Notes on Exponential Distribution

ملاحظات حـــــول التوزيع الاســـــي

أ. د. سليم الغرابي
جامعة بغداد/ كلية الادارة والاقتصاد
قسم الاحصاء

١- المقدمـــــة

المتغير العشوائي X له توزيع أسي اذا كان له دالة احتمالية الكثافة بالشكل:

$$f(x)=\frac{1}{\lambda}\exp\left[-(x-\theta)/\lambda\right];x>\theta\ ,\ \lambda>0 \qquad ....(1)$$

عندما $\theta>0$ ، هذه هي الحالة الخاصة لتوزيع كاما.
غالباً جداً ولسبب معقول تأخذ $\theta=0$. الحالة الخاصة لـ (١) التي نحصل عليها تسمى بالتوزيع الاسي لمعلمة واحدة.
اذا كانت $\theta=0$ ، $\lambda=1$ ، التوزيع في هذه الحالة يسمى التوزيع الاسي القياسي
اما بالنسبة لعائلة التوزيع الاسي.

افرض ان $F=\lfloor f(x,\theta),\ \theta\in\Theta, x\in H\rfloor$

هي دالة لمعلمة واحدة لعائلة دوال احتمالية الكثافة الاسية بالنسبة الى قياس **Lebesgue** على مجموعات **Borel** لـ **HCR** مع معلمة الفضاء $\Theta\in R$ التي تكتب بالشكل:

$$f(x,\theta)=\exp\left[b(\theta)t(x)+c(\theta)+d(x)\right], x\in B,\theta\in\Theta \qquad ....(2)$$

افرض ان $t(x)=x$ وان **b** هي قابلة للاشتقاق
الحالة $b(\theta)=\theta$ مع $t(x)=x$ هي اعتيادياً تعود الى الشكل القياسي ولاجل دالة احتمالية قياس لتوزيع اسي لشكل قياس **c (.)** ، **d(.)** وحيدة وتؤدي الى تحويلات
$c(.)\to c(.)-\gamma\quad,\quad d(.)\to d(.)+\gamma$ انياً لاجل $\gamma\in R$ وهكذا فاننا نفرض ان **o = c(o)** بدون فقدان التعميم.

٢- هـــــدف البـــــحث

في هذا البحث استعراض اهم خواص التوزيع الاسي الذي له تطبيقات احصائية كثيرة وخاصة في المجالات التالية:

١. العمليات العشوائية
٢. نظرية المعولية
٣. صفوف الانتظار

وقد قمت باقتراح المبرهنة في البند (٨) لكيفية الحصول على المقدر غير المنحاز ذو التباين الاصغر لمعلمة التوزيع.

٣- اصــل (او نشـــوء) التوزيـــــع: Genesis

يوجد عدة حالات والتي واحدة منها تتوقع التوزيع الأسي ان يعطي وصف مفيد لملاحظة التغير. واحدة من اهم هذه الحالات تسمى "at random at time" في التطبيق، نفرض ان مستقبل " وقت الحياة "life time" لأي مفردة لها بعض التوزيع مهما كان " قديم " انه في الوقت الحاضر.

هذه يمكن ان تكتب شكلياً { X تمثل وقت الحياة (life time) }

$$P[X \le x_0 + x | x > x_0] = P(X \le \chi) \forall x_0 > 0 \qquad \text{...............(1)}$$
$$, \forall x > 0$$

X يجب ان تكون متغير عشوائي مستمر موجب. اذا كان له دالة احتمالية الكثافة f(x) فان دالة الكثافة الاحتمالية الشرطية، تعطي ان x هي اكبر من x_0 وهي

$$\frac{f_x(x)}{1-F_x(x_0)} \qquad x > x_0 > 0$$

حيث ان التوزيع الشرطي لـ مستقبل وقت الحياة $(x - x_0)$ هو نفس توزيع غير الشرطي (unconditional) لـ x ، يكون لدينا

$$\frac{f_x(x_0)}{1-F_x(x_0)} \qquad f_x(o) = P_0 \qquad \text{..................(2)}$$

ينتج انه اذا $F_x(x), P_0 > 0, F_x(x_0) \ne 1$ تحقق المعادلة التفاضلية

$$\frac{dF_x(x)}{dx} = P_0[1 - F_x(x)]$$

حيث ان $e^{-P_0 X}$ $1 - F_x(x) \alpha$ مقدمة للشرط $\underset{x \to o}{linnit}\ F_x(x) = 0$

نجد ان (3)................ $1 - F_x(x) = e^{-P_o x}$

ذلك ان $F_x(x) = 1 - e^{-P_o x} = P_0 \int_0^x e^{-P_o x}\, dt$

هذه ترينا ان دالة احتمالية الكثافة لـ X هي من الشكل (١) مع $\theta = 0$ وان $\lambda = P_0^{-1}$ توجد حالات اخرى والتي تظهر التوزيع الاسي اكثر طبيعي. كثير من هذه تعمل كعشوائية تكرارية (غالباً في الوقت often in time) للحادثة.

