مشكلات البرمجة الخطية الضبابية"FLPP"

Fuzzy Linear Programming problems

م. مروان عبد الحميد عاشور العبيدي

جامعة بغداد- كلية الإدارة والاقتصاد

المستلخص

ان الغرض من هذا البحث هو المزج بين القيود الضبابية والاحتمالية. كما يهدف الى مناقشة اكثر حالات مشكلات البرمجة الضبابية شيوعا وهي عندما تكون المشكلة الضبابية تتبع دالة الانتماء مرة دالة الانتماء المثلثية مرة اخرى، من خلال التطبيق العملي والتجريبي. فضلا عن توظيف البرمجة الخطية الضبابية في معالجة مشكلات تخطيط وجدولة الإنتاج لشركة العراق لصناعة الأثاث، وكذلك تم استخدام الطرائق الكمية للتنبؤ بالطلب واعتماده كقيد احتمالي في الأنموذج الرياضي.

١- المقدمة

تعد تطبيقات البرمجة الخطية محدودة في الجانب التطبيقي او الواقع العملي لانها تفترض حالة التأكد، في حين هنالك العديد من الحالات تكون غير مؤكدة او غير محددة خصوصا في ظل تطور والتعقيد التكنولوجي. لذلك فان البرمجة الضبابية تصبح المعالجة الاكثر تمثيلا للواقع العملي. وأقترح مفهوم تحقيق الحد الأقصى في مشكلات عملية اتخاذ القرار، للقرار الضبابي من قبل Bellman and Zadeh. واعتمد هذا المفهوم في المشكلات البرمجة الخطية الضبابية من قبل Tanaka الذي قدم الأسلوب الضبابي في مشكلات البرمجة الخطية متعددة الأهداف، ودرس ايضاً العلاقات الثنائية في مشاكل البرمجة الخطية الضبابية. وتم صياغة مشكلة البرمجة الخطية الضبابية بمعاملات ضبابية من قبل Nagoita وسميت بالبرمجة الحصينة Robust Programming. واقترح Tanaka and Asai صياغة البرمجة الخطية بالقيود الضبابية، التي تستند طريقة حلها على علاقات عدم المساواة بين الاعداد الضبابية. في هذا البحث تم تسليط الضوء على اكثر من حالة من حالات البرمجة الخطية الضبابية لإعطاء صورة شاملة عن البرمجة الخطية الضبابية وذلك لقلة وندرة المصادر والبحوث العربية، حيث تم استخدام البرمجة الضبابية في تخطيط جدولة الإنتاج لمصنع بغداد لصناعة الاثاث بواسطة وكذلك التنبؤ بالطلب بواسطة طرائق التنبؤ. ومن الجدير بالذكر تم استخدام قيد الصدفة من خلال التنبؤ بالطلب بواسطة الطرائق الكمية في عملية نمذجة البرمجة الخطية الضبابية. وفي هذا البحث استخدمت البرمجة الخطية العددية في المعالجة. ان هيكلية او منهجية البحث كالاتي:

اولا: الجانب النظري يتضمن المفهوم النظري للبرمجة الخطية الضبابية وطرائق التنبؤ.

ثانيا: الجانب التطبيقي وينقسم الى قسمين. الأول: يتضمن جدولة الإنتاج لمصنع العراق لصناعة الأثاث احد تشكيلات وزارة الصناعة والمعادن باستخدام البرمجة الضبابية حيث يتضمن النموذج الرياضي على قيود ضبابية باستخدام دالة الانتماء فضلا عن قيود احتمالية التي تمثل التنبؤ بالطلب باستخدام طريقة بوكس-جينكز، وفي عملية المعالجة استخدمت البرمجة العددية. اما القسم الثاني يتضمن الجانب التجريبي في معالجة مشكلة البرمجة الخطية الضبابية عندما يتضمن الانموذج الرياضي دالة الانتماء المثلثية. وذلك لاغناء فكرة البحث وتسليط الضوء اكثر على حالات البرمجة الخطية الضبابية.

ثالثا: يتضمن أهم الاستنتاجات والتوصيات التي تم التوصل اليها من خلال هذا البحث التي تفيد الباحثين والمهتمين في هذا مجال.

٢. الجانب النظري

٢-١ المقدمة عن الضبابية

منطق الضبابية او الغموض هو أحد أشكال المنطق، يستخدم في بعض الأنظمة الخبيرة وتطبيقات الذكاء الاصطناعي، نشأ هذا المنطق عام ١٩٦٥ على يد العالم الإيرانى"لطفي زادة" في جامعة كاليفورنيا حيث طوّره ليستخدمه كطريقة أفضل لمعالجة البيانات، لكن نظريته لم تلق اهتماماً حتى عام ١٩٧٤ حيث استخدم منطق الغموض في تنظيم محرك بخاري، ثم تطورت تطبيقاته حتى وصلت لتصنيع شريحة منطق ضبابى fuzzy logic chip والتي استعملت في العديد من المنتجات كآلات التصوير. هناك العديد من الدوافع التي دفعت العلماء إلى تطوير علم المنطق الضبابي ومع تطور انظمة حاسوب والبرامجيات نشأت الرغبة في برمجة أنظمة يمكنها التعامل مع المعلومات الغير الدقيقة على غرار الإنسان لكن هذا ولد مشكلة حيث أن الكمبيوتر لا يمكنه التعامل إلا مع معطيات دقيقة ومحددة . وقد نتج عن هذا التوجه ما يعرف بالأنظمة الخبيرة أو الذكاء الإصطناعي ويعتبر علم المنطق الضبابي أحد النظريات التي يمكن من خلالها بناء مثل هذه الأنظمة.

٢-١-١ المجموعة التقليدية والمجموعة الضبابية

المجموعة التقليدية

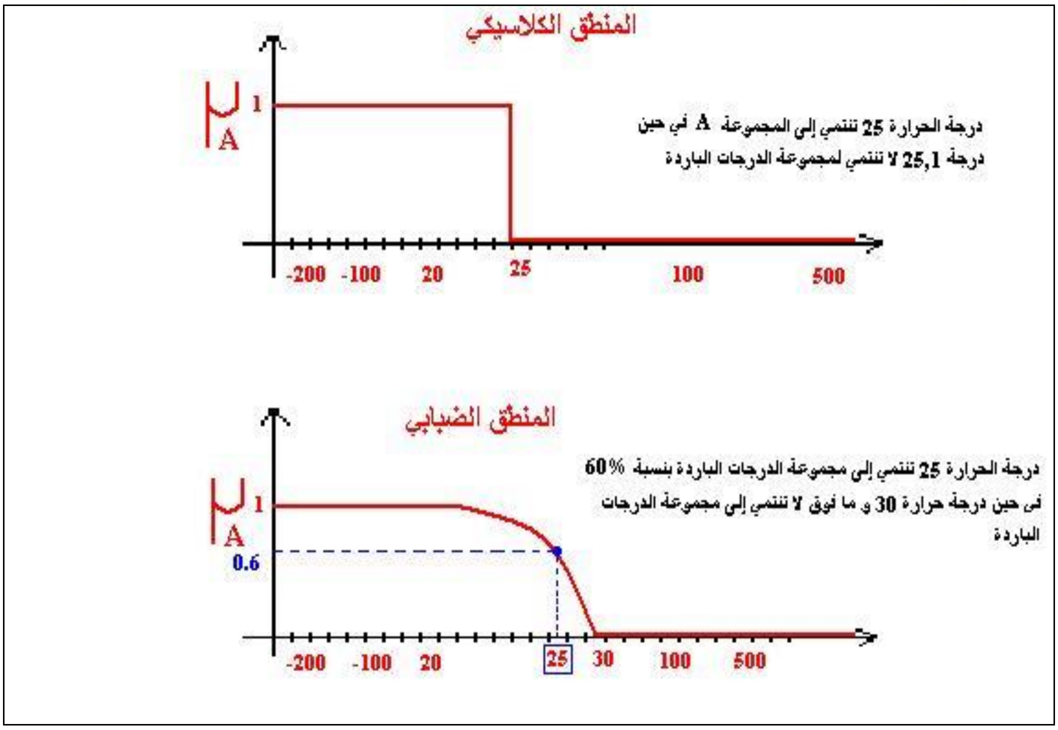
في المجموعة الكلاسيكية أو التقليدية يمكن لعنصر ما إما أن ينتمي للمجموعة وإما أن لا ينتمي لها بتاتا. فاذا كان المجموعة A ومجموعة U . وتعرف الدالةμA درجة إنتماء كل عنصر من عناصر المجموعةU إلى المجموعة A. وذلك عبر إعطائها قمية تساوي ١ في صورة إنتماء العنصر للمجموعة أي $\mu A(x) = 1$ إذا كان عنصر المجموعة U أي العنصر x ينتمي للمجموعة .A أما إذا كان العنصر x لا ينتمي ل A فإن الدالة μA تعطيه اقيمه تساوي 0 . أي $\mu A(x) = 0$ وعلى ذلك فإنه يمكن التعبير عالى الدالة μA كالآتي:

