مقارنة طرق تقدير معالم نموذج الانحدار
في حالة ظهور مشكلة التعدد الخطي والقيم الشاذة

أ.م.د. نزار مصطفى جواد   م. غفران اسماعيل كمال
كلية الادارة والاقتصاد
جامعة بغداد

المستخلص

تستخدم المحاكاة لاختبار قوة وحصانة المقدرات لنموذج الانحدار المتعدد عند وجود مشاكل التعدد الخطي والاخطاء الغير طبيعية، وتم استخدام طرق للتقدير منها الاعتيادية والحصينة وهي طريقة المربعات الصغرى LSE، وانحدار الـ Ridge، وطريقة القيمة المطلقة الصغرى RLAV والـ Ridge الموزون WRID وطريقة MM ومقدار انحدار الـ Ridge الحصين المعتمد على مقدار MM والذي يرمز له بالرمز RMM. ان RMM هي التعديل الى انحدار الـ Ridge المدمج مع مقدر MM الحصين. وقد وجد ان طريقة RMM هي افضل من الطرق الاخرى .

ABSTRACT

A simulation study is used to examine the robustness of some estimators on a multiple linear regression model with problems of multicollinearity and non-normal errors, the Ordinary least Squares (LS) ,Ridge Regression, Ridge Least Absolute Value (RLAV), Weighted Ridge (WRID), MM and a robust ridge regression estimator MM estimator, which denoted as RMM this is the modification of the Ridge regression by incorporating robust MM estimator . finialy, we show that RMM is the best among the other estimators.

1- المقدمة وهدف البحث

تعتبر طريقة المربعات الصغرى من الطرق المهيمنة في تقدير معالم نموذج الانحدار الخطي ولفترة طويلة من الزمن لما تمتاز مقدراتها من خصائص جيدة وخاصة عندما يتوزع الخطأ توزيعاً طبيعياً المقدر β يحدد بتصغير الدالة

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i'\beta)^2 = \sum_{i=1}^{n}(r_i)^2$$

وان مقدر المعلمة β يعطى بالشكل التالي

$$\hat{\beta}_{LS} = (X'X)^{-1}X'Y \text{ ------------------------- } \mathbf{(1)}$$

وهذه الطريقة تعطي مقدرات غير متحيزة ولها اقل تباين بشرط ان الاخطاء مستقلة ومتماثلة ولها توزيع طبيعي.

من المشاكل التي تسجلها البيانات او التي يعاني منها النموذج الخطي هو وجود علاقة بين المتغيرات التوضيحية والتي تسمى بالتعدد الخطي او وجود بعض المشاهدات التي تنحرف بشكل ملحوظ عن المشاهدات الاخرى والتي تدعى بالشواذ والتي تنشأ من توزيعات متينة الذيل او من توزيع مختلط او اخطاء نتيجة قراءات او حسابات والتي يكون لها تأثيرها في تقديرات المربعات الصغرى فتعطي نتائج تقدير ضعيفة. من هنا دعت الحاجة الى ايجاد اساليب لتقدير معالم النموذج والتي تدعى بالطرائق الحصينة والتي تتصف بانها غير شديدة الحساسية او التأثر بالشواذ. اما هدف البحث فهو دراسة لبعض الطرائق الحصينة والمقارنة فيما بينها عند اختلاف توزيع الخطأ وحجم العينة وقوة العلاقة بين المتغيرات التوضيحية .

2- مقدرات انحدار الـ Ridge

عند وجود مشكلة التعدد الخطي بين المتغيرات التوضيحية فان المصفوفة $(X'X)$ تكون فردية، لذا فان الحصول على مقدرات β يكون صعب، وعندما تكون قريبة من الفردية من الممكن الحصول على مقدرات β ولكن تكون ذو صفات غير مرغوب فيها، مما يستوجب البحث عن طرق اخرى لتقدير β غير طريقة LS، ومن هذه الطرق طريقة الـ Ridge والتي اقترحت عام (1970) من قبل Horel و Kennard واصبحت من الطرق الشائعة لتقدير β عند وجود مشكلة التعدد الخطي .

ان درجة التعدد الخطي غالبا مايشار لها بالرقم الشرطي Conditional number (CN) للمصفوفة X او $(X'X)$. ويعرف CN بالشكل التالي:

$$CN = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \geq 1 \quad \text{-------------------------------(2)}$$

حيث λ هي القيمة الذاتية للمصفوفة $(X'X)$.

ذكر (1980) Belsley واخرون بان الارتباطات الخطية بين المتغيرات التوضيحية تكون ضعيفة عندما يكون CN ما بين 5 الى 10، في حين تكون الارتباطات معتدلة الى قوية بين المتغيرات التوضيحية عندما تكون CN من 30 الى 100 .

