقديرية وبهذا أصبح الأنموذج قادر على دمج التأثير المحتمل لمجموعة المركز على الأنتشار، سُميّ هذا الأنموذج بأنموذج الإنحدار الخطي الضبابي المكيف ((Adaptive fuzzy linear regression model (AFLRM) وأصبح من النماذج الشهيرة إذ تم مناقشته وتطويره في وقت لاحق من قبل العديد من الباحثين نذكر القليل منهم .[1],[20],[22]

تتلخص طريقة بناء أنموذج الإنحدار الخطي الضبابي المكيف عبر بناء عدد من النماذج الفرعية التي تنقسم على جزئين أساسيين الأول يتمثل ببناء نماذج فرعية على عدد عناصر مجموعة المركز بوساطة نماذج الإنحدار التقليدية أما الجزء الثاني فيتمثل بنمذجة الأنتشار بشكل علاقة إعتمادية على عناصر مجموعة المركز أي بناء أنموذج إنحدار تقليدي للأنتشار بأستخدام عناصر مجموعة المركز كمدخلات وبالتالي تحايل الأنموذج المكيف في عملية التقدير لتجنب العمليات الحسابية المعقدة للمجموعات الضبابية، بالأعتماد على هذا الأساس سوف يتم بناء أنموذج الإنحدار الضبابي المكيف لكن بدلاً عن أستخدام دوال الأنتماء لوصف الضبابية سيتم أستخدام الموقع و الأنتروبي في التقدير أي سنفترض إعتمادية ديناميكية الأنتروبي على الموقع.

1.5 أنموذج إنحدار خطي ضبابي مكيف بأستخدام دالة الانتماء

على فرض أن المُخرج للأنموذج (21) يتمثل برقم ضبابي ثلاثي TFN من الدرجة $\boldsymbol{R}$ $\mathcal{Y}^{R} = (\omega;\psi,\delta)_{LR} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^{3})$ فأن أسلوب AFLRM يتلخص ببناء ثلاثة نماذج فرعية بالوقت نفسه (Simultaneously) وهي أنموذج لمجموعة المركز $\mathcal{C}(\mathcal{Y}^{R}) = \{\omega\}$ وأنموذجين للأنتشار من جهة اليمين ψ واليسار δ كلاهما يعتمد على مجموعة المركز التقديرية، أي كالآتي:

$$
\begin{aligned}
C^{*} &= \mathcal{F}_{x}\Omega \\
\psi^{*} &= C^{*}\lambda_{1} + 1\lambda_{0} \\
\delta^{*} &= C^{*}\alpha_{1} + 1\alpha_{0}
\end{aligned}
\tag{22}
$$

إذ أنّ δ^{*} ,ψ^{*}, C^{*} تمثل متجهات القيم التقديرية ذات n مركبة لكل من مجموعة المركز والأنتشار من جهة اليمين واليسار على التوالي، $\mathcal{F}_{x}$ تمثل مصفوفة التصميم ذات الحجم $n \times p$، Ω تمثل متجه لمعلمات مجموعة المركز ذي p مركبة، $(\delta_{1}, \delta_{o}, \alpha_{1}, \alpha_{o})$ يمثل كل منها معلمة (Scalar) توضح العلاقة بين مشاهدات الأنتشار والمشاهدات التقديرية لمجموعة المركز، 1 يمثل متجه ذي n مركبة جميع مدخلاته متمثلة بالقيمة العددية واحد.

لتقدير الأنموذج (22) المتكون من ثلاث نماذج فرعية أقترح الباحث في [22] أستخدام معيار مناسب (يعتبر تعميم للمعيار الأقليدي) بين المشاهدات والمشاهدات التقديرية، ثم تم أستخدام أسلوب المربعات الصغرى للوصل إلى تقديرات تجعل مربع هذا معيار في أصغره، عليه توصل الباحث إلى مجموعة المقدرات الآتية:

$$
\begin{aligned}
\Omega^{(k+1)} &= \begin{bmatrix} w_{C} + w_{\psi}\left(\lambda_{1}^{(k)}\right)^{2} \\ +w_{\delta}\left(\alpha_{1}^{(k)}\right)^{2} \end{bmatrix}^{-1} (\mathcal{F}_{x}{}'\,\mathcal{F}_{x})^{-1}\mathcal{F}_{x}{}' \begin{bmatrix} w_{C}C \\ +w_{\psi}\lambda_{1}^{(k)}\left(\psi - 1\lambda_{0}^{(k)}\right) \\ +w_{\delta}\alpha_{1}^{(k)}\left(\delta - 1\alpha_{0}^{(k)}\right) \end{bmatrix} \\
\lambda_{1}^{(k+1)} &= \left(\Omega^{(k)\prime}\mathcal{F}_{x}{}'\,\mathcal{F}_{x}\Omega^{(k)}\right)^{-1}\Omega^{(k)\prime}\mathcal{F}_{x}{}'\left[\psi - 1\lambda_{0}^{(k)}\right] \\
\alpha_{1}^{(k+1)} &= \left(\Omega^{(k)\prime}\mathcal{F}_{x}{}'\,\mathcal{F}_{x}\Omega^{(k)}\right)^{-1}\Omega^{(k)\prime}\mathcal{F}_{x}{}'\left[\delta - 1\alpha_{0}^{(k)}\right] \\
\lambda_{0}^{(k+1)} &= n^{-1}1'\left[\psi - \mathcal{F}_{x}\theta\lambda_{1}^{(k)}\right] \\
\alpha_{0}^{(k+1)} &= n^{-1}1'\left[\delta - \mathcal{F}_{x}\theta\alpha_{1}^{(k)}\right]
\end{aligned}
\tag{23}
$$

2.5 أنموذج إنحدار خطي ضبابي مكيف بأستخدام دالة الانتروبي

بطريقة مماثلة للأسلوب المذكو انفاً أستخدمنا TFN في بناء AFLRM لكن بدلاً عن مجموعة المركز والأنتشار تم أستخدام الموقع ودوال الأنتروبي وهكذا فأنّ (2.47) سيعاد معلَمتُها بشكل نماذج فرعية على أعتبار أن المُخرج يوصف بالشكل $\mathcal{Y}^R = \{\omega, e_{\mathcal{L}}, e_{\mathcal{R}}\}$، كما موضح فيما يأتي:

$$\begin{aligned} \omega^* &= \mathcal{F}_x\theta \\ e^*_{\mathcal{L}} &= \omega^*\tau_1 + 1\tau_o \\ e^*_{\mathcal{R}} &= \omega^*\varphi_1 + 1\varphi_o \end{aligned} \qquad (24)$$