$$\mu_A : U \to \{0,1\}$$
$$x \mapsto \mu_A(x)$$

المجموعة الضبابية

في المجموعة الضبابية يمكن لعنصر ما أن يكون منتمي إلى حد معين للمجموعة. لنأخذ مثالا: لنعتبر المجموعة A مجموعة درجات الحرارة التي تصنف كأنخفاض درجة الحرارة (باردة بالنسبة للأنسان) ولنعتبر المجموعة U هي كل درجات الحرارة التي يمكن أن توجد في الكون مثلا ولنأخذ من المجموعة U العنصر $x=-100$هذه درجة حرارة باردة جدا ولذلك فهي تنتمي تماما للمجموعة A أي $\mu A(x) =1$ أما إذا أخذنا درجة $x=+500$ فإن هذه الدرجة من الحرارة حارة جدا ولذلك العنصر x لا ينتمي أبدا إلى .A إلى الآن لم نخرج عن إستعمالات المنطق الكلاسيكي أو التقليدي كما هو مبين أعلاه ولكن لنأخذ الآن درجة الحرارة ١٢ درجة أي . $x=12$ في المنطق التقليدي ليس لدينا إلا إحتمالين إما أن x ينتمي أو أنه لا ينتمي لـ A . اما في المنطق الضبابي يمكن أن نقول أن x ينتمي مثلا إلى إلى A باحتمال او بنسبة ٥٠% مثلا أي $\mu A(x) = 0.5$ و هنا نرى الإختلاف في تعريف الدالة μA حيث تعرف رياضيا كالآتي:

$$\mu_A : U \to [0\ 1]$$
$$x \mapsto \mu_A(x)$$



شكل(١) يبين الفرق بين المنطق الكلاسيكي والمنطق الضبابي

حيث يمكن للدالة أن تعطي نتائج بين ٠ و ١ على عكس الأمر في المنطق الكلاسيكي حيث لا تعطي الدالة إلا رقم ١ أو رقم ٠

٢-٢-٢ تعريف المجموعة الضبابية

هنالك عدة تعار يف للمجموعات الضبابية "Fuzzy Set" ومن ابرز تلك التعاريف، تعريف Zadeh في عام ١٩٦٥ الذي يعرف المجموعة الضبابية بأنها أصناف من العناصر مع درجة انتماء مستمرة وان هذه المجموعة ميزت بدالة الانتماء "المميزة" التي خصصت لكل عنصر درجة انتماء مداه بين الصفر والواحد. وتمثل دالة الانتماء اهمية في نظرية المجوعات الضبابية وهي تمثل احد افراد الزوج المرتب الممثل الضبابية وتعبر عن درجة انتماء العنصر الى المجموعة الضبابية. واقترح Zadeh دالتين قياسيتين لتحديد الانتماء ويرتبط بناء دالة الانتماء بطبيعية المجموعة وبذاتها.

٣-٢ البرمجة الخطية الضبابية Fuzzy Linear Programming

ان غاية مشاكل البرمجة الخطية LPPS في السيناريو الهش هو تعظيم او تقليل دالة الهدف الخطية تحت قيود خطية. لكن في العديد من الحالات العملية قد لا يكون صانع القرار قادرا على تحديد الهدف او دالة القيود بتحديد لكن بالاحرى يمكن ان تحددها بـ "إحساس ضبابي" في مثل هذه الحالات يتم استخدام البرمجة الخطية الضبابية لكي تتوفر لدى صانع القرار مرونة أكثر. تظهر الضبابية في البرمجة الخطية في العديد من الحالات منها، المعادلات قد تكون ضبابية، الهدف قد يكون ضبابي او معلمات المشكلة قد تكون إعداد ضبابية.

٢-٣-١ الأنموذج الرياضي

مشكلة البرمجة الخطية الكلاسيكية هي ايجاد القيم الصغرى او العظمى لدالة الهدف خطية تحت قيود تمثل بواسطة معادلات خطية. ان معظم نماذج مشكلة البرمجة الخطية يأخذ الشكل الرياضي الاتي:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Optimize [max or min] } Z = c_1x_2 + c_2x_2 + c_3x_3 + \dots + c_nx_n \\ \text{Subject to:} \\ a_{11}x_{11}+a_{12}x_{12}+a_{13}x_{13}+\dots\dots\dots+a_{1n}x_{1n}\ (\le,=,\ge)b_1 \\ a_{21}x_{21}+a_{22}x_{22}+a_{23}x_{23}+\dots\dots\dots+a_{2n}x_{2n}\ (\le,=,\ge)b_2 \\ a_{31}x_{31}+a_{32}x_{32}+a_{33}x_{33}+\dots\dots\dots+a_{3n}x_{3n}\ (\le,=,\ge)b_3 \\ \vdots \\ a_{m1}x_{m1}+a_{m2}x_{m2}+a_{m3}x_{m3}+\dots\dots\dots+a_{mn}x_{mn}\ (\le,=,\ge)b_m\end{array}\right\} \dots\dots\dots(1)$$

فضلاً عن $X_j >= 0$ و $1=< j =< n$

اي أن كل من a_{ij} , b_i , c_j عدد حقيقي ثابت

$i = 1,2,\dots, m$

$j = 1,2,\dots, n$

حيث يطلق على معاملات c_j بدالة الهدف (أذ تمثل c_j ربح أو كلفة) وعلى المعادلة Z اسم دالة الهدف كما يطلق على المتباينات اسم الضوابط أو القيود .

وتمثل b_i كمية الموارد المتاحة المطلوب برمجتها لتحقيق الهدف المطلوب وتمثل a_{ij} كمية الموارد المتاحة من i والمطلوب تخصيصها لكل وحدة واحدة من النشاط أو الفعالية j .

ويلاحظ من الصياغة أن إشارة المتغير x_j مقيدة بشرط عدم السالبية (non-negative) وهذا الشرط مهم وضروري في أنموذج البرمجة الخطية.

وفي العديد من الحالات العملية لا تكون دالة الهدف او القيود محددة بشكل واضح بل تكون في حدود ضبابية، وفي مثل هذه الحالة يستخدم بعض انواع البرمجة الضبابية FLP وعلى الأغلب يمكن صياغة الأنموذج الرياضي لمشكلة البرمجة الخطية الضبابية بشكل الاتي:

$$\left.\begin{array}{l}\text{MAX } \Sigma\, C_jX_j \\ S.T \quad \sum A_{ij} \quad X_i \le B_i \qquad (i \in N_m) \\ \qquad\qquad X_j \ge 0 \qquad\quad (j \in N_n)\end{array}\right\} \dots\dots\dots(2)$$

حيث ان $A_{i,j},B_i,C_j$ هي اعداد ضبابية (Fuzzy number) و X_j تمثل المتغيرات التي حالتها هي اعداد ضبابية.

٢-٣-٢ الحالات الضبابية

ان عمليات االجمع والضرب هي عمليات الحساب الضبابي والعلامة > تمثل الاعداد الضبابية.بدلاً من مناقشة هذا النوع العام، يمكن تمثيل الحالات من خلال حالتين خاصتين من البرمجة الخطية الضبابية، هما:

الحالة ١: مشكلة البرمجة الضبابية التي يكون فيها الطرف الايمن B_i ضبابي فقط.

$$\left.\begin{array}{l}\text{MAX } \Sigma\, C_jX_j \\ S.T \quad \sum a_{ij} \quad X_i \le B_i \qquad (i \in N_m) \\ \qquad\qquad X_j \ge 0 \qquad\quad (j \in N_n)\end{array}\right\} \dots\dots\dots(3)$$

الحالة ٢: مشكلات البرمجة الضبابية التي يكون فيه اعداد الطرف الايمن B_i والمعاملات A_{ij} للقيود المصفوفة هي اعداد ضبابية.