في عام (1970) (a,b) اوضح كل من Horel and Kennard انه بالامكانية تحسين مقدرات المربعات الصغرى عند وجود مشكلة التعدد الخطي وذلك باضافة كمية صغيرة موجبة $(K>0)$ للعناصر القطرية للمصفوفة $X'X$ وقد عرفوا المقدر الناتج لمعالم نموذج الانحدار الخطي بالشكل التالي :

$$\beta^{\wedge}(k) = (X'X + kI)^{-1} X'Y \quad \text{---------------------------(3)}$$

حيث ان :

I مصفوفة احادية (p*p)

k>0 كمية ثابتة

عمليا ، فان القيمة المثلى الى k غير معروفة وتوجد طرق عديدة لتحديدها وقد ذكر كل من (1970 b) Kennard ,Horel طريقة لتحديد قيمة k وكالاتي :

$$k = \frac{pS_{LS}^2}{\beta_{LS}'^{\wedge}\beta_{LS}^{\wedge}} \quad \text{---------------------------------(4)}$$

حيث

$$S_{LS}^2 = \frac{(Y - X\beta_{LS}^{\wedge})'(Y - X\beta_{LS}^{\wedge})}{n-p} \quad \text{------------------------(5)}$$

حيث ان

p عدد المعالم المطلوب تقديرها

من الملاحظ انه عندما تكون k=0 فان $\beta_{LS}^{\wedge} = \beta_{RID}^{\wedge}$

وعندما k>0 ، فان $\beta_{RID}^{\wedge}$ متحيز ولكن اكثر استقرارية ودقة من مقدر المربعات الصغرى، وعندنا $k \to \infty$ ، فان $\beta_{RID}^{\wedge} \to 0$.

واوضح كل من (1970 a) Kennard & Horel بان متوسط مربعات الخطأ

$$MSE_{\beta_{RID}^{\wedge}} < MSE_{\beta_{LS}^{\wedge}} \quad , \mathbf{k>0}$$

3- مقدرات الانحدار الحصينة

اثبتت مقدرات الانحدار الحصينة بانها اكثر كفاءة من مقدرات المربعات الصغرى وخاصة عندما تكون التذبذبات غير طبيعية، والمقصود بالتذبذب الغير طبيعي هو ان لها توزيعات ثقيلة الذيل اكثر من التوزيع الطبيعي وتكون عرضة الى انتاج قيم شاذة، ومن المعلوم ان القيم الشاذة تؤثر على تقديرات المعالم والاخطاء المعيارية والاختبارات الاحصائية لذا تم الاتجاه الى الاسلوب الحصين في تقدير المعالم، هذا الاسلوب يقوم بتقدير المعالم بالاعتماد على تقليل تأثير القيم الشاذة .

وهناك الكثير من البحوث التي تناولت طرق التقدير الحصينة منها Edgeworth (1887) الذي اقترح مقدر القيمة المطلقة الصغرى (LAV) و (1973) Huber الذي قدم مقدرات M ، ولا واحدة من هذه المقدرات حققت نقطة انهيار عالية. في عام (1987) قدم Rousseeuw مقدر اكثر حصانة له نقطة انهيار عالية 50% وهو مقدر المربعات الصغرى الوسيط (LMS) والمربعات الصغرى المشذبة (LTS) وفي عام (1987) استطاع Yohai ان يضيف تحسينا على كفاءة مقدرات الانهيار العالية فقدم مقدرات MM. ان هذه الطريقة تتطلب ثلاثة مراحل هي :

- حساب تقدير انحدار اولي T_0 الى θ_0 بنقطة انهيار عالية 50% .
- حساب البواقي للتقدير الاولي

$$r_i(T_0) = y_i - T_0' x_i \quad \text{------------------------------(6)}$$

$$1 \le i \le n$$

ثم نحسب تقدير -M لاخطاء القياس

$$S_n = S(r(T_0)) \quad \text{-------------------- (7)}$$

وذلك باستخدام دالة ρ_0 التي تحقق افتراضات تقدير – M لـ (1973) Huber واستخدام الثابت بالشكل التالي:

$$\frac{c}{d} = 0.5 \quad \text{-------------------------------------(8)}$$

حيث ان

$$d = \max \rho_0(u)$$

- نحسب تقدير – M لمعلمات الانحدار

نفترض ان ρ_1 دالة اخرى تحقق افتراضات تقدير – M وبالشكل التالي :

$$\rho_1(u) \le \rho_0(u) \quad \text{---------------------------(9)}$$

$$\sup \rho_1(u) = \sup \rho_0(u) = d \quad \text{------------(10)}$$

لنفترض ان $\psi(t)$ تشير الى تأثير الدالة ويمكن الحصول عليها من الاشتقاق الجزئي للدالة ρ وبالشكل التالي:

$$\psi(t) = \rho'(t)$$

وهناك عدة اختيارات للدوال $\rho(t), \psi(t)$

ان مقدر – MM ، T_1 يعرف بانه حل للمعادلة التالية .