إذ أنَّ $e^*_{\mathcal{R}}, e^*_{\mathcal{L}}, \omega^*$ تمثل متجهات القيم التقديرية ذات n مركبة لكل من الموقع والأنتروبي من جهة اليسار واليمين على التوالي، θ تمثل متجه لمعلمات الموقع ذي p مركبة، $(\tau_1, \tau_o, \varphi_1, \varphi_o)$ تمثل معلمات ثوابت (Scalar) توضح العلاقة بين مشاهدات الموقع والمشاهدات التقديرية لدوال الأنتروبي. ولغرض إيجاد تقديرات المعالم المجهولة في (24) أعدّ الباحث النظرية الآتية:

نظرية (3.2.2): المشكلة $\Delta^2_{(w;\theta,\tau_1,\tau_o,\varphi_1,\varphi_o)}$ $\min_{\theta,\tau_1,\tau_o,\varphi_1,\varphi_o}$ تمنح حد أدنى نسبي (Relative minimum) يمكن تحسينهُ بأستخدام خوارزمية حل تكرارية وبالإعتماد على المعيار في (13) فأنّ حل يمكن تمثيلهُ بالمعادلات الاتية:

$$\begin{aligned} \theta^{(k+1)} &= \begin{bmatrix} \mathcal{w}_{\xi}\mathcal{F}_x{}'\,\mathcal{F}_x \\ +\mathcal{w}_{\mathcal{L}}\left(\tau_1^{(k)}\right)^2\mathcal{F}_x{}'\Pi^2\,\mathcal{F}_x \\ +\mathcal{w}_{\mathcal{R}}\left(\varphi_1^{(k)}\right)^2\mathcal{F}_x{}'\Gamma^2\,\mathcal{F}_x \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{w}_{\xi}\mathcal{F}_x{}'\,\omega \\ +\mathcal{w}_{\mathcal{L}}\tau_1^{(k)}\mathcal{F}_x{}'\Pi^2\begin{bmatrix} e_{\mathcal{L}} \\ -\tau_o^{(k)}1 \end{bmatrix} \\ +\mathcal{w}_{\mathcal{R}}\varphi_1^{(k)}\mathcal{F}_x{}'\Gamma^2\begin{bmatrix} e_{\mathcal{R}} \\ -\varphi_o^{(k)}1 \end{bmatrix} \end{pmatrix} \\ \tau_1^{(k+1)} &= \left(\theta^{(k)\prime}\mathcal{F}_x{}'\Pi^2\mathcal{F}_x\theta^{(k)}\right)^{-1}\theta^{(k)\prime}\mathcal{F}_x{}'\Pi^2\left(e_{\mathcal{L}} - \tau_o^{(k)}1\right) \\ \varphi_1^{(k+1)} &= \left(\theta^{(k)\prime}\mathcal{F}_x{}'\Gamma^2\mathcal{F}_x\theta^{(k)}\right)^{-1}\theta^{(k)\prime}\mathcal{F}_x{}'\Gamma^2\left(e_{\mathcal{R}} - \varphi_o^{(k)}1\right) \\ \tau_o^{(k+1)} &= tr(diag(\mathcal{J}_{\mathcal{L}}^{-2}))1'\Pi^2\left[e_{\mathcal{L}} - \tau_1^{(k)}\mathcal{F}_x\theta^{(k)}\right] \\ \varphi_o^{(k+1)} &= tr(diag(\mathcal{J}_{\mathcal{R}}^{-2}))1'\Gamma^2\left[e_{\mathcal{R}} - \varphi_1^{(k)}\mathcal{F}_x\theta^{(k)}\right] \end{aligned} \qquad (27)$$

من أجل حل المعادلات التكرارية في كل من (23) و(27) أقترح الباحث خوارزمية عددية مبسطة عند عتبة (Threshold) معينة ($\epsilon = 10^{-6}$) و بمرحلتين الأولى للتقدير والثانية لأختبار حساسية الأستقرارية للحل، إذ يعود سبب الأختبار لكون عملية التقدير تشابه حال المربعات الصغرى الموزونة التكرارية وغيرها من الأساليب التكرارية [22] قد لا تضمن الحد الأدنى المطلق (Absolute minimum) ولكن مجرد حد أدنى نسبي (Relative minimum) بشكل مؤكد، ويمكن توضيح الخوارزمية المقترحة والمخطط الأنسيابي لها كالآتي:

خـوارزمـيـة المربعـات الصغرى الضبابية التكرارية للأنموذج المكيف

مدخلات الخوارزمية: $\omega \in \mathbb{R}^n,\ e_{\mathcal{L}}, e_{\mathcal{R}} \in (\mathbb{R}^+)^n, \mathcal{F}_x \in \mathbb{R}^{p\times n}$

مخرجات الخوارزمية: المقدرات التي تضمن على الأقل الحد الأدنى النسبي وكالآتي

$$\theta, \tau_1, \tau_o, \varphi_1, \varphi_o \triangleq arg\,inf\left(\Delta^2(\omega; \theta, \tau_1, \tau_o, \varphi_1, \varphi_o)\right)$$

التهيئة: $1 \leq k \leq N$; $p^k \in \mathbb{R}$ إذ أنّ $p^k = \{\theta^k, {\tau_1}^k, {\tau_o}^k, {\varphi_1}^k, {\varphi_o}^k\} \neq \emptyset$

التـكـــرار:

- **المرحلة الأولى (مرحلة التقدير)**

← **الخطوة الأولى: أستخدم p^k لتقدير p^{k+1}**

← **الخطوة الثانية: حدث p^k إلى p^{k+1}**

← **الخطوة الثالثة: $c = p^{k+1} - p^k$**

← **الخطوة الرابعة: (i) إذا تحقق $Pr(|c| \leq \epsilon) = 1$، أوقف حلقة التكرار والتقديرات تتمثل بقيم p^{k+1}**

(ii) إذا كان $Pr(|c| \leq \epsilon) \neq 1$، نعود للخطوة الثانية وتستمر عملية التكرار حتى يتم تحقيق معيار التقارب في (i)