عند تطبيق طريقة Monte Carlo غالباً نحتاج الى تحويل المتغيرات العشوائية في التوزيع المستطيلي القياسي Standard rectangular distribution الى المتغيرات العشوائية الاسية.

الطريقة المبدعة والتي اقترحت مبكراً من قبل Von Neumamm.

نفرض $[X_i , i = 0,1,............]$ هي متتابعة لمتغيرات عشوائية مستقلة من التوزيع المستطيلي القياسي وتعريف المتغير العشوائي N الذي يأخذ القيم الصحيحة الموجبة من خلال $\{X_i\}$ بواسطة المتباينات

$$X_1 < X_0 \ , \sum_{j=1}^{2} x_j < X_0 ,..., \sum_{j=1}^{N-1} X_j < X_0 \ , \sum_{j=1}^{N} X_j < X_0$$

نقبل المتباينة $\{X_i\}$ اذا N كانت فردية ، في الحالات الاخرى نرفض ونعيد الطريقة N تعود فردية.

افرض T عدد المتباينات المرفوضة قبل ظهور N فردية (T = 0,1,…) وان X_0 قيمة اول متغير في متباينة القبول. فان $Y = T + X_0$ هي متغير عشوائي اسس مع دالة احتمالية الكثافة القياسية e^{-x} . هناك طريقة اكثر ملائمة اقترحت من قبل Marsaglia.

افرض N تكون متغير غير سالب صحيح مع توزيع هندسي:

$$P(N = n) = \left(1 - e^{-\lambda}\right) e^{-n\lambda} \qquad n = 0,1,2,...$$

افرض ان M هو متغير بواسون العشوائي المقطوع عند الصفر فأن

$$P(M = m) = \left(1 - e^{-\lambda}\right)^{-1} e^{-\lambda} \, \lambda^m / m! \quad , \quad m = 0,1,2,...$$

اخيراً : افرض ان $(X_i \mid i = 1,2,3,.....)$ هي متتابعة لمتغيرات عشوائية مستقلة يتوزع كل منها التوزيع المستطيلي القياسي فان

$$Y = \lambda \ \{N + \min(X_1, X_2 ,..., X_n)\}$$

لها توزيع أسي.

٤- العـــــزوم والدالـــــة المولـــــدة للعـــــزم:

Moments and Moment Generating Function

دالة مولدة العزم للمتغير العشوائي X مع دالة احتمالية الكثافة (١) هي

$$E\left(e^{tx}\right) = (1 - \lambda t)^{-1} e^{t\theta}$$
$$= (1 - \lambda t)^{-1} it \ \theta = 0$$

الدالة المميزة هي $\phi(t) = (1 - i\lambda t)^{-1} \ e^{it\theta}$

دالة مولدة العزم المركزية هي

$$E\left[e^{t(x-\theta-\lambda)}\right] = (1 - \lambda t)^{-1} e^{t\lambda}$$

دالة مولدة الـ Cumulant هي $\Rightarrow \log\left(E \mid e^{tx}\right) = t\theta - \log(1-\lambda t)$

$$K_1 = \theta + \lambda \left(= E(X)\right)$$

ومن هنا فان المتراكمات (Cumulant) هي

$$K_r = (r-1)!\,\overset{\gamma}{\lambda}\ \ (r>1)$$

ضع $r = 2,3,4$ **نجد ان**

$$Var(x) = \mu_2 = \lambda^2$$
$$\mu_3 = 2\lambda^3$$
$$\mu_4 = 9\lambda^4$$

لاحظ انه اذا كانت $\lambda = 1, \theta = 0$ **فأن** $E(x) = 1 = Var(x)$
وعليه فان التوزيع الاسي القياسي هو قياس.
اول نسب عزمين هما : $\sqrt{\beta_1} = 2\ ,\ \beta_2 = 9$
معدل الانحراف هو

$$2\lambda \int_1^{\infty} (x-1)e^{-x}\ dx = 2\overset{-1}{e}\lambda$$

لاحظ ان

$$\frac{mean\ \ deviation}{s\tan dard\ deviation} = \frac{2}{e} = 0.736$$

الوسيط لهذا التوزيع هو $\theta + \lambda \log_e 2$ **.**
المنوال لهذا التوزيع هو عند اولها قيمة، θ **، لمدى التغير**