$$\sum_{i=i}^{n}\psi_i(\frac{r_i}{S_n})x_i = 0 \text{ ------------------------(11)}$$

والتي تحقق الشرط التالي

$$S(T_1) \leq S(T_0) \text{ ---------------------------(12)}$$

حيث ان

$$S(\theta) = \sum_{i=1}^{n}\rho(\frac{r_i}{S_n}) \text{ ------------------------(13)}$$

4- مقدرات Ridge الحصينة

بالرغم من ان تقدير $\hat{\beta}_{RID}$ *تكون* كفوءة عند مشكلة التعدد الخطي الا انه غير حصين عند وجود القيم الشاذة ، لذا لابد من مزج تقدير Ridge مع بعض اساليب التقدير الحصينة للحصول على تقديرات انحدار Ridge حصينة.

وبما ان طرق انحدار الـ Ridge والطرق الحصينة لا تستطيع التعامل مع مشاكل التعدد الخطي والقيم الشاذة في آن واحد، لذا من المهم ان تمزج الطرق مع بعضها.

هناك بعض الدراسات التي اهتمت بالتقديرات التي استخدمت مقدرات الـ Ridge الحصينة منها (1981) Ullah ,Vinod وقدم كل من (1980) Askin Montgomery مقدر Ridge الموزون (WRID) وقدم (1984) pfaffenberger, Dielman مقدر القيمة المطلقة الصغرى للـ Ridge (RLAV).

4-1- مقدر الـ Ridge الموزون

اول من اقترح مقدر المربعات الصغرى الموزونة هما Askin ,Montgomery (1980) وبالشكل التالي :

$$\hat{\beta}_{wls} = (X'WX)^{-1}X'WY \text{ ------------------(14)}$$

حيث ان W مصفوفة اوزان قطرية

$\hat{\beta}_{WLS}$ يمكن تقديرها باستخدام طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية OLS بعد تحويل المشاهدات.

$$x_i \rightarrow \sqrt{w_{ii}}\,x_i$$
$$y_i \rightarrow \sqrt{w_{ii}}\,y_i$$

اما الاوزان فيمكن ايجادها حسب الصيغة الاتية

$$w_i = \frac{\psi(y_i - x_i'\beta)}{(y_i - x_i\beta)} \text{ -------------------------(15)}$$

ان مقدر WRID يحسب باستخدام الصيغة التالية

$$\hat{\beta}_{WRID} = (x'wx + kI)^{-1} x'wy \quad \text{--------------}(16)$$

طريقة القيمة المطلقة الصغرى للـ Ridge

اقترح (1984) Lawrence , طريقة حصينة للـ Ridge وذلك بمزج خواص طريقة القيمة المطلقة الصغرى ومقدر انحدار الـ Ridge والذي يشار له بـ (RLAV) ويمكن كتابته بالشكل التالي

$$\hat{\beta}_{RLAV}\, (x'x + k^{*}I)^{-1} x'y \quad \text{-------------------------}(17)$$

حيث ان k^{*} ممكن تحديدها بنفس الاسلوب الموجود بالمعادلتين (18) و (19) بعد استبدال k بـ k^{*} وكما يلي:

$$k^{*} = \frac{\rho S^{2}_{LAV}}{\hat{\beta}'_{LAV}\hat{\beta}_{LAV}} \quad \text{-------------------------}(18)$$

حيث ان

$$\hat{S}_{LAV} = \frac{(y - x\hat{\beta}_{LAV})'(y - x\hat{\beta}_{LAV})}{n-p} \quad \text{-------------}\ (19)$$

$\hat{\beta}_{LAV}$ هو مقدر القيمة المطلقة الصغرى ويعرف كحل للدالة التالية

$$\min_{\beta} \sum_{i=1}^{N} \left| y_i - x_i'\beta \right|$$

5- المحاكاة

لغرض تحقيق هدف البحث تم اللجوء الى اسلوب المحاكاة الذي يحاكي عدد كبير من الحالات المفترضة والتي من المتوقع ظهورها في الواقع العملي، لذا فقد تم اخذ مجموعة من الافتراضات منها درجة التعدد الخطي، دراسة تأثير العينات الصغيرة والكبيرة وكذلك دراسة تأثير عدم تحقق شرط التوزيع الطبيعي للخطأ العشوائي، وتعتبر المحاكاة الاسلوب المناسب الذي يمكن استخدامه للمقارنة بين RMM مع طرق التقدير البديلة.