- **المرحلة الثـانـية (مرحلة أختبار حساسية الأستقرارية)**

← **الخطوة الأولى: أختر مجموعة مختلفة عن p^k المستخدمة في المرحلة الأولى**

← **الخطوة الثانية: كرر المرحلة الأولى حتى يتحقق معيار التقارب**

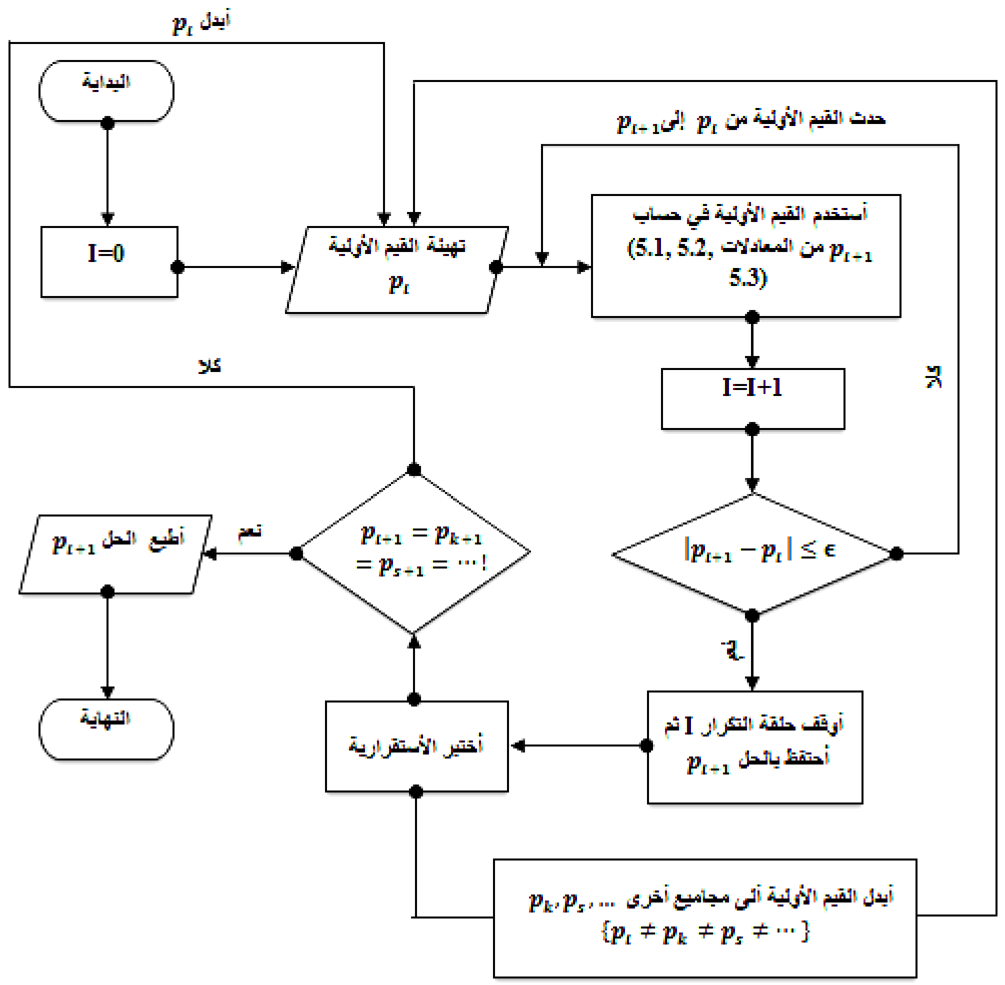
← **الخطوة الثالثة: إذا تساوت المقدرات في المرحلتين أذن الحل مستقر فيما عداه أبدل p^k حتى يُضمن تساوي تقديرات المرحلتين**

من الواضح أنّ الأنموذجين في (22) و (24) لا توفر معلمات ضبابية، لكن بما أنّ المخرج ضبابي والمدخلات غير ضبابية فأنّ كلا الأنموذجين يحتويان ضمنياً على معلمات ضبابية تمثل قياس درجة عدم الدقة في الأنموذجين أو بمعنى آخر تمثل علاقة الأنتشار والأنتروبي بالمدخلات، على هذا الأساس قد أقترح [1] دالة أنموذج ضمنية للأنموذج (22) وذلك عن طريق إعادة هيكليته بشكل يتماشى مع العمليات الحسابية للأرقام الضبابية، وكما موضح في فيما :

$$\begin{aligned} C^* &= \mathcal{F}_x\beta_C + \iota_C \\ \psi^* &= |\mathcal{F}_x|\beta_\psi + \iota_\psi \\ \delta^* &= |\mathcal{F}_x|\beta_\delta + \iota_\delta \end{aligned} \qquad (28)$$

إذ أنّ $|\mathcal{F}_x|$ تمثل مصفوفة التصميم ذات المدخلات $|f_{ik}|$، $\beta_\delta, \beta_\psi, \beta_C$ تمثل معلمات مجموعة المركز والأنتشار من اليسار واليمين على التوالي، $\iota_\delta, \iota_\psi, \iota_C$ تمثل البواقي لكل من مجموعة المركز والأنتشار من اليسار واليمين على التوالي.

شكل (3): المخطط الأنسيابي لحل خـوارزمـيـة المربعـات الصغرى الضبابية التكرارية للأنموذج المكيف [من إعداد الباحث].



إنّ المعادلات في (28) قد لا تحقق الحل التكراري في (22) لكن يمكن الأستفادة منها لغرض الحصول على تقديرات متوافقة مع المعادلات في (22)، وبتوظيف أسلوب المربعات الصغرى الأعتيادية يمكننا الحصول على تقدير لمعلمات الأنموذج الفرعي لمجموعة المركز C^* والتي يمكن أثبات أنها مطابقة لمعلمات الأنموذج الفرعي لمجموعة المركز في (22) كالآتي:

$$\beta_C = (\mathcal{F}_x'\mathcal{F}_x)^{-1}\mathcal{F}_x'C^* = (\mathcal{F}_x'\mathcal{F}_x)^{-1}\mathcal{F}_x'\mathcal{F}_x\theta = \theta$$

أما بالنسبة لمعلمات الأنموذجين الفرعية للأنتشار في (22) فيتم البحث عن تقديرات موجبة حتى يكون ناتج ضرب مصفوفة موجبة مع متجه موجب يتمثل بمتجه موجب بسبب $\psi, \delta \in (\mathbb{R}^+)^n$، وعليه أقترح الباحث تعيين خوارزمية المربعات الصغرى غير السالبة (Non-negative least squares) لإيجاد هذه التقديرات.