دالة مولدة المعلومات $(u-1) - the\ \ freguency\ moment)$ **هو** $\overset{1-u}{\lambda}\, u^{-1}$ **الـــ entropy هو** $1 + \log\lambda$ **.**

٥- التقدير Estimation

اذا كان $X_1, X_2, ..., X_n$ هي متغيرات عشوائية مستقلة كل واحدة Y دالة احتمالية الكثافة (١) فان The moximum Likelihood estimators تقدير بالامكان الاعظم لـ λ, θ هما:

$$\hat{\theta} = \min(x_1, x_2, ..., x_n)$$

$$\hat{\lambda} = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \hat{\theta}) = \bar{x} - \hat{\theta}$$

اذا كانت θ معلومة فان The moximum Likelihood estimators تقدير الامكان الاعظم لـ λ هي $(\bar{x} - \theta)$ اذا كانت λ معلومة، $\hat{\theta}$ اعلاه هي لازالت تقدير max. Likelihood est. الامكان الاعظم. لـ θ.

دالة احتمالية الكثافة لـ $\hat{\theta}$ هي

$$f_{\hat{\theta}}(t) = \left(\frac{n}{\lambda}\right) \exp[-n(t - \theta)/\lambda] \qquad (t > \theta)$$

والتي هي لها نفس الشكل في (١) مع تبديل λ بـ $\frac{\lambda}{n}$.

التباين لـ $\hat{\theta}$ هي اذا $\frac{\lambda^2}{n^2}$ والقيمة المتوقعة هي $\frac{\lambda}{n} + \theta$ انه من المفيد ملاحظة ان التباين هو يتناسب الى n^{-2} وليس الى n^{-1} القيمة المتوقعة لـ $\hat{\lambda}(\bar{x} - \hat{\theta})$ هي $\lambda(1 - n^{-1})$ وان تباينها هو $\lambda^2 \left[n^{-1} + n^{-2} - 2n^{-3}\right]$ القيمة المتوقعة لـ $(\bar{x} - \theta)$ هي λ وان تباينها هو $\lambda^2 n^{-1}$.

٦- التوزيعات المرتبطة بالتوزيع الاسي : Related Distributions

يوجد عدد مهم من التوزيعات القريبة المتصلة بالتوزيع الاسي.

اذا كان المتغير $X > \theta$ فان $Y = (x - \theta)^c$ له توزيع أسي:

$$P_Y(y) = \lambda^{-1} e^{-y/\lambda} \quad , y > 0 \qquad ....(4.1)$$

فان X يقال لها انها تملك توزيع وايبل (Weibull Dist.) مع معلمة ذات شكل c. انه من الضروري ان يكون c اكبر من c-1 وللقيم الاخرى التكامل لـ

$$P_x(x) = \lambda^{-1} c (x - \theta)^{c-1} \exp\left[-(x - \theta)^c \lambda\right] \ (x > \theta)$$

بين $x = \theta \ , \ x = \theta' > \theta$ سوف يكون غير محدد

اذا كانت θ, c هي معروفة (وغالباً θ هي معروفة ان تكون صفر) التحويل $Y = (x - \theta)^c$ ربما تستخدم وتوضح بصورة جيدة الطريقة المرافقة مع التوزيع الاسي وتصبح قابلة للتطبيق.

اذا c ليست معلومة فان طريقة خاصة نحتاج لا في هذه الحالة.

اذا كانت $Y = e^{-x}$ لها توزيع أسي للشكل (٤,١). فان **X** لها توزيع القيمة المتطرفة **"extreme value"**.

من التوزيعات المهمة الاخرى هو التوزيع الأسي المزدوج. **(The double (or bilateral)expomontial Dist.)** هذا هو توزيع المتغير العشوائي **X** مع دالة احتمالية الكثافة

$$P_x(x) = (2\lambda)^{-1} \exp[-|x-\theta|/\lambda] \quad (\lambda > 0)$$

انه ايضاً يعرف بقانون لابلاس الاول للخطأ **(Laplace's First Law of Error)** (قانون لابلاس الثاني **(Laplace's Second Law of Error)** هو توزيع طبيعي). التوزيع الأسي ربما يكون توزيع أسي مزدوج حول $x = \theta$

الحقيقة ان التوزيع الأسي ينتمي الى عائلة توزيع كاما الذي اشير اليه في البند الاول. خذ $\lambda = 2, \theta = 0$ في المعادلة (١).نحصل على توزيع χ^2 مع ٢ درجة حرية. من هذه نرى انه اذا كانت $x_1, x_2, ..., x_n$ متغيرات عشوائية مستقلة وكل منها لها دالة احتمالية الكثافة في (١) فان الوسط الحسابي هو يتوزع كما يأتي: $\theta + \frac{1}{2} n^{-1} \lambda \rightarrow \chi^2_{2n}$.