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{MAX}\ \Sigma\ C_jX_j \\ S.T \quad \sum A_{ij} \quad X_i \le B_i \qquad (i \in N_m) \\ \qquad\qquad X_j \ge 0 \qquad\quad (j \in N_n) \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

عموماً، مشاكل البرمجة الخطية الضبابية تحول اولاً الى مشاكل خطية او غير الخطية، ثم تحل بواسطة الطريقة القياسية. ان النتائج النهائية لمشكلة البرمجة الخطية الضبابية هي الأعداد الحقيقية، التي تمثل الحل الوسط من ناحية تضمنها الأعداد الضبابية.
سنناقش مشاكل الخطية الخطية الضبابية من النوع في المعادلة(٣)، في هذه الحالة، ان الأعداد الضبابية تأخذ دالة الانتماء الاتية:

$$B_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{when } x \le b_i \\ \dfrac{b_i + p_i - x}{p_i} & \text{when } b_i < x < b_i + p_i \\ 0 & \text{when } b_i + p_i \le x, \end{cases} \qquad \ldots(5)$$

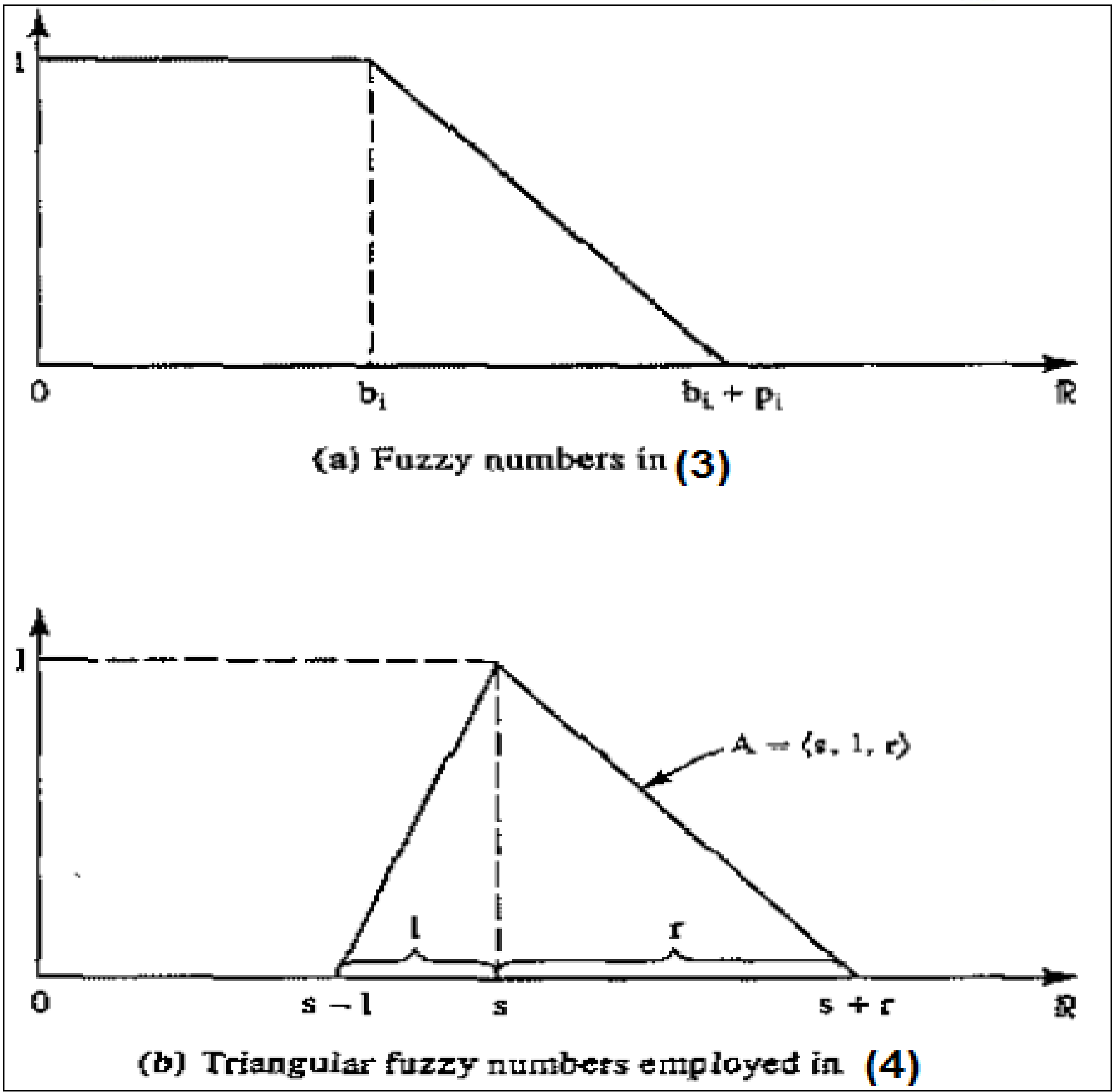
حيث ان
$X \in R$ لكل صف $X=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$.
B_i: الطرف الايمن من شكلة البرمجة الخطية او الموارد المتاحة.
P_i: يمثل معلمة التي تلاحظ او تقيس اتجاة الذي يكون P فيه يتناقص.

اول حساب نقوم به هو درجة $D_i(X)$ الذي X يحقق ith قيد $(i \in N_m)$وتحسب من خلال الصغية الرياضية الاتية:

$$D_i(\mathbf{x}) = B_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right)$$

هذه الدرجات هي مجموعة ضبابية في R^n وتقاطع $\cap D_i$، هو مجموعة ضبابية ملائمة.
بعد ذلك نجد القيم المثالية للمجموعة الضبابية من خلال حساب الحدود العليا والدنيا للقيم المثالية. الحدود الدنيا للقيم المثالية Z_i، يتم الحصول عليها بواسطة مشكلة البرمجة الخطية القياسية.

$$\begin{array}{l} \mathbf{MaX}\ \ \Sigma\ \mathbf{CX} \\ S.T \quad \sum a_{ij} \quad X_i \le b_i \qquad (i \in N_m) \\ \qquad\qquad X_j \ge 0 \qquad\quad (j \in N_n) \end{array}$$



(a) Fuzzy numbers in (3)

(b) Triangular fuzzy numbers employed in (4)

شكل(٢)يبين انواع الاعداد الضبابية المستخدمة في البرمجة الخطية الضبابية

الحد الاعلى للقيم المثالية Z_u ،يتم الحصول عليها بواسطة نفس مشكلة البرمجة الضبابية بعد استبدال كل b_i بـ b_i+p_i.

$$\left.\begin{aligned} &\max' \quad z = \mathbf{cx} \\ &\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i + p_i \quad (i \in \mathbb{N}_m) \\ &\qquad x_j \ge 0 \quad (j \in \mathbb{N}_n). \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

لذلك، فان دالة الانتماء للمجموعة الضبابية للقيم المثالية G التي هي مجموعة جزئية ضبابية لـ R^n، تعرف باستخدام الصيغة الاتية.

$$G(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{when } z_u \le \mathbf{cx} \\ \dfrac{\mathbf{cx} - z_l}{z_u - z_l} & \text{when } z_l \le \mathbf{cx} \le z_u \\ 0 & \text{when } \mathbf{cx} \le z_l. \end{cases}$$

الان المشكلة المبينة في المعادلة(٣) تصبح مشكلة أمثلية كلاسيكية الاتية:

$$\left.\begin{aligned} &\max \quad \lambda \\ &\text{s.t.} \quad \lambda(z_u - z_l) - \mathbf{cx} \le -z_l \\ &\qquad \lambda p_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i + p_i \quad (i \in \mathbb{N}_m) \\ &\qquad \lambda, x_j \ge 0 \quad (j \in \mathbb{N}_n). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(7)$$

المشكلة اعلاه في الحقيقية هي مشكلة إيجاد $X\in R^n$، بحيث

$$[(\bigcap_{i=1}^{m} D_i) \cap G](x)$$

مشكلة الوصول للقيم القصوى هو إيجاد النقطة التي تحقق القيود والهدف بأعلى درجة، هذه الفكرة قدمت من قبل Bellman وZadeh عام ١٩٧٠. الطريقة المستخدمة هنا تسمى بالطريقة المتماثلة "هذا يعني ان القيود ودالة الهدف الخطية هو معالج متماثل treated symmetrically".وهنالك أيضا غير متماثل.