لغرض أيجاد الحل الأمثل بأستخدام خوارزمية المربعات الصغرى غير السالبة (NNLS) في إيجاد معلمات النماذج الفرعية للأنتشار من جهة اليسار واليمين في (28) يتم تطبيق البرمجة التربيعية تحت ظل قيود ((Karush-Kuhn-Tucker (KKT))، فإذا كانت مصفوفة التصميم والمُخرج متمثلة بالشكل $\mathcal{F}_x \in \mathbb{R}^{p\times n}$ و $\gamma \in \mathbb{R}^n$ على التوالي، فأنّ مشكلة إيجاد متجه غير سالب $\beta \in (\mathbb{R}^+)^p$ لتصغير مربع المعيار بين المشاهدات γ والمشاهدات التقديرية $\mathcal{F}_x\beta$ يمكن تمثيلهُ كما يأتي [24]:

$$\min_{\beta} \Delta^2(\beta) = \frac{1}{2}\|\mathcal{F}_x\beta - \gamma\|^2 \qquad (29)$$

$$subject\ to\ \beta \geq 0$$

إنّ الخوارزمية الأساس لحل مشكلة المربعات الصغرى غير السالبة قد تم وضعها من قبل [23] وتعتمد هذه الخوارزمية على أسلوب المجموعة الفعّالة (Active set method) أي تعمل على حل مجموعة صغيرة من القيود الفعّالة لتحقق الحل بشكل تام، فعلى فرض ان هناك p من القيود المتباينة في مشكلة NNLS وكان التقدير للمعلمة i سالب عندها يقال بأنَّ القيد i يمثل قيد فعّال (Active constraint) وفيما عدا هذا يقال بأن القيد غير فعّال (Passive constraint).

يمكن تمثيل خوارزمية المربعات الصغرى غير السالبة لمصفوفة التصميم $\mathcal{F}_x^{P}$ المرتبطة بالمدخلات المتواجدة في المجموعة الفعالة P [24]، كالآتي:

خـوارزمـيـة لوسون وهانسون لحل NNLS

مدخلات الخوارزمية: $\mathcal{F}_x \in \mathbb{R}^{p\times n},\ \gamma \in \mathbb{R}^n$

مخرجات الخوارزمية: $\beta \triangleq arg\,min\ \|\mathcal{F}_x\beta - \gamma\|^2$ إذ أنّ $\beta \geq 0_p$

التهيئة: $P \neq \emptyset,\ \ Q = \{1,2,\dots,n\},\ \ \beta = 0_p,\ \ \mathbf{w} = \mathcal{F}_x{}'(\gamma - F\beta)$

التكرار:

← الخطوة الأولى: أبدأ بالشروع إذا كانت $Q \neq \emptyset \wedge \left[\max_{i\in Q}(w_i) > \epsilon\right]$

← الخطوة الثانية: $j \triangleq arg\max_{i\in Q}(w_i)$

← الخطوة الثالثة: إدراج المؤشر j في P وأزالتهُ من Q

← الخطوة الرابعة: $s^P = \left(\mathcal{F}_x{}^{P'}\mathcal{F}_x{}^{P}\right)^{-1} F^{P'}\gamma$

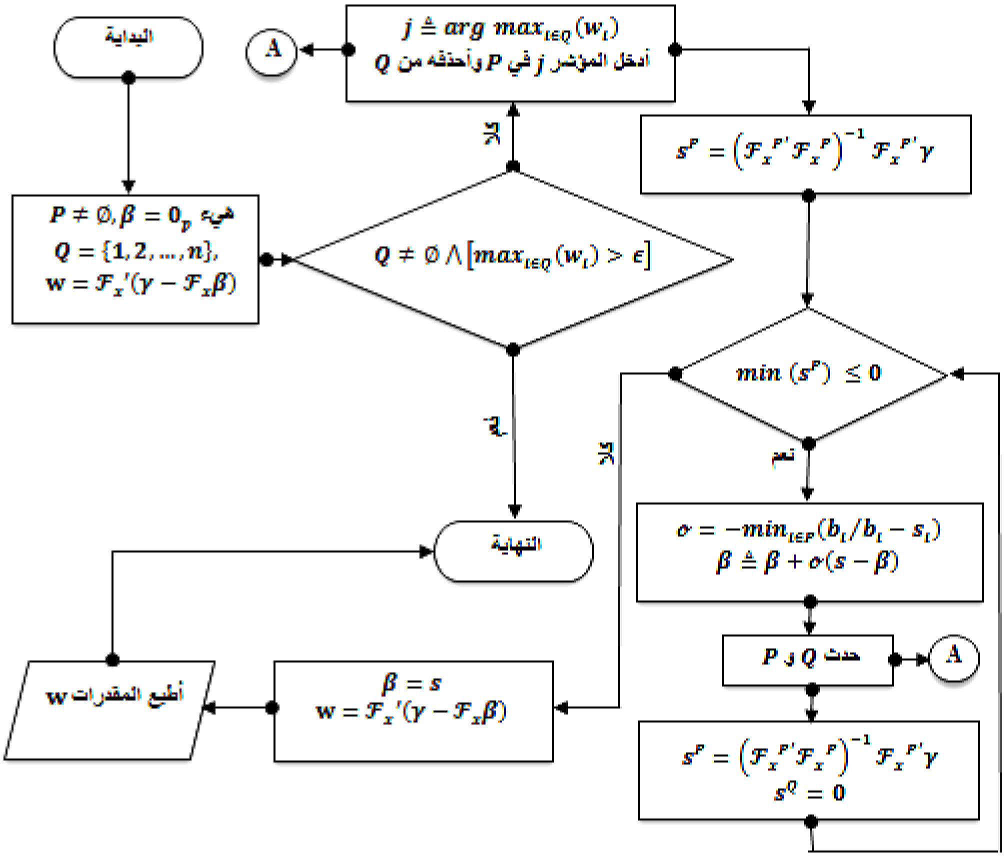
- واصل إذا كانت $min\,(s^P) \leq 0$
- $\sigma = -\min_{i\in P}(b_i/b_i - s_i)$
- $\beta \triangleq \beta + \sigma(s - \beta)$
- حدث قيمة Q و P
- $s^P = \left(\mathcal{F}_x{}^{P'}\mathcal{F}_x{}^{P}\right)^{-1} \mathcal{F}_x{}^{P'}\gamma$
- $s^Q = 0$