ان حجوم العينات المأخوذة هي (25,50) اما درجة الارتباط بين المتغيرات التوضيحية فتكون بالشكل التالي 0.9 ، 0.8 ، 0.5، اما توزيعات الخطأ فهي:

- **التوزيع الطبيعي المعياري .**
- **توزيع كوشي .**
- **توزيع- t بدرجة حرية 3 .**

اما النموذج المستخدم فهو

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \varepsilon_i$$

وتم اختيار القيم الابتدائية بالشكل التالي

$$\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = 1$$

اما المتغيرات التوضيحية فقد تم توليدها حسب المعادلة التالية

$$x_{ij} = (1-\rho^2)z_{ij} + \rho z_{ij} \qquad i=1,2,\dots n \quad j=1,2$$

حيث ان z_{ij} هي ارقام عشوائية تتبع التوزيع الطبيعي القياسي وقد تم استخدام الحاسبة الالكترونية لتوليد البيانات وتم تكرار كل تجربة (1000) مرة، وكان معيار المفاضلة على اساس جذر متوسط مربعات الخطأ (RMSE) والخطأ المعياري (SE) ومقدار التحيز حيث ان التحيز يعطى بالشكل التالي :

$$Bias = E(\beta^{\wedge}) - \beta$$

$$= \bar{\beta}_j - \beta_j$$

$$\bar{\beta}_j = \frac{\sum_{j=1}^{L}\beta_j}{L} \qquad L=1000$$

$$MSE(\beta_j^{\wedge}) = E(\beta^{\wedge} - \beta)^2 = (\bar{\beta}_j - \beta_j)^2 + \frac{1}{L}\sum_{j=1}^{n}(\beta_j^{\wedge} - \bar{\beta}_j)^2$$

لذا فان جذر متوسط مربعات الخطأ يكون اما $(MSE(\beta_j^{\wedge}))^{\frac{1}{2}}$ او $[Var(\beta_j^{\wedge}) + (Bias)^2]^{\frac{1}{2}}$

ويعد هذا المقياس من المقاييس الاحصائية الشائعة لانه يجمع بين مقياس مربع التحيز ومقياس التباين للمعلمة المقدرة .

ان النتائج للمعلمة β_0 مشابه الى نتائج β_1, β_2 لذا لم تذكر ضمن الجداول .

ان الجداول (5,3,1) خاصة بمقياس المفاضلة جذر متوسط مربعات الخطأ والخطأ المعياري والتحيز، اما الجداول (6,4,2) فتبين الكفاءة النسبية.

تحليل نتائج تجربة المحاكاة

من الجدول (1) ان جذر متوسط مربعا ت الخطأ لطريقة LS تكون اقل من بقية المقدرات للطرق الاخرى عندما يتوزع الخطأ توزيعا طبيعيا وعند عدم وجود مشكلة التعدد الخطي.

كما نلاحظ من الجدول (2) بان طريقة LS تعطي افضل النتائج عندما يتوزع الخطأ توزيعا طبيعيا وذلك من ملاحظة الكفاءة النسبية لمتوسط مربعات خطأ RMM الى OLS بانها اكثر من واحد وهذا مؤشرعلى كفاءة طريقة LS.

وللتوزيع الطبيعي للخطأ وعند وجود ارتباطات بين البيانات ولحجمي العينة تكون طريقة RMM افضل من طرق التقدير LS، WRID، MM وتكون مقاربة الى كل من Ridge و RLAV ، وفيما عدا ذلك فان LS هي الافضل.

ان الكفاءة النسبية في جدول (2) تدعم النتائج في جدول (1) حيث ان هذه النسب ترمز الى كفاءة RMM الى بقية التقديرات، فعندما تكون النسبة اقل من واحد تعني ان RMM اكثر كفاءة، في حين عندما تكون اكبر من واحد تعني ان المقدر الاخر اكثر كفاءة.

من الجدول (2) من الواضح ان RMM على الاغلب هي الاكفأ من Ridge و RLAV لكن بالتأكيد اكفأ من LS , MM , WRID عندما تكون البيانات خالية من القيم الشاذة وعند وجود مشكلة التعدد الخطي .

من الجداول (3,4) ولتوزيع كوشي وفي حالة عدم وجود مشكلة التعدد الخطي نلاحظ ان مقدر MM افضل من بقية المقدرات . وبشكل عام في حالة وجود مشكلة التعدد الخطي والقيم الشاذة فان الطرق الحصينة RMM, RLAV , WRID تكون الافضل وان RMM هي الافضل من بينهم .