٢-٣-٣ الضبابية المثلثية:

هنالك حالة أخرى لمشكلة البرمجة الخطية الضبابية، عندما تكون الاعداد الضبابية المثلثية. اي عدد ضبابي ثلاثي يمكن تمثيله بواسطة ثلاثة اعداد حقيقية s,i,r، وهي معرفة في الشكل (١) الحالة b. وباستخدام هذا التمثيل يمكن كتابة A=(s,I,r). وكذلك يمكن الكتابة المشكلة(٤) كالاتي:

$$\left.\begin{aligned} &\max \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ &\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} \langle s_{ij}, l_{ij}, r_j \rangle x_{ij} \le \langle t_i, u_i, v_i \rangle \quad (i \in \mathbb{N}_m) \\ &\qquad x_j \ge 0 \quad (j \in \mathbb{N}_n), \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots(8)$$

حيث ان $A_{ij}=(s_{ij},l_{ij},r_{ij})$ و $B_i=(t_i,u_i,v_i)$ يمثلون اعداد ضبابية. الجمع وان الضرب هي عمليات للاعداد الضبابية والترتيب الجزئي ≥ يعرف بواسطة A≤B اذا كان Max(A,B)=B. من السهل اثبات ان أي اعداد ضبابية مثلثية A=(s1,l1,r1)وB=(s2,l2,r2)،A≤Bاذا كان S1≤S2,S1-L1≤S2-L2 و S1+r1≤S2+r2. علاوة على ذلك (s1,L1,r1)+(s2,L2,r2)=(s1+s2,L1+L2,r1+r2) و (s1,L1,r1)X=(s1x,L1x,r1x) لاي عدد حقيقي X غير سلبي. لذلك يمكن كتابة المشكلة كالاتي:

$$
\left.\begin{aligned}
&\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
&\text{s.t.} \sum_{j=1}^{n} s_{ij} x_j \le t_i \\
&\sum_{j=1}^{n} (s_{ij} - l_{ij}) x_j \le t_i - u_i \\
&\sum_{j=1}^{n} (s_{ij} + r_{ij}) x_j \le t_i + v_i \quad (i \in \mathbb{N}_m) \\
&x_j \ge 0 \quad (j \in \mathbb{N}_n).
\end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots(9)
$$

بما ان كل الإعداد تتضمن إعداد حقيقية، لذلك فان المشكلة اعلاه (معادلة ٩) هي مشكلة برمجة خطية كلاسيكية او تقليدية.

٢-٤ طرائق التنبؤ بالطلب:

لايمكن الاستغناء عن عملية التنبؤ باي شكل من اشكال التخطيطواتخاذ القرار.وبما ان سلوك المستهلك على السلعة للمشكلة قيد البحث غير موسمي، لذلك سيتم عرض الطرائق المخصصة لهذا النوع من التنبؤ في الجانب النظري، وهذه الطرائق هي:

- **طريقة التمهيد الآسي:**

تعد أساليب التمهيد الآسي من الأساليب الشائعة الاستخدام في عملية التنبؤ لمعالجة بيانات السلسلة الزمنية، وذلك بسبب كفاءتها وبساطتها وتكيفها للتغيرات المستقبلية فضلاً عن عدم حاجتها الاحتفاظ بعدد كبير من البيانات، واذا كان سلوك يمتلك اتجاه تعتمد طريقة التمهيد الآسي المزدوج "طريقة هولت Holt's Method ". وتستند هذه الطريقة على المعادلات الاتية:

$$s_t = \alpha z_t + (1-\alpha)(s_{t-1} + b_{t-1}), \quad t = 1,2,\ldots,n \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$

$$b_t = \gamma(s_t - s_{t-1}) + (1-\gamma) b_{t-1}, \quad t = 1,2,\ldots,n \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(11)$$

$$\hat{z}_t = s_t + b_t t, \quad t = 1,2,\ldots,n \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(12)$$

$$z_n(\ell) = s_n + b_n \ell, \quad \ell > 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(13)$$

Where:

$S_0 = Z_1$ **&** $b_0 = Z_2 - Z_1$

Where $0 < \alpha, \beta, \gamma < 1$

حيث أن α,β,γ **تمثل معلمات التمهيد.**

- **السلاسل الزمنية ونماذج بوكس وجينكنز (BJ) المختلطة الموسمية**

تعرف السلسلة الزمنية على انها متتابعة من القيم المشاهدة لظاهرة عشوائية معينة مرتبطة بالزمن. وتتوفر بعض المعايير الإحصائية التي تُستخدم في وصف نوعية السلسلة الزمنية موضوع البحث وبالتالي تسهيل نمذجتها، تتمثل هذه المعايير في:

دالة الارتباط الذاتيACF: تبين مدى العلاقة أو ارتباط قيم السلسلة المتجاورة وتتراوح قيمة معامل الارتباط الذاتي بين -١و١.

دالـة الارتبـاط الـذاتي الجزئيPACF: تقيس دالة الارتباط الذاتي الجزئي الأثر الجزئي لإضافة القيم المتأخرة لمتغير ما ، ويمكن الحصول على معاملات PACF من معادلة الانحدار الذاتي للسلسة موضوع البحث.ان أفضل تنبؤ مستقبلي لقيمة الظاهرة X_t في الزمن t+L والتي تتبع النموذج المختلط العام :

$$\Phi_p(B^s)\ \Phi_p(B)(1-B)^d\ (1-B^s)^D\ X_t = \Theta_Q(B^s)\ \theta_q(B)\ a_t \quad \ldots\ldots\ldots\ (14)$$

حيث s طول الفترة الموسمية حيث :

$$X^{\wedge}_t(L)=E\left[\,X_{t+L}\ \ X_t\,,\ X_{t+1}\,,\ \ldots\ldots\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ (15)$$

عند جعل النموذج (٩) مستقرا يمكن إعادة كتابة بدلالة الأخطاء العشوائية وبالصيغة :

$$X_t = \Psi(B)\ a_t = a_t + \Psi_1 a_{t-1} + \Psi_2\ a_{t-2} + \ldots$$
$$= \Sigma\ \Psi_J\ a_{t-J}\ ,\ \ \Psi_0 = 1 \quad \ldots\ldots\ (16)$$

وعليه فان خطأ التنبؤ المستقبلي "forecast error" يمكن كتابته بالصيغة :

$$\Psi_J\ a_{t+L-J}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (3.4)\ ١١\ e_t(L)=X_{t+L}-X^{\wedge}_t(L)=$$

ولكون : $E[e_t(L)]=0$

فان معدل مربعات الخطأ التنبؤ المستقبلي هو :

$$F\ MSE\ [X^{\wedge}_t(L)] = E[X^{\wedge}_t(L)-X^{\wedge}_{t+L}]^2 = E[e^2_t(L)]$$
$$= \sigma^2_a\ \Sigma\ \Psi^2_J \quad \ldots\ldots..(17)$$

ولبيان كفاءة طرائق التنبؤ، ولإغراض المقارنة بين النتائج الطرائق يمكن اعتماد المعايير الإحصائية آلاتية:

أولا: معدل القيم المطلقة للأخطاء (Mean absolute error)

حيث: $$MAE=(1/M)\ \Sigma\ e_t(L) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (18)$$

ثانيا: معدل مربعات الخطأ (Mean square error) :

حيث: $$MSE=(1/M)\ \Sigma e^2_t(L) \quad \ldots\ldots..\ \ldots\ldots\ldots\ (19)$$

ثالثا: معدل القيم المطلقة لنسب الأخطاء (Mean absolute percentage) :

حيث: $$MASP=\{(1/M)\ \ \Sigma\ e_t(L)/X_{t+L}\ \ \} \quad \ldots..(20)$$

رابعاً: معامل التحديد " Coefficient of determination"

$$R^2=SSR/SST \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(21)$$

Where:

SST =Total sum of square

$$= \Sigma\ (y(i)-\mu(y))^2 \qquad ;for\ i=1,2,\ \ldots,n$$

SSR =Regression sum of square

$$= \Sigma\ (\hat{Y}(i)-\mu(y))^2 \qquad ;for\ i=1,2,\ \ldots,.n$$

وأية طريقة تعطي الأصغر قيمة للمعايير الإحصائية في أعلاه والأكبر للمعامل التحديد فهي الطريقة الأفضل.