← الخطوة الخامسة: $\beta = s$

← الخطوة السادسة: $\mathbf{w} = \mathcal{F}_x{}'(\gamma - \mathcal{F}_x\beta)$

بالنتيجة فأنّ الأنموذج الضمني في (28) تمكنت من أعطائنا فكرة عن تقدير معلمات الأنتشار بشكل تقريبي معقول يتماشى مع العمليات الحسابية للأرقام الضبابية.
إنّ الأنموذجين (24) كذلك لا يوفر معلمات ضبابية لذا فقد أقترحنا وضع إجراء لإيجاد معلمات الأنتروبي التي توضح العلاقة بين الأنتروبي والمدخلات ومن ثم أستغلال هذا الإجراء لتوفير المعلمات الضبابية التي تبين العلاقة بين المُخرج الضبابي والمدخلات غير الضبابية، إذ يمكن تمثيل هذا الأجراء بأعادة كتابة الأنموذج (24) كما مبين فيما يأتي:

شكل (4): المخطط الأنسيابي لحل خـوارزمـيـة لوسون وهانسون [من إعداد الباحث].



$$\omega^* = \theta_0 + \sum_{z=1}^{k} \theta_z f_z$$
$$e_{\mathcal{L}}^* = \tau_1\left(\theta_0 + \sum_{z=1}^{k} \theta_z f_z\right) + \tau_o$$
$$e_{\mathcal{R}}^* = \varphi_1\left(\theta_0 + \sum_{z=1}^{k} \theta_z f_z\right) + \varphi_o \qquad (30)$$

و بإعادة معلمة المعادلتين الأخيرة في (30) نحصل على:

$$\omega^* = \mathcal{F}_x\theta$$
$$e^*_{\mathcal{L}} = \mathcal{F}_x\theta^{\mathcal{L}}$$
$$e^*_{\mathcal{R}} = \mathcal{F}_x\theta^{\mathcal{R}} \tag{31}$$

إذ أنّ:

$$\theta^{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} \tau_1\theta_0 + \tau_o \\ \tau_1\ \theta_1 \\ \vdots \\ \tau_1\theta_k \end{bmatrix}, \qquad \theta^{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} \varphi_1\theta_0 + \varphi_o \\ \varphi_1\ \theta_1 \\ \vdots \\ \varphi_1\theta_k \end{bmatrix}$$

وعليه فأنّ الأنتروبي التقديري في (24) تم نمذجتهُ بشكل خطي على المدخلات مع ضمان دمج تأثير الموقع و هذا عكس ما افترضهُ [20].
أما لقياس أداء الأنموذج قي (24) فقد تم أستخدام مؤشر يعد تعميماً لمتوسط الخطأ المطلق التقليدي لكن في حالة أستخدام بيانات ضبابية، إذ يعرف متوسط الخطأ المطلق وكما يأتي [25]:

$$MAE = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}|\mathcal{O}_i - \mathcal{P}_i| \tag{32}$$

أذ أنّ $\mathcal{O}_i$ و $\mathcal{P}_i$ تمثل القيم المشاهدة والقيم التقديرية على التوالي، ويصف هذا المؤشر دقة التنبؤ عبر قياس مدى قرب المشاهدات عن المشاهدات التقديرية، أما في حالة البيانات الضبابية فقد عمم الباحث المؤشر السابق إلى حالته الضبابية بشكل مشابه لما تم التوصل اليه في [26] وكما موضح بالشكل الآتي:

$$\mathcal{ALSD} = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^{AE} \tag{33}$$

إذ أنّ:

$$\Delta_i^{AE} = [\mathcal{w}_\omega|\omega_i - \omega_i{}^*| + \mathcal{w}_{\mathcal{R}}|e_{\mathcal{R}i} - e_{\mathcal{R}i}{}^*| + \mathcal{w}_{\mathcal{L}}|e_{\mathcal{L}i} + e_{\mathcal{L}i}{}^*|]$$

يضاف على ما سبق أنّ المؤشر يمكن أستخدامه في حالة الأنموذج (22) فقط يتم أبدال الموقع والأنتروبي ومجموعة الأوزان الخاصة بهما بمجموعة المركز والأنتشار ومجموعة الأوزان الخاصة بهما على التوالي.

6. مثال تطبيقي Practical Example

لغرض بيان كفاءة تطبيق الأنموذج المطوّر بأستخدام دوال الأنتروبي ومقارنته بأستخدام دوال الأنتماء سنقوم بتحليل تأثير مكونات الإسمنتُ البورتلاندي ((Portland cement (Pc)) على حرارةِ الإماهةِ (الحرارة الناتجة عن تفاعل المواد المكونة للإسمنت لحين فترة تصلبه)، إذ يمكن تعريف الأنموذج التجريبي بالنحو الآتي:

$$HPc \sim Ta + Ts + Taf \tag{34}$$

إذ أنّ HPc تمثل حرارة الإماهة مقاسة بالسعرات الحرارية لكل غرام من الأسمنت البورتلاندي، Ta يمثل ثلاثي ألومينات الكالسيوم ($Ca_3Al_2O_6$)، Ts يمثل ثلاثي سيليكات الكالسيوم (Ca_3SiO_5)، و Taf يمثل ألومينوفريت الكالسيوم ($Ca_2(Al,Fe)_2O_5$)، علماً بأنّ كل من Ta، Ts و Taf مقاسة كنسب مئوية من وزن الخبث (Clinkers) الذي تم إنتاج الأسمنت منه على التوالي [27]، كما أنّ البيانات المستخدمة في الأنموذج التجريبي موضحة في جدول (1).

جدول (1): بيانات المخرج والمدخلات [جميع المدخلات والمخرج بدون تضبيب مأخوذة من[28] وبتصرف عن [27]].