وبنفس الاسلوب عند استخدام توزيع – t ولدرجة حرية (3) فان النتائج التي تم الحصول عليها من الجداول (5,6) هي مشابه الى نتائج توزيع كوشي . من جدول (5) نلاحظ ان SE و RMSE لطريقة RMM تكون اقل ما يمكن . من ناحية الكفاءة RMM هي الافضل لأن لها اقل RMSE كما هو واضح من جدول (6) .

من الواضح ان RMM الافضل من MM ومن مقدرات الـ Ridge الحصينة ولقيم مختلفة لـ ρ^2 ولتوزيعات خطأ غير طبيعية .

الاستنتاجات

عندما تكون درجة التعدد الخطي عالية فان RMM هي الافضل من طرق التقدير الاخرى. وعند المقارنة بين مقدرات الـ Ridge الحصينة RMM, RLAN, WRID لاحظنا ان RMM هي الافضل من WRID, RLAV ولمختلف افتراضات توزيع الخطأ ودرجة التعدد الخطي.

المصادر

١- كمال، غفران اسماعيل، (1990)، دراسة تقويمية لطرق التقديرات المتحيزة لمعاملات الانحدار المتعدد عن مخالفة بعض الفرضيات باستخدام اسلوب المحاكاة، اطروحة ماجستير، قسم الاحصاء، كلية الادارة والاقتصاد، جامعة بغداد.

1- Askin,R.G.and Montgomery,D.C.,(1980)."Augmented Robust Estimators". Technometrics,22,333-341.
2- Belsley,D.A.,(1980)."Regression Diagnostics, Identifying influential data and Sources of collinearity". New York, John Wiley.
3- Edgeworth, F.Y., (1887) "On observations Relating to Several Quantity, Journal Hermathena , 6,279-285.
4- Hoerl, A.E.and Kennard,R.W., (1970 a) ."Ridge regression : iterative Estimation of the Biasing parameter, Communications in statistics : A. Theory methods ,5,77-88.
5- Hoerl,A.E. and Kennard ,R.W.(1970,b)"Ridge regression :Applications to nonrthogonal problems, Technometrics, 12,69-82.
6- Huber ,P.J.(1973) ."Robust Regression :Asymtotics, conjectures and Monte Carlo . The Annals of statistics,1, 799-821.
7- Lawrnce ,K.D. and Arthur ,J.L. (1990) ."Robust Regression :Analysis and Application". New York, Marcel Deker.
8- Pfaffenberger ,R.C. and Dielman ,T.E., (1984)."A modified Ridge Regression Estimator Using the Least Absolute Value criterion in the Multiple Linear Regression model ,Proceedings of the American Institute for Decision , Toronto,791-793.
9- Vinod ,H.D., and Ullah, A.(1981)"Recent Advances in Regression Methods "New York, Marcel Dekker.

جدول (1) التحيز وجذور متوسطات الخطأ والخطأ المعياري لطريقة المربعات الصغرى وطرق التقدير الاخرى للتوزيع الطبيعي

$\hat{\beta}_1$

Values of ρ^2		0.0			0.5			0.95	
Method	Bias	RMSE	S.E	Bias	RMSE	S.E	Bias	RMSE	S.E
LS	-0.154 ..0022	.223 .1445	.2189 .1657	-.0089 -.0041	.3321 .2276	.3365 .2341	.0443 -.0522	3.0011 2.0453	3.0006 2.0564
RIDGE	-.0645 -.0231	.2221 .1453	.2341 .1456	-.0432 -.0166	.3213 .2210	.3211 .2321	-.0122 -.0221	1.5664 1.0543	1.5674 1.0785
RLAV	-.0124 -.0200	.2223 .1465	.2144 .1442	-.0432 -.0199	.2540 .2231	.3215 .2119	-.0421 -.0265	1.5668 1.0774	1.5764 1.0764
WRID	-.0151 -.0023	.2744 .1987	.2344 .1654	-.0122 -.0088	.4211 .3421	.4321 .3422	.0665 -.0643	3.5647 2.4567	3.7845 2.3490
MM	-.0154 -.0030	.2344 .1786	.3443 .1339	-.0112 -.0010	.4332 .2887	.4876 .2887	.0498 -.0453	3.7856 2.8976	3.7856 2.8976
RMM	-.0611 -.0198	.1766 .1433	.2346 .1445	-.0432 -.0223	.3765 .2123	.3422 .2987	.0210 -.0101	1.5678 1.0762	1.534 1.0563