٣. الجانب التطبيقي

٣-١-المقدمة

قسم هذا الجانب الى مرحلتين رئيسيتن، الاولى تبين الحالة التطبيقية وتمثل تخطيط الانتاج لمصنع بغداد لانتاج الاثاث التابع لوزارة الصناعة والمعادن فضلا عن تعظيم إيرادات المصنع بواسطة جدولة إنتاجه فضلا عن التنبؤ بالطلب من خلال قيد الطلب احتمالي، واعتمدت دالة الانتماء في عملية النمذجة. والحالة الاخرى هي الحالة التجريبية حيث تم اعتماد الاعداد الضبابية المثلثية في عملية النمذجة وتم استخدام المحاكاة لتوليد مشكلة البرمجة الخطية الضبابية المثلثية الإعداد، لغرض توضيح تطبيقات وحالات البرمجة الخطية الضبابية.

(I) الحالة الأولى

٣-٢ مشكلة البحث

يسعى مصنع بغداد لإنتاج الأثاث الخشبي في وزارة الصناعة الى تحقيق أقصى الإرباح من خلال تخطيط إنتاجه من غرف المنام. وأدناه تعريفاً لمحددات المعضلة التي تم تحديدها "دراستها" مع المختصين في المصنع.

ينتج المصنع نوعين رئيسين من غرف المنام هما P1 "غرف المنام ذات الطابقين" وP2"غرف المنام ذات الطابق الواحد" . ويحقق المنتج P1 أرباحا قدرها ٤٥ دولار والمنتج أرباحا قدرها ٦٠ يحقق دولار. كل وحدة من المنتج P1 تستلزم ضعف ساعات العمل لكل وحدة من المنتج الثاني. وتتطلب كل وحدة من المنتج P1 وP2 عدد من ساعات العمل، لا يقل مجموع ساعات العمل المتاح عن ٦٥٠ ساعة بالشهر، بسبب ترتيبات خاصة بالعمل الإضافي. ان تجهيز كافي لمواد الخام "الخشب" يجب ان لا يقل عن ٥٥٠ وحدة بالشهر لكلا المنتجين لكن من المحتمل ان يمدد الى ٦٥٠ وحدة بالشهر وفقاً الى الخبرة السابقة. ان الطلب على المنتجين احتمالي، استنادا على مبيعات المصنع للمدة ٢٠٠١-٢٠٠٨.

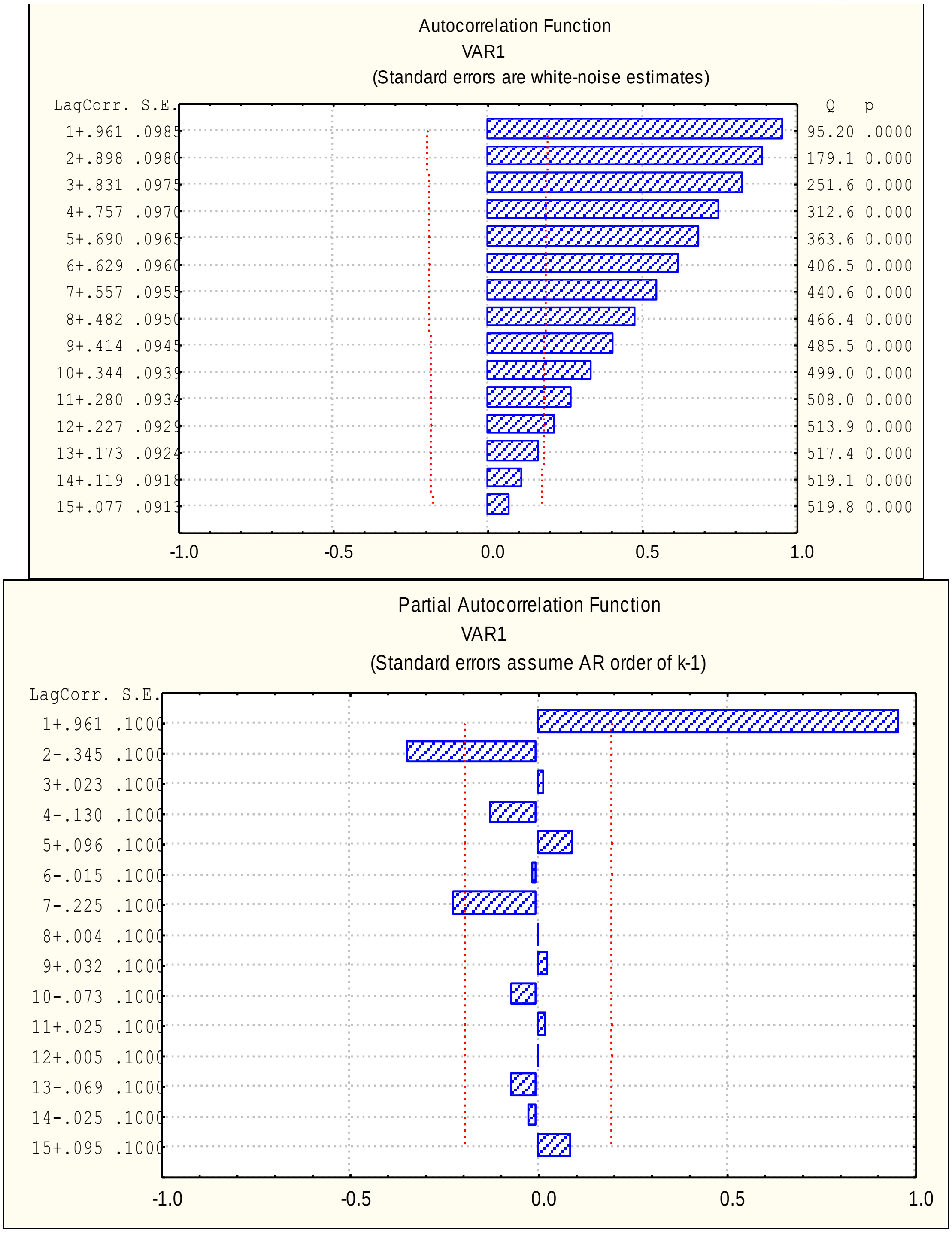
٣-٢-١ تعريف متغيرات القرار

- X_1: الاعداد المنتجة من المنتج P1.
- X_2: الا عداد المنتجة من المنتج P2
- B_1: الموارد المتاحة "المواد الأولية/الخشب".
- B_2: الموارد المتاحة "عدد ساعات العمل".
- D_1: الطلب على المنتج P1.
- D_2: الطلب على المنتج P2.

٣-٢-٢ التنبؤ بالطلب

ان بيانات الطلب[١] "المبيعات" المتوفرة هي للمدة ٢٠٠١-٢٠٠٨. والشكل الاتي يبين سلوك دالة الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي للمبيعات.

[١] لم يتم عرض بيانات المبيعات الخام وكذلك منحى التوفيق وذلك لاسباب ادارية حسب طلب ادارة المصنع.