Obs. i	Output $HPc = (\omega; \psi)_{LL}$	Iutputs Ta	Ts	Taf
1	(78.5, 8.6)	7	26	6
2	(74.3, 8.2)	1	29	15
3	(104.3, 11.5)	11	56	8
4	(87.6, 9.6)	11	31	8
5	(95.5, 10.5)	7	52	6
6	(109.2, 12.0)	11	55	9
7	(102.7, 11.3)	3	71	17
8	(72.5, 8.0)	1	31	22
9	(93.1, 10.2)	2	54	18
10	(115.9, 12.7)	21	47	4
11	(83.8, 9.2)	1	40	23
12	(113.3, 12.5)	11	66	9
13	(109.4, 12.1)	10	68	8

ولأجل أستخدام الموقع والأنتروبي عوضاً عن دوال الأنتماء في التضبيب يتم حساب المعادلات الموضحة في جدول (2)، علماً بأنّ الباحث أفتراض درجة منحنى الأنتماء (الدقة) تتناقص بشكل خطي (معتدل) وبشكل تربيعي (بطيء) لسبب تدخل العديد من المؤثرات الخارجية على عملية تصلب الإسمنت البورتلاندي مما تجعل حرارة الإماهة غير دقيقة، فضلاً عن هذا فأنّ دوال الأنتروبي لدالة اليمين $R(x)$ واليسار $L(x)$ تكون متساوية في حالة أستخدام الرقم الضبابي الثلاثي المعرف في (2.8).

جدول (2): معادلات حساب الأنتروبي حسب درجة الرقم الضبابي الثلاثي [من إعداد الباحث].

Order of TFN's	R=1	R=2
Entropy function	$e_{\mathcal{L}} = \psi/log(4)$	$e_{\mathcal{L}} = (4 - log(16))\psi/log(8)$
	$e_{\mathcal{R}} = \delta/log(4)$	$e_{\mathcal{R}} = (4 - log(16))\delta/log(8)$

وكذلك بحالة بياناتنا المتماثلة $\psi = \delta$ في جدول (1) فأنّ أنتروبي اليمين يساوي أنتروبي اليسار $e_{\mathcal{L}} = e_{\mathcal{R}}$، وبالأعتماد على جدول (2) يمكن تضبيب البيانات بسهولة بأستخدام الموقع والأنتروبي، يضاف على هذا تم عد قيمة الثابت k في معادلات دوال الأنتروبي في جدول (2) على أنه مقلوب أكبر قيمة تصل إليها دوال الأنتروبي وفي حالتنا هذه فأنّ $k = inv(log(2))$ وهو السائد في العديد من البحوث نذكر منها [4], [11].

فإذا تم بناء هيكلية الأنموذج المكيف المعرف في (22) و(24) وبإهمال مجموعة الأوزان لغرض المحافظة على أصالة الموضوع تبين الآتي:

جدول (3): المعلمات التقديرية لأنموذج الإنحدار الخطي الضبابي المكيف بأستخدام دوال الأنتماء ودوال الأنتروبي.

Parameters	Entropy function R=1	Entropy function R=2	Parameters	Membership Function
θ	$\begin{bmatrix}47.9050\\1.7113\\0.6560\\0.2660\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}47.9050\\1.7113\\0.6560\\0.2660\end{bmatrix}$	Ω	$\begin{bmatrix}47.9050\\1.7113\\0.6560\\0.2660\end{bmatrix}$
$\tau_1 = \varphi_1$	0.0793	0.0649	$\lambda_1 = \alpha_1$	0.1100
$\tau_0 = \varphi_0$	4.4266×10^{-05}	4.3544×10^{-05}	$\lambda_0 = \alpha_0$	4.4712×10^{-05}

يتبين من الجدول (4.3) تطابق تقديرات المركز للأنموذج الضبابي المكيف بأستخدام دوال الإنتماء مع تقديرات الموقع للأنموذج الضبابي المكيف بأستخدام دوال الأنتروبي، كما أنّ أكبر تأثير على حرارة الأماهة يعود إلى ثلاثي ألومينات الكالسيوم (1.7113) يليه ثلاثي سيليكات الكالسيوم (0.6560) ثم أخيراً ألومينوفريت الكالسيوم (0.2660)، فضلاً على أنّ جميع المكونات الثلاث آنفة الذكر كان لها تأثير طردي على حرارة الإماهة أي بازدياد النسب المئوية لكل من Ta، Ts و Taf ستزداد السعرات الحرارية لكل غرام من الإسمنت البورتلاندي بمقدار 1.7113، 0.6560 و0.2600 على التوالي وهذا كله يطابق ما تم التوصل إليه في [26].

يلحظ أيضاً بأنّ معلمات الأنموذج المكيف سواء في حالة أستخدام دوال الأنتماء أو دوال الأنتروبي تكون غير ضبابية لذا قد تم أستخدام أسلوب المربعات الصغرى غير السالبة المعرف في (28) لإيجاد معلمات الأنتشار بشكل مباشر على المدخلات والأسلوب المقترح لإيجاد معلمات الأنتروبي بشكل مباشر على المدخلات والنتائج موضحة في الجدول (4) الاتي.

جدول (4): معلمات للأنتشار والأنتروبي في الأنموذج الإنحدار الخطي الضبابي المكيف.

Entropy function R=1	Entropy function R=2	Membership function
$\theta^{\mathcal{L}} = \theta^{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix}3.7989\\0.1357\\0.0520\\0.0211\end{bmatrix}$	$\theta^{\mathcal{L}} = \theta^{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix}3.1091\\0.1111\\0.0426\\0.0173\end{bmatrix}$	$\beta_{\mathcal{L}} = \beta_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix}5.2696\\0.1882\\0.0722\\0.0293\end{bmatrix}$

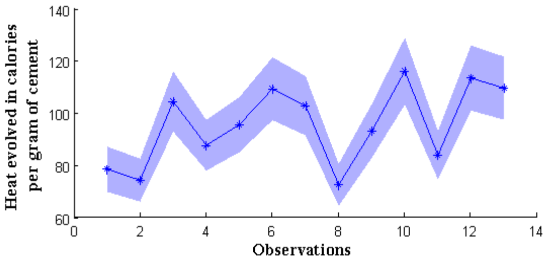
يلاحظ من الجدول (4) المذكور انفا أنّ أسلوب المربعات الصغرى غير السالبة لم يضمن تقدير معلمات الأنتشار بشكل غير دقيق بسبب تقيده بالعمليات الحسابية للأرقام الضبابية لكن أعطانا فكرة عن المعلمات بشكل عام فقط على عكس أستخدام دوال الأنتروبي في الأنموذج المكيف إذ أستطعنا تحديد العلاقة بين الأنتروبي والمدخلات عبر المعلمات التقديرية بشكل دقيق، كما أن جميع معلمات الأنتشار والأنتروبي تحقق المتوقع في تأثير المدخلات على المخرج. أما لتقييم الأنموذج فأنّ جدول (5) يوضح مدى دقة الأنموذج في المطابقة والتنبؤ، إذ يمكن ملاحظة الفروق بين نتائج $\mathcal{ALSD}$، فقد تفوق أستخدام منحنى الأنتماء التربيعي على الخطي في حالة أستخدام دوال الأنتروبي والتي كلتا درجتي المنحنى تفوقت على الأنموذج المكيف بأستخدام دوال الأنتماء وكالآتي:

جدول (5): مقياس التقيم لأنموذج الإنحدار الخطي الضبابي المكيف بأستخدام دوال الأنتماء ودوال الأنتروبي.