$\hat{\beta}_2$

Values of ρ^2		0.0			0.5			0.95	
Method	Bias	RMSE	S.E	Bias	RMSE	S.E	Bias	RMSE	S.E
LS	-.0053 .0056	.2234 .1438	.2256 .1456	.0096 .0095	..3456 .2376	.3452 .2346	-.0576 .0577	3.0654 2.0765	3.0111 2.0786
RIDGE	-.0453 -.0453	.2245 .1477	.2216 .1478	-.0234 -.0076	.3178 .2140	.3454 .2145	.0034 .0056	1.5764 1.0664	1.5342 1.0649
RLAV	-.0453 -.0123	.2267 .1456	.2217 .1453	-.0256 -.0087	.3096 .2185	.3459 .2134	.0134 .0245	1.5683 1.0885	1.5332 1.0756
WRID	-.0123 .0034	.2645 .1876	.2675 .1876	.0123 .0134	.4321 .2765	.4387 .2687	-.0978 .0569	3.5664 2.4533	3.5764 2.3442
MM	-.0056 .0023	.2678 .1756	.2687 .1711	.0099 .0123	.4123 .2756	.4765 .2548	-.0443 .00645	3.7694 2.4769	3.7890 2.4768
RMM	-.0543 -.0231	.2267 .1456	.2210 .1456	-.0452 -.0078	.3078 .2344	.3656 ,2534	-.0476 .0065	1.5340 1.0756	1.5764 1.0701

جدول (2) الكفاءة النسبية للمعلمات التقديرية للتوزيع الطبيعي

$\hat{\beta}_1$ $\hat{\beta}_2$

Estimator 1vs	Estimator2	0.0	0.5	Values 0.95	OF 0.0	ρ^2 0.5	0.95
RMM	LS	1.04 1.00	0.97 0.80	0.26 0.27	0.99 0.95	0.78 0.88	0.29 0.27
	RID	1.01 1.00	1.01 1.00	1.01 1.00	1.01 1.02	0.98 1.00	0.99 0.95
	WRID	0.66 0.63	0.55 0.63	0.16 0.23	0.68 0.75	0.55 0.63	0.18 0.22
	RLAV	1.01 1.00	1.01 1.00	0.98 1.00	0.98 0.99	1.01 1.00	0.99 0.95
	MM	0.68 0.71	0.58 0.64	0.16 0.19	0.76 0.63	0.66 0.63	0.17 0.19
MM	LS	1.54 1.33	1.42 1.44	1.52 1.44	1.38 1.44	1.54 1.33	1.54 1.48
	RID	1.52 1.44	1.87 1.63	5.52 5.44	1.32 1.36	1.87 1.63	5.62 5.74
	WRID	0.97 0.80.	0.97 0.96	1.11 1.10	0.98 0.88	0.97 0.96	1.01 1.00
	RLAV	1.54 1.43	1.91 1.65	5.62 5.44	1.34 1.36	1.83 1.54	5.62 5.44
RLAV	LS	1.01 1.00	0.97 0.81	0.26 0.28	1.02 0.99	0.78 0.80.	0.29 0.27
	RID	1.03 1.00	1.01 1.00	1.01 1.00	1.01 1.00	1.01 1.00	1.01 1.0
	WRID	0.66 0.63	0.56 0.53	0.16 0.20	0.76 0.63	0.56 0.53	0.29 0. 27
WRID	LS	1.55 1.65	1.54 1.43	1.32 1.24	1.54 1.48	1.54 1.43	1.54 1.43
	RID	1.52 1.74	1.92 1.73	0.29 0.,27	1.44 1.53	1.87 1.63	5.62 5.44
RID	LS	1.04 1.00	0.78 0.80.	0.29 0.,27	1.02 0.99	0.76 0.83	0.29 0. 27

جدول (3) التحيز وجذور متوسطات الخطأ والخطأ المعياري لطريقة المربعات الصغرى وطرق التقدير الاخرى لنوزيع كوشي

$\hat{\beta}_1$

Values of ρ^2		0.0			0.5			0.95	
Method	Bias	RMSE	S.E	Bias	RMSE	S.E	Bias	RMSE	S.E
LS	2.786 .0123	122.564 18.564	125.908 18.786	2.564 .345	60.564 32.896	60.664 32.453	6.278 5.786	263.786 340.785	263.786 340.765
RIDGE	.089 -.432	44.765 7.895	44.786 7.786	.756 -.231	27.785 9.765	27.454 8.765	-1.076 .456	50.764 73.342	50.734 73.987
RLAV	-.534 -.578	.756 .786	.576 .534	-.534 .567	.786 .776	.665 .576	-.234 -.345	1.856 1.056	1.987 1.007
WRID	-.290 -.276	.576 ,423	.456 .389	-.124 -.189	.655 ,433	.576 .456	.189 -.134	3.376 1.459	3.564 1.456
MM	.043 -.002	,489 .256	.576 .342	.006 -.027	.789 .453	.634 .476	,576 -.256	6.342 3.997	6.785 3.897
RMM	-.564 -.755	.789 .786	.534 .568	-.455 -.546	.756 .790	.556 .589	-.126 -.345	1.534 .956	1.564 .908