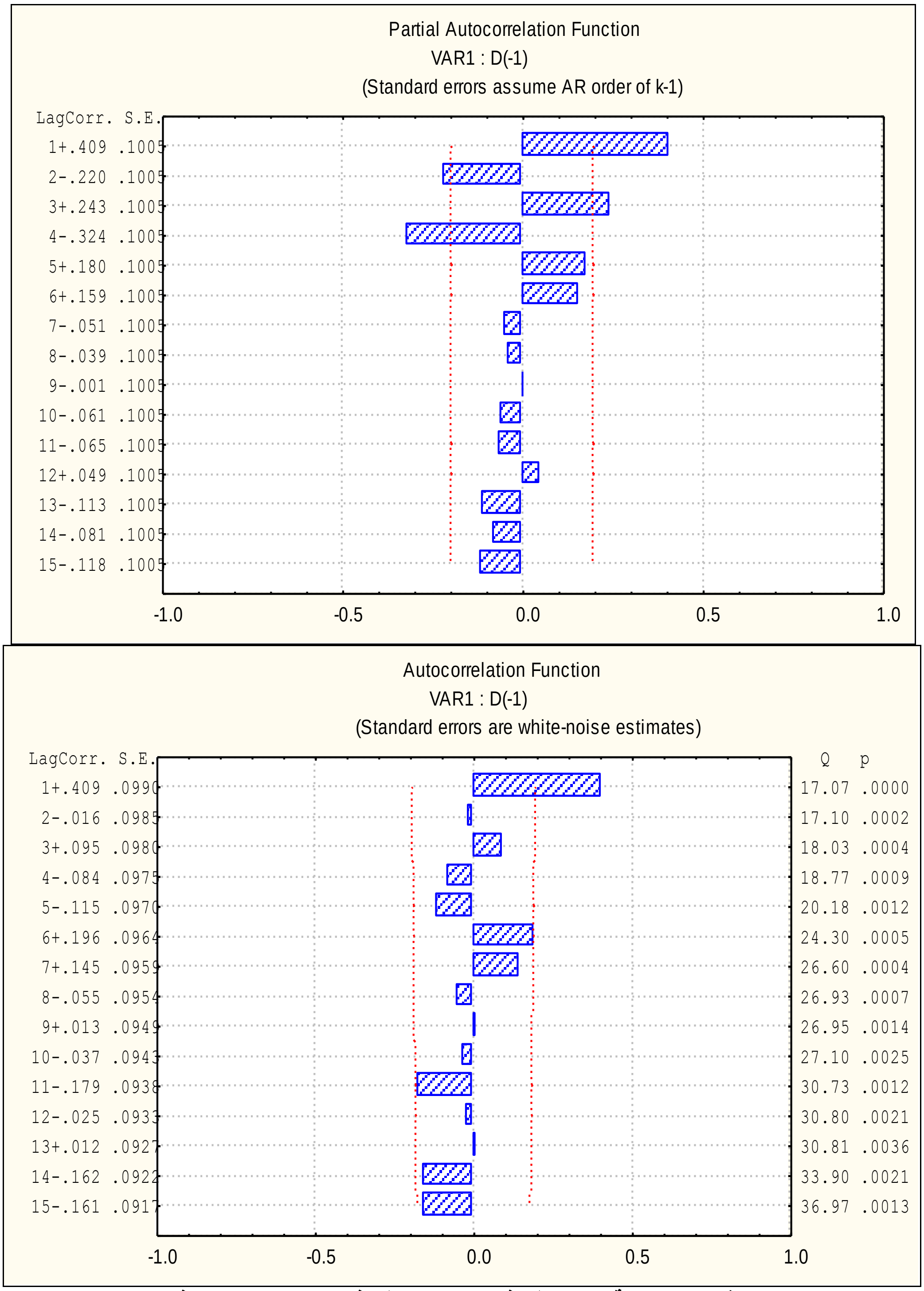


شكل(٣) يمثل سلوك دالة الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي للمبيعات

يتضح من شكل دالة الارتباط الذاتي ان البيانات غير مستقرة لان سلوك الدالة يتناقص "dies down" بشكل بطيء جدا وكذلك يتضح انها غير موسمية. لذلك سيتم الاعتماد على طرائق التنبؤ غير الموسمية وهي طريقة التمهيد الاسي وطريقة بوكس-جينكز، وكانت النتائج كالاتي:

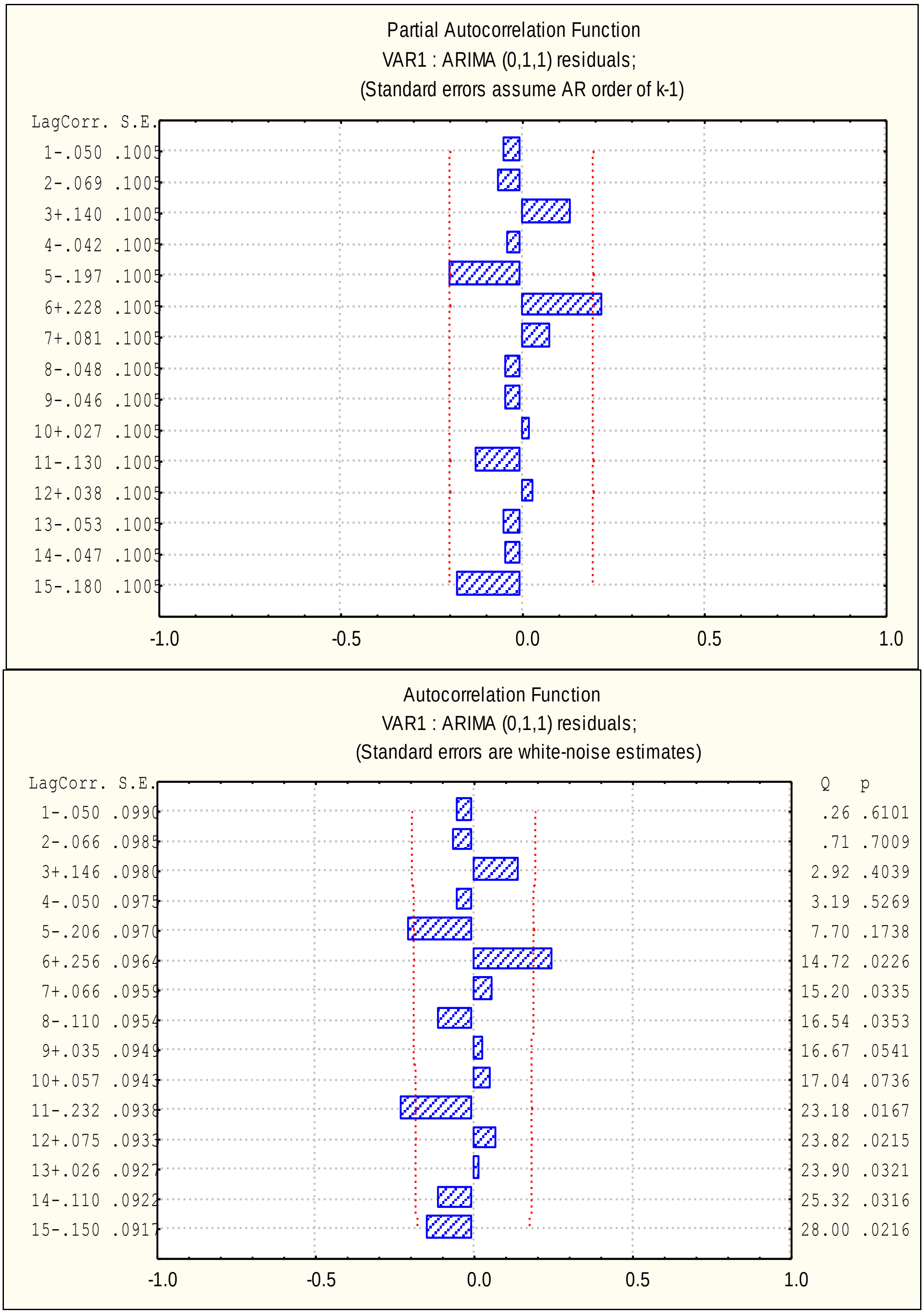
(i) **طريقة التمهيد الاسي: ان أفضل أنموذج أسي غير موسي هو أنموذج هلوت ذو معلمتين لان سلوك البيانات غير مستقر في المتوسط اي سلوك البيانات يتضمن اتجاه، وكانت قيم المعلمات المثالية هي α=.5 و β=0.072 التي تحقق اقل MSE (MSE=194.78) التي الحصول على النتائج بواسطة برنامج Statistica الإصدار السادس.**

(ii) **طريقة بوكس-جينكيز: يتضح من شكل (٢) ان البيانات غير مستقرة، لذلك تم اخذ الاختلاف (Difference) من الدرجة الاولى. والشكل الاتي يوضح سلوك دالة الارتباط الذاتي ودالة الارتباط الذاتي الجزئي بعد اخذ الاختلاف من الدرجة الاولى لكي يتم تشخيص درجة انموذجب وكس-جينكيز.**



شكل(٤) يمثل سلوك دالة الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي بعد اخذ الاختراف

يتبين من شكل اعلاه ان سلوك دالة الارتباط الذاتي يتناقص اسيا وسلوك دالة الارتباط الذاتي الجزئي يتضمن على قطع من درجة ١، لذلك فان أفضل أنموذج لطريقة بوكس-جينكز غير موسمي الذي يحقق تحقق اقل MSE ، هو ARMA(0,1,1). اما قيمة معلمة الانموذج كانت $\theta=-0.6604$ و MSE=174.52 . اما شكل دالة الارتباط الذاتي ودالة الارتباط الذاتي الجزئي للاخطاء، كان بالشكل الاتي:



شكل(٥) يمثل سلوك دالة الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي للاخطاء

يلاحظ من سلوك الدالتين في شكل اعلاه وكذلك قيمة Q، ان سلوك الاخطاء عشوائي اي الاخطاء عشوائية.