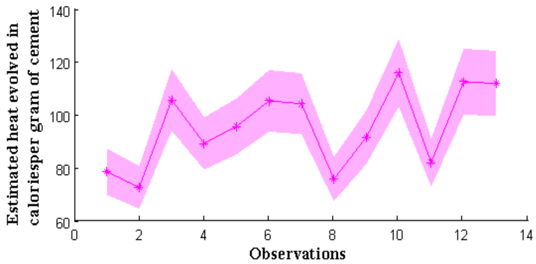
Type of Entropies		Comparison Methods	
Membership Function		$ALSD$	1.8960
Entropy function	$R = 1$	$ALSD$	1.8008
	$R = 2$	$ALSD$	1.7559

شكل (5): حرارة الإماهة الحقيقية والتقديرية مقاسة بالسعرات الحرارية لكل غرام من الأسمنت البورتلاندي وبالاعتماد على دوال الأنتماء ودوال الأنتروبي [من إعداد الباحث].

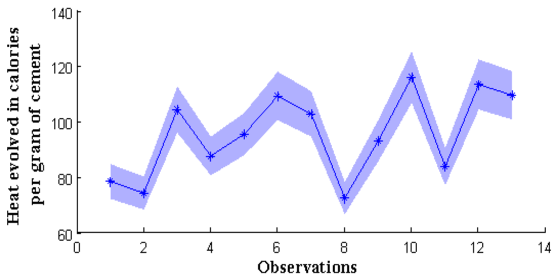
(a_1) حرارة الإماهة الحقيقية بأستخدام دالة الأنتماء



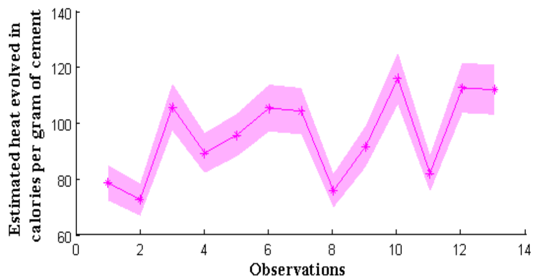
(a_2) حرارة الإماهة التقديرية بأستخدام دالة الأنتماء



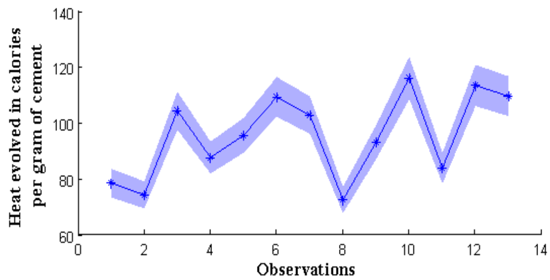
(b_1) حرارة الإماهة الحقيقية بأستخدام دالة الأنتروبي مع R=1



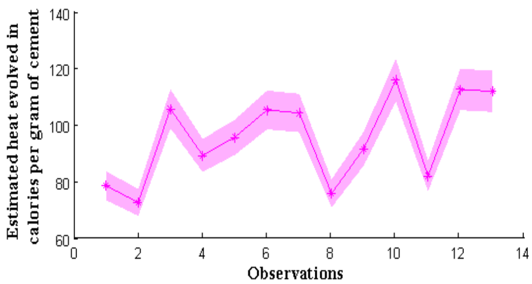
(b_2) حرارة الإماهة التقديرية بأستخدام دالة الأنتروبي مع R=1



(c_1) حرارة الإماهة الحقيقية بأستخدام دالة الأنتروبي مع R=2



(c_2) حرارة الإماهة التقديرية بأستخدام دالة الأنتروبي مع R=2



يتبين من الشكل (3) بأنّ حرارة الإماهة التقديرية الناتجة عن الأنموذج المكيف سواء بأستخدام دوال الأنتماء (c_1,b_1,a_1) أم باستخدام دوال الأنتروبي كادت تطابق حرارة الإماهة الحقيقة (c_2,b_2,a_2)، عليه وبالأستناد على النتائج السابقة يمكننا القول أنّ الأنموذج المكيف بأستخدام دوال الأنتروبي قد جمع أفضل الصفات بالمقارنة مع الأنموذج المكيف بأستخدام دوال الأنتماء.

7. الأستنتاجات Conclusions

1. أظهر أستخدام الموقع والأنتروبي لوصف الأرقام الضبابية كفاءة عالية في التطبيق كما حافظ على جميع المعلومات المحتواة في الرقم الضبابي ذاته، كذلك جعل مفهوم التضبيب سهلاً للقارئ إذ تم تقسيم الرقم إلى قيمة أصلية وأنتروبي يمثل مقدار الضبابية، فضلاً على تخليص الأرقام الضبابية من القيود المعقدة لإجراء العمليات الحسابية، كما أنّ أستخدام منحنى شكل دالة أنتماء تربيعي أعطى نتائج أفضل بالمقارنة مع الخطي.
2. أستطاع الأنموذج المكيف بأستخدام دوال الأنتروبي بأنْ يأخذ بنظر العناية نوع عدم الدقة (شكل منحنى دالة الأنتماء) بينما لم يستطيع الأنموذج المكيف بأستخدام دوال الأنتماء الأهتمام بهذا الجانب.
3. الأنموذج المكيف الذي تم تطويره بأستخدام دوال الأنتروبي يمتلك معلمات ضبابية كاملة على عكس الأنموذج المكيف باستخدام دوال الأنتماء بسبب تقيدة بالعمليات الحسابية للارقام الضبابية مما جعل أستخدام أسلوب المربعات الصغرى غير السالبة لا يعطينا فكرة دقيقة عن المعلمات الخاصة بالأنتشار.
4. جمع الأنموذج المكيف بأستخدام الموقع والأنتروبي أفضل الصفات، إذ تميز بسهولة تقديره وتفسيره فضلاً عن أمتلاكه أفضل مقاييس التقييم.