٧ - التوزيع الاسي العام.

A Generalization of the Exponential Dist

تقدير θ لدالة التوزيع التجمعي $1 - e^{-x/\theta}(1 - F(x))$

حيث ان $F(x)$ هي دالة التوزيع التجمعي للمتغير العشوائي غير السالب الذي بحث من قبل **Gercbah**. هو اقدر كتقدير مبني على عينة عشوائية ذات حجم $n = km$. قسم العينة الى **m** مجموعة بشكل عشوائي مع $X_1'(j)$ اصغر قيمة من المجموع **j th** . فانه تحت شروط رتيبة على $F(x)$.

$$\hat{\theta} = Km^{-1} \sum_{j=1}^{m} X_1'(x)$$

هي تقدير متسق لـ θ كان **m.k** تؤل الى ∞.
ايضاً

$$E(\hat{\theta}) = \theta - \frac{f'(o)\theta^3}{1 - F(o)k} + o\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$V(\hat{\theta}) = \frac{\theta^2}{m} - \frac{4f'(o)\theta^4}{1 - F(o)km} + o\left(\frac{1}{km}\right)$$

حيث ان $f(x) = F'(x)$

بواسطة استخدام التقريب الطبيعي فان فترة الثقة لـ θ مع تقريب معامل الثقة $(1-\alpha)$ هي تحصل كالاتي:

$$\hat{\theta} \pm \left(K_{\frac{\alpha}{2}} \theta / \sqrt{m} + \frac{f'(o)\theta^3}{(1 - F(o))k} \right)$$

الاختيار الافضل لحجم العينة **n =km** هو يحصل بواسطة جعل المقدار داخل الاقواس اصغر ما يمكن.

من المفيد هنا ان اذكر ان التوزيع الأسي هو التوزيع المستمر الوحيد الذي يحقق خاصية ماركوف

$$P(X > a+b | X > a) = P(X > b)$$

وهذا يعني اذا استغرقنا تواً بعض الزمن في الانتظار فان التوزيع الاقصى لزمن الانتظار هو نفس توزيع زمن الانتظار الابتدائي.
ويمكن التحقق من ذلك باتباع الخطوات التالية:

$$P(X > a+b | X > a) = \frac{P(X > a+b \, and \, X > a)}{P(X > a)}$$

$$b \geq o \ , \ X > a+b \Rightarrow X > a$$

$$P(X > a+b | X > a) = \frac{P(X > a+b)}{P(X > a)}$$

$$= \frac{\int_{a+b}^{\infty} \theta e^{-\theta X} \ dX}{\int_{a}^{\infty} \theta e^{-\theta X} \ dX} = e^{-\theta b} = P(X > a)$$

٨- مبرهنة

لتكن $X_1, X_2, ..., X_n$ **عينة عشوائية من مجتمع يتوزع أسياً بمعلمة** θ**. افرض ان**

$$\Pi(\theta) = G_\theta(a) = 1 - e^{-a\theta}$$

حيث ان a ثابت غير سالب. عندئذ يكون المقدر غير المتحيز ذو التباين الاصغر للدالة $\Pi(\theta)$

$$G_x^*(a) = 1 - \left(1 - \frac{a}{N\overline{X}}\right)^{N-1}$$

حيث ان N > 1

البرهـــــان

من الواضح ان

$$G_x^*(a)=\begin{cases}0 & ; X_a \ge a\\ 1 & ; X_a < a\end{cases}$$

عندما N=1

الاحصاءة $\overline{X}$ هي كافية وتامة وعليه لغرض برهان ان $G_x^*(a)$ هو المقدر غير المنحاز للتباين الاصغر.

يكفي ان نجد مقدر غير منحاز للدالة $\Pi(\theta)$ وهو بالطبع دالة في $\overline{X}$

$$B=B(X_1,X_2,...,X_N)=\begin{cases}0 & ; X_a < a\\ 1 & ; X_a \ge a\end{cases}$$

هو مقدر غير متحيز وكذلك

$$\begin{aligned}B^*(\overline{X}) &= E_\theta\left(B \mid X_1,X_2,...,X_n = N\overline{X}\right)\\ &= P_\theta\left(X_1 < a \mid X_1+X_2+...+X_n = N\overline{X}\right)\\ &= P_\theta\left(\frac{X_1}{X_1+X_2+...+X_n} < \frac{a}{N\overline{\overline{X}}} \mid \overline{X}\right)\end{aligned}$$

وبما ان المتغيرين العشوائيين $X_1+X_2+...+X_N,\dfrac{X_1}{X_1+X_2+...+X_N}$ مستقلان فان

$$B^*(\overline{X})=P_\theta\left(\frac{X_1}{X_1+X_2+...+X_n} < \frac