وكانت النتائج المعايير الإحصائية بالاعتماد على المعدلات(٩-١٥) لتلك الطرائق كالأتي:

طرائق التنبؤ / المعايير الإحصائية	MSE	MAPE	R^2
التمهيد الآسي/هلوت	194.78	5.45	86
بوكس-جينكيز	174.52	3.2	89.9

الجدول (١) يبين نتائج معايير طرائق التنبؤ

تتضح من نتائج جدول المعايير الإحصائية ان أفضل أنموذج تنبؤ هو بوكس- جنيكيز، لذلك تم الاعتماد على أنموذج بوكس-جينكيز ARMA(0,1,1) وكان معدل قيم التنبؤ للفترة القادمة للمنتج الأول ٢٥٠ والمنتج الثاني ٢٦٠.

٣-٣ الأنموذج الرياضي للمشكلة

استنادا على المعطيات أعلاه، فان المشكلة لا يمكن حلها بواسطة البرمجة الخطية الاعتيادية لان قيم المورد المتاحة احتمالية وغير ثابتة او واضحة لذا نلجأ الى البرمجة الخطية الضبابية باستخدام المعادلات(٧و٨)، وعليه فأن الأنموذج الرياضي بالشكل الاتي:

$$\text{Max } z = 60X_1+45X_2$$

S.T.

$$X_1+X_2 \le B_1 \quad \ldots\{22\}$$ المواد الأولية

$$2X_1+X_2 \le B_2 \quad \ldots\{23\}$$ عدد ساعات العمل

$$X_1 \le D_1 \quad \ldots\{24\}$$ الطلب الاحتمالي على المنتج الأول

$$X_2 \le D_2 \quad \ldots\{25\}$$ الطلب الاحتمالي على المنتج الثاني

$$\& X_1, X_2 \ge 0 \quad \ldots\{26\}$$ عدم السلبية

Where:

$$B_1 = \begin{cases} 1 & X \le 550 \\ \dfrac{550 - X}{150} & 550 < X < 700 \\ 0 & X \ge 700 \end{cases}$$

$$B_2 = \begin{cases} 1 & X \le 650 \\ \dfrac{650 - X}{150} & 650 < X < 800 \\ 0 & X \ge 800 \end{cases}$$

& D_1,D_2=Probabilistic demand "finding by forecasting methods"

بما أن الطلب احتمالي، لذلك تسمى أو تعد القيود (25-26) ، بقيد الصدفة "Chance Constraint"

لمعالجة مشكلة البرمجة الخطية الضبابية FLP، نحسب أولا الحدود الدنيا والعليا لدالة الهدف من خلال حل مسائلتي البرمجة الخطية الكلاسيكية الآتيتين، نحصل على Z_i=23.400 و Z_u=26.700

A: Max z = $60X_1+45X_2$

S.T.

$X_1+ X_2 \le$ ٥٥٠ …{27}

$2X_1+ X_2 \le 650$ …{28}

$X_1 \le 250$ …{29}

$X_2 \le 260$…{30}

&X_1, $X_2 \ge 0$ ……{31}

B: Max z = $60X_1+45X_2$

S.T.

$X_1+ X_2 \le 700$ …{32}

$2X_1+ X_2 \le 800$ …{33}

$X_1 \le 250$ …{34}

$X_2 \le 260$…{35}

&X_1, $X_2 \ge 0$ ……{36}

لذلك فان مشكلة البرمجة الخطية الضبابية وباستخدام المعادلة (٧) تصبح بالشكل الأتي:

Max λ

S.T.

$\lambda\, 3.3-60X_1+45X_2 \le 23.4$… {37}

$\lambda\, 150+X_1+ X_2 \le 700$ … {38}

$\lambda 150+ 2X_1+ X_2 \le 800$ … {39}

$X_1 \le 250$ … {40}

$X_2 \le 260$… {41}

& λ ,X_1, $X_2 \ge 0$ ……{42}

٣-٤ حل المشكلة وتحليل النتائج:

لغرض الإفادة من استخدام البرامجيات الجاهزة في معالجة مشكلات البرمجة الخطية، فقد تم استخدام برنامج QSB لحل المشكلة أعلاه وكانت كالآتي:

Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
Lamda	4.6667	1.0000	4.6667	0	basic	0	M
X2	0	0	0	-0.0067	at bound	-M	0.0067
X3	0	0	0	-0.0067	at bound	-M	0.0067
Objective	Function	(Max.) =	4.6667				
Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
C1	15.4000	<=	23.4000	8.0000	0	15.4000	M
C2	700.0000	<=	700.0000	0	0.0067	0	800.0000
C3	700.0000	<=	800.0000	100.0000	0	700.0000	M
C4	0	<=	250.0000	250.0000	0	0	M
C5	0	<=	260.0000	260.0000	0	0	M

جدول(٢) يبين نتائج الحل الامثل

وبحل الامثلية الكلاسيكية لهذه المشكلة، تم الحصول على التعظيم $\lambda=0.47$.

وبالتعويض عن قيمة λ المثالية في الأنموذج أعلاه وحله، من خلال البرمجة الخطية العددية باستخدام برنامج الاكسل، وتم التوصل الى النتائج الاتية:

Microsoft Excel 10.0 Answer Report
Worksheet: [LP2.xls]ورقة1
Report Created: 7/17/2008 1:05:50 PM

Target Cell (Max)

Cell	Name	Original Value	Final Value
$D$5	profit totll of profit	25740	25755

Adjustable Cells

Cell	Name	Original Value	Final Value
$B$3	SOL X!	234	235
$C$3	SOL X2	260	259

Constraints

Cell	Name	Cell Value	Formula	Status	Slack
$D$8	c1 LHS	494	$D$8<=$F$8	Not Binding	135
$D$9	c2 LHS	729	$D$9<=$F$9	Binding	0
$D$10	c3 LHS	235	$D$10<=$F$10	Not Binding	15
$D$11	c4 LHS	259	$D$11<=$F$11	Not Binding	1
$B$3	SOL X!	235	$B$3=integer	Binding	0
$C$3	SOL X2	259	$C$3=integer	Binding	0

جدول(٣) يبين نتائج الحل الامثل

يتضح من جدول الحل الامثل اعلاه، ان خطة الإنتاج المثالية للشركة هي كالاتي:

تنتج الشركة من منتج الاول"غرفة ذو الطابقين"عدد يبلغ ٢٣٥ غرفة ومن منتج الثاني "غرفة ذو الطابق الواحد" عدد يبلغ ٢٥٩ غرفة، بحيث يحقق اجمالي أرباح او إيرادات تبلغ 25.755 وحدة نقدية "دولار".

(ii)الحالة الثانية:

٣-٥ النمذجة:

تم اعتماد الحالة التجريبية "Numerical Case" لتمثيل حالة ضبابية أخرى عندما يكون الاعداد الضبابية مثلثية، حيث استخدمت المحاكاة لتوليد الاعداد الضبابية المثلثية لمشكلة برمجة خطية ضبابية بواسطة الارقام العشوائية وبشكل عشوائي باستناد على المشكلة قيد البحث بفرض ان عدد المتغيرات القرار اثنان والموارد المتاحة b_j ثلاثة "المواد الأولية وعدد ساعات العمل والطلب" وكمية الموارد المحدودة من النوع I المطلوب تخصيصها لكل وحدة واحدة من النشاط j "a_{ij}" تمثل عدد ضبابية ثلاثي بفرض ان المواد المنتجة تمل مواد كيميائية، لاستخدام البرمجة الخطية الاعتيادية في المعالجة وذلك لبيان اغلب التطبيقات او الحالات لغرض الإفادة أكثر. وكما مبين في الأنموذج الرياضي آلاتي:

Max z = $90X_1+75X_2$

S.T.