$\hat{\beta}_2$

Values of ρ^2		0.0			0.5			0.95	
Method	Bias	RMSE	S.E	Bias	RMSE	S.E	Bias	RMSE	S.E
LS	3.976 -.238	144.432 17.432	143.897 17.564	1.234 -.645	78.897 36.896	78.876 36.984	-5.342 -5.564	245.897 344.765	245.908 345.876
RIDGE	.756 -.345	41.876 6.985	42.776 6.954	-.123 -.365	21.563 9.563	21.876 9.564	1.786 -.876	46.765 74.908	45.907 74.786
RLAV	-.576 -.534	.7543 .776	.553 .566	.566 -.544	.776 .779	.554 .564	-.232 -.334	1.908 1.098	1.987 1.094
WRID	-.234 -.299	.556 .455	.433 .432	-.234 -.231	.554 .590	.559 .522	-.267 -.121	3.443 1.432	3.432 1.987
MM	-.012 .023	.487 .254	.445 .231	-.022 .032	.633 .443	.645 .498	-.564 -.238	6.786 3.908	6.321 3.943
RMM	-.534 -.588	.732 .775	.654 .687	-.543 -.587	.765 .786	.543 .556	-.349 -.228	1.786 1.897	1.654 .998

جدول (4) الكفاءة النسبية للمعلمات التقديرية لتوزيع كوشي

$\hat{\beta}_1$ $\hat{\beta}_2$

Estimator 1 vs	Estimator2	0.0	0.5	Values 0.95	OF 0.0	ρ^2 0.5	0.95
RMM	LS	0.00 0.00	0.00 0.00	0.00 0.00	0.00 0.00	0.00 0.00	0.00 0.00
	RID	0.00 0.001	0.01 0.07	0.01 0.00	0.00 0.014	0.01 0.06	0.01 0.00
	RLAV	1.00 1.00	0.94 1.00	0.67 0.90	1.00 1.00	0.95 0.98	0.67 0.87
	WRID	2.25 2.99	1.55 2.44	0.21 .47	2.28 2.39	1.26 2.44	0.21 0.07
	MM	3.18 7.71	1.56 2.32	0.06 0.09	3.06 7.23	1.26 2.83	0.07 0.09
MM	LS	0.00 0.00	0.00 0.00	0.00 0.00	0.00 0.00	0.00 0.00	0.00 0.00
	RID	0.00 0.01	0.001 0.002	0.012 0.003	0.00 0.002	0.001 0.002	0.018 0.003
	RLAV	0.32 0.13.	0.73 0.34	10.87 13.77	0.33 0.14	0.76 0.34	10.77 13.66
	WRID	0.54 0.43	1.21 0.85	3.62 7.44	0.74 0.36	1.33 0.84	3.32 7.44
RLAV	LS	0.00 0.00	0.00 0.00	0.00 0.00	0.00 0.00	0.00 0.00	0.00 0.00
	RID	0.00 1.00	0.001 0.007	0.001 0.000	0.00 0.014	.001 .006	.001 0.00
	WRID	2.66 2.63	1.56 2.53	0.36 0.50	2.76 2.63	1.56 2.53	0.29 0. 57
WRID	LS	0.00 0.00	0.00 0.00	0.00 0.00	0.00 0.00	0.00 0.00	0.00 0.00
	RID	0.00 0.00	0.00 0.00	0.00 0.00	0.00 0.005	1.87 0.002	0.005 0.00
RID	LS	0.14 0.18	0.28 0.07.	0.05 0.06	0.08 0.17	0.08 0.05	0.04 0. 05

جدول (5) التحيز وجذور متوسطات الخطأ والخطأ المعياري لطريقة المربعات الصغرى وطرق التقدير الاخرى لتوزيع t- بدرجة حرية 3