المصادر

1. Coppi, R., D'Urso, P., Giordani, P., Santoro, A. (2006). Least squares estimation of a linear regression model with LR fuzzy response. Computational Statistics & Data Analysis , 51, 267-286.

2. Coppi, R. (2008). Management of uncertainty in statistical reasoning: The case of regression analysis. International Journal of Approximate Reasoning, 47, 284-305.

3. Ferraro M.B., Coppi, R., González Rodríguez, G., Colubi, A. (2010). A linear regression model for imprecise response. International Journal of Approximate Reasoning, 51, 759-770.

4. Kao, C., Lin, P.H. (2005). Entropy for fuzzy regression analysis. International Journal of Systems Science, 36(14), 869–876.

5. Mashinchi,M.H., Orgun, M.A. Mashinchi, M., Pedrycz, W. (2011). A Tabu–Harmony Search-Based Approach to Fuzzy Linear Regression. IEEE TRANSACTIONS ON FUZZY SYSTEMS, 19(3), 432-448.

6. Zimmermann, H. (1996). Fuzzy set theory and its applications (3rd ed.). London: Kluwer Academic Publishers.

7. Gong, Z., & Hai, S. (2016). Convexity of n-dimensional fuzzy number-valued functions and its applications. Fuzzy Sets and Systems, 295, 19-36.

8. Grzegorzewski, P., & Mrówka, E. (2005). Trapezoidal approximations of fuzzy numbers. Fuzzy Sets and Systems, 153, 115-135.

9. D'Urso, P., & Santoro, A. (2006). Goodness of fit and variable selection in the fuzzy multiple linear regression. Fuzzy Sets and Systems , 157, 2627-2647.

10. Ferraro, M. (2008). A linear regression model for LR fuzzy random variables: properties and inferential procedures. Thesis submitted to gain the degree of "PhD in methodological Statistics ", Sapienza University of Rome.

11. De Luca, A. &. (1972). A definition of a nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory. INFORMATION AND CONTROL, 20, 301-3012.
12. Pedrycz, W. (1994). Why triangular membership functions? Fuzzy Sets and Systems, 64, 21-30.
13. Aphane, M. (2009). On some results of analysis in metric spaces and fuzzy metric spaces. Thesis submitted to gain the degree of "’MSc in Mathematics Science" , University of South Africa.
14. Coppi, R., & D’Urso, P. (2003). Regression analysis with fuzzy informational paradigm: A least-squares approach using membership function information. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 8(3), 279-306.
15. Näther, W. (2000). On random fuzzy variables of second order and their application to linear statistical inference with fuzzy data. Metrika, 51, 201-221.
16. Diamond, P., Kloeden, P. (1990). Metric spaces of fuzzy sets. Fuzzy Sets and Systems, 35, 241-249.
17. Feuring, T., Golubski, W., & Gassmann, M. (2000). Fuzzy regression: A genetic programming approach. Fourth International Conference on knowledge-Based Intelligent Engineering Systems & Allied Technologies (pp. 349-352). Brighton, UK: IEEE.
18. Ozelkan, E. (1997). Multi-objective fuzzy regression applied to the calibration of conceptual rainfall-runoff models. Thesis submitted to gain the degree of "PhD in system and industrial engineering" , University of Arizona.
19. Viertl, R. (2011). Statistical method for fuzzy data. Chichester, West sussex: John Wiley & Sons.
20. Lu, J., Wang, R. (2009). An enhanced fuzzy linear regression model with more flexible spreads. Fuzzy Sets and Systems, 160, 2505-2523.
21. D‘Urso, P., & Gastaldi, T. (2000). A least-squares approach to linear regression analysis. Comp. Stat. and Data Anal, 34, 427-440.
22. D’Urso, P. (2003). Linear regression analysis for fuzzy/crisp input and fuzzy/crisp output data. Computational Statistics & Data Analysis , 42, 47-72.
23. Lawson, C.L., Hanson, R.J. (1974). Solving least squares problems. Englewood Clif, NJ: Prentice Hal.
24. Chen, D., & Plemmons, R. (2007). Nonnegativity cxonstraints in numerical analysis. In A. &. Bultheel (Ed.), The Symposium on the Birth of Numerical Analysis (pp. 1-32). Leuven Belgium: World Scientific Press.
25. Hyndman, R., Koehler, A. (2006). Another look at measures of forecast accuracy. International Journal of Forecasting, 22, 688–679.
26. Abbas, A.F., Mohammed, M.J. (2017). Fuzzy Entropy in Adaptive Fuzzy Weighted Linear Regression Analysis with Application to Estimate Infant Mortality Rate. Iraqi Journal of Science, 58(1C), 497-514
27. Xu, R., Li, C. (2001). Multidimensional least-squares fitting with a fuzzy model. Fuzzy Sets and Systems, 119, 215-223.
28. Draper, N.R, Smith, H. (1980). Applied Regression Analysis. New York: Wiley.

A Comparision Between Membership function And Entropy Function In Fuzzy Adaptive Linear Regression

Abstract

There are many uncertainty sources that may affect the statistical reasoning. However, traditional methods can not deal with all kinds of uncertainty sources, which has led many researchers to develop traditional methods. Studies still exist to this day, making hypotheses to create a common understanding for the purpose of reaching new solutions through the use of new methods that combine traditional and modern theories of sources of uncertainty

The aim of current study was to develop the adaptive fuzzy linear regression model in the case of using inaccurate data as the source of uncertainty. Specifically, the model proposed by [1]. However, instead of what dominant in fuzzy linear regression analysis, we used a new born method that uses the positions and entropy to fuzzification instead membership function. As for the comparison method we used the mean absolute difference as performance's accuracy measures.

The results of this study showed the efficiency of the use of the position and the entropy function to describe the fuzzy numbers over the use of the membership functions. The results also indicated that the develop model has the best results compared to the model adapted using the membershop functions in [1].

Keywords Triple fuzzy number, membership function, entropy function, ifuzzy iterative least squares, adaptive fuzzy regression.