$(8,4,2)X_1+(10,6,2)X_2 \le (٧٠٠,500,600)$ …{43}

$(8,2,4)X_1+(2,1,2)X_2 \le (٨٠0,7٠٠,6٠0)$ … {44}

$(1,0,0)X_1 \le (٢6٠,240,220)$ ……{45}

$(1,0,0)X_2 \le (270,250,230)$ …….{46}

&$X_1, X_2 \ge 0$ ……{47}

واستنادا الى المعادلة (٩)، فان المشكلة اعلاه تصبح بالشكل الاتي:

Max z = $90X_1+75X_2$

S.T.

$8X1+10X2 \le 700$…{48}

$8X_1+2X_2 \le 80٠$ … {49}

$4X1+4X2 \le 200$…{50}

$6X_1+1X_2 \le 100$ … {51}

$10X1+12X2 \le 1300$…{52}

$12X1+4X2 \le 1400$…{53}

$X_1 \le 260$ … {54}

$X_1 \le 20$… {55}

$X_1 \le 480$ … {56}

$X_2 \le 270$ … {57}

$X_2 \le 20$ … {58}

$X_2 \le 500$ … {59}

&$X_1, X_2 \ge 0$ ……{60}

٦-٣ حل المشكلة وتحليل النتائج

الجدول الاتي يبين نتائج الحل الامثل للأنموذج أعلاه باستخدام البرمجة الخطية بواسطة برنامج QSB:

Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
X1	13.3333	90.0000	1,200.0000	0	basic	0	450.0000
X2	20.0000	75.0000	1,500.0000	0	basic	15.0000	M
Objective	Function	(Max.) =	2,700.0000				
Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
C1	306.6667	<=	700.0000	393.3333	0	306.6667	M
C2	146.6667	<=	800.0000	653.3333	0	146.6667	M
C3	133.3333	<=	200.0000	66.6667	0	133.3333	M
C4	100.0000	<=	100.0000	0	15.0000	20.0000	140.0000
C5	373.3333	<=	1,300.0000	926.6667	0	373.3333	M
C6	240.0000	<=	1,400.0000	1,160.0000	0	240.0000	M
C7	13.3333	<=	260.0000	246.6667	0	13.3333	M
C8	13.3333	<=	20.0000	6.6667	0	13.3333	M
C9	13.3333	<=	480.0000	466.6667	0	13.3333	M
C10	20.0000	<=	270.0000	250.0000	0	20.0000	M
C11	20.0000	<=	20.0000	0	60.0000	0	40.0000
C12	20.0000	<=	500.0000	480.0000	0	20.0000	M

جدول(٤) يبين نتائج الحل الامثل

يتضح من جدول(٤) الذي يمثل الحل الامثل الاتي:

تنتج الشركة 13.3 وحدة من المنتج الاول و20 وحدة من المنتج الثاني بحيث يحقق اجمالي ارباح او ايرادات تبلغ 2.700 دولار. أما اسعار الظل فكانت للقيد (٤ و١١)على التوالي هي (١٥و٦٠) أي عند زيادة المورد المتاح للقيد (٤ و١١)على التوالي وحدة واحدة فان الأرباح اي دالة الهدف ستزداد بمقدار (١٥و٦٠) وحدة نقدية على التوالي.

٤. الاستنتاجات :Conclusions

أن أهم الاستنتاجات التي تم التوصل أليها من خلال هذا البحث كالأتي :

- اعتماد البرمجة الخطية العددية الاحتمالية في معالجة المشكلات الضبابية "لان قيد الطلب احتمالي وتم تقديره بواسطة طرائق التنبؤ"، في حين معظم البحوث والمصادر تستخدم البرمجة الخطية الاعتيادية في المعالجة.فضلا عن في عملية النمذجة للمشكلة قيد البحث تم المزج بين القيود الضبابية واحتمالية للوصول الى الحالة المثالية.
- استخدام طرائق التنبؤ "بوكس- جينكيز والتمهيد الاسي" للتنبؤ بالطب، لتحديد قيد الطلب الاحتمالي في المشكلة البرمجة الخطية عموماً الذي يسمى بقيد الصدفة، لان الطلب دائما في الواقع العملي غير مؤكدة في حين الكثير يفترضه مؤكد او محدد.
- يتضح من تحليل نتائج الحل الأمثل، أن أفضل خطة إنتاجية للشركة هي أنتاج تنتج الشركة ٢٣٥ غرفة ذو الطابقين و٢٥٩ غرفة ذو الطابق الواحد ويحقق اجمالي أرباح او إيرادات تبلغ 25.755 دولار. ونوصي باعتماد الطرائق الكمية للتنبؤ بالطلب للشركة بدلاً عن تخمينه من قبل قسم المبيعات، وكانت طريقة التنبؤ المثالية او الأفضل هي طريقة بوكس– جينكيز التي تحقق اقل خطأ واكبر قيمة لمعامل التحديد R^2.
- اعتماد البرمجة الخطية الضبابية في معالجة مشكلات اتخاذ القرار بصورة عامة وتخطيط الإنتاج بصورة خاصة، لان معظم المشاكل العملية لا يتمكن صانع القرار من تحديد او معرفة القيود او دالة الهدف بشكل مؤكد بل بشكل ضبابي او هش. في حين البرمجة الخطية الاعتيادية تتعامل مع الحالات المؤكدة مما يصعب تطبيقاها في الواقع العلمي وخصوصا في الظرف الحالي حيث المستجدات والتطورات تحدث بشكل متسارع. وفي هذا البحث تم تسليط الضوء على اكثر حالات البرمجة الضبابية شيوعيا في جانب التطبيقي وتجربي حيث تم صياغة المشكلة بواسطة دالة انتماء متماثلة ودالة انتماء مثلثية، لغرض افادة الباحثين والمهتمين في هذا المجال.
- اعتماد البرامجيات الجاهزة في استخراج الحل الامثل لمشكلة البرمجة الخطية لكونها تمتاز بالكفاءة والدقة والسرعة فضلا عن سهولة الاستخدام مثل هذه البرامجيات QSB والاكسل "Excel".

References

1) Cadenas, J.M., Verdegay, J.L., 1997. Using fuzzy numbers in linear programming. IEEE Transactions on systems, Man and Cybernetics—Part B Cybernetics 27 (6), 1016–1022.
2) Dubois, D., Kerre, E., Mesiar, R., Prade, H., 2000. Fuzzy interval analysis. In: Dubois, D., Prade, H. (Eds.), Fundamentals of Fuzzy Sets.Kluwer, Massachusetts, pp. 483–561.
3) Hillier and liberman, 2005 .Introduction to the operations research, (Published by McGraw –hill), Eighth Edition.
4) JimeInez, M., RodrıIguez, M.V., Arenas, M., Bilbao, A, 2000. Solving a possibilistic linear program through compromise.
5) Foundation and Industrial Applications, 2000.International Series in Intelligent Technologies.Kluwer, Dordrecht, pp. 73–90.
6) Mariano Jime´nez et al, 2005. Linear programming with fuzzy parameters. European Journal of Operational Research ARTICLE IN PRESS.
7) M. Hojati, C.R. Bector, K. Smimou, 2005.A simple method for of fuzzy linear regression, European Journal of Operation Research 166 172-184.
8) Hojati, C.R. Bector and K. Smimou, 2005. simple method for computation of fuzzy linear regression. European Journal of Operation Research. vol. 166, pp. 172-184.
9) M. Modarres, E. Nasrabadi, M.M. Nasrabadi, 2005.Fuzzy linear regression models with least square errors, Appl. Math. Comput. 163 .
10) M.M. Nasrabadi, E.Nasrabadi, 2004.A mathematical-programming approach to fuzzy linear regression analysis, Appl. Math. Comput.155.
11) Taha, Hamdy ,2008 ,"Operation Research An Introduction "(8 th edition) prentice –hall,Inc, new jersey
12) Yuan, Y., 1991. Criteria for evaluating fuzzy ranking methods. Fuzzy Sets and Systems 44, 139–157.