$\hat{\beta_1}$

Values of ρ^2		0.0			0.5			0.95	
Method	Bias	RMSE	S.E	Bias	RMSE	S.E	Bias	RMSE	S.E
LS	-.0012	.3765	.3452	.0123	.5764	.5566	.2331	5.6543	5.1324
	-.0056	.2355	.2785	-.0453	.3452	.3224	-.1342	3.564	3.7856
RIDGE	-.0987	.3247	.3490	-.0342	.4432	.4332	.0987	2.7645	2.5433
	-.0564	.2332	.2543	-.0554	.3498	.3432	-.0453	1.8958	1.7653
RLAV	-.1234	.3421	.3298	-.0121	.4231	.4338	.1234	1.7856	1.7654
	-0972	.2112	.2112	-.0543	.3897	.3555	-.2314	1.3490	1.1233
WRID	-.0022	.3442	.2998	-.0543	.4879	.4432	.1453	3.8754	3.8976
	-.01223	.2217	.2113	-.0004	.3221	.3324	-.0231	2.6545	2.7623
MM	.0034	.3445	.3421	-.0054	.5341	.5443	.2341	4.7856	4.2312
	-.0765	.2765	.2218	-.0088	.3987	.3321	-.0875	2.8976	2.9987
RMM	-.1342	.3765	.3329	-.0983	.4875	.3998	.1121	1.8976	1.7654
	-.0543	.2786	.2221	-.0453	.3287	.3221	-.0564	1.8977	1.2212

$\hat{\beta_2}$

Values of ρ^2		0.0			0.5			0.95	
Method	Bias	RMSE	S.E	Bias	RMSE	S.E	Bias	RMSE	S.E
LS	-.0007	.3455	.3456	.0087	.5764	.5764	-.2341	5.1434	5.1433
	-.0013	.2345	.2987	.0123	.3762	.3789	.1564	3.5644	3.4566
RIDGE	-.0934	.3667	.3564	-.0645	.4563	.4576	-.1456	2.3454	2.5433
	-.0542	.2667	.2134	-.0345	.3256	.3121	.0234	1.2987	1.6754
RLAV	-.0176	.3978	.3342	-.0723	.4571	.4567	-.1356	1.7543	1.7756
	-.0056	.2134	.2221	-.0398	.3121	.3111	-.0045	1.3324	1.1543
WRID	-.0453	.3775	.3987	-.0023	.4765	.5762	-.1234	3.6554	3.4589
	-.0056	.2456	.2887	.0003	.3112	.3452	.0934	2.5996	.24766
MM	.0033	.3998	.3122	.0034	.5763	.4378	-.2234	4.5633	4.2223
	.0043	.2111	.2776	.0156	.3121	.3211	.0945	2.9876	2.8343
RMM	.-.0123	.3448	.3514	-.0765	.4235	.4456	-.1234	1.7123	1.7433
	-.0234	.2658	.2113	-.0633	.3116	.3214	-.0015	1.1124	1.1133

جدول (6) الكفاءة النسبية للمعلمات التقديرية لتوزيع t

$\hat{\beta}_1$ $\hat{\beta}_2$

Estimator 1 vs	Estimator2	0.0	0.5	Values 0.95	OF 0.0	ρ^2 0.5	0.95
RMM	LS	0.82 0.99	0.49 0.69	0.11 0.10	0.87 0.94	0.53 0.67	0.11 0.10
	RID	0.92 0.92	0.84 0.92	0.47 0.44	0.97 0.94	0.87 0.94	0.22 0.23
	RLAV	1.00 1.00	0.94 1.00	0.97 0.90	1.00 1.00	0.95 0.98	0.97 0.87
	WRID	1.25 1.39	0.66 1.07	0.21 0.22	1.28 1.39	0.66 0.94	0.25 0.26
	MM	1.18 1.71	0.56 1.02	0.15 0.16	1.16 1.23	0.66 1.00	0.15 0.15
MM	LS	0.61 0.74	0.80 0.67	0.74 0.70	0.78 0.60	0.79 0.67	0.74 0.70
	RID	0.69 0.72	1.38 0.90	3.04 2.97	0.84 0.67	1.27 0.92	3.07 2.99
	RLAV	0.73 0.74	1.73 0.99	6.87 6.13	0.83 0.64	1.55 0.94	6.12 6.66
	WRID	0.94 1.03	1.21 1.05	1.32 1.44	1.04 0.96	1.13 0.94	132 1.44
RLAV	LS	0.83 0.99	0.50 0.69	0.12 0.11	0.88 0.94	0.55 0.67	0.12 0.11
	RID	0.93 0.97	0.50 0.96	0.49 0.48	0.95 0.96	.88 .93	.94 0.94
	WRID	1.36 1.33	0.76 1.03	0.22 0.24	1.26 1.43	0.77 0.98	0.29 0. 27
WRID	LS	0.63 0.69	0.72 0.64	0.55 0.47	0.73 0.65	0.71 0.70	0.56 0.47
	RID	0.71 0.68	1.23 0.85	2.23 1.87	0.77 0.76	1.13 0.99	2.30 2.00
RID	LS	0.89 1.08	0.58 0.76	0.24 0.23	0.92 0.98	0.62 0.73	0.24 0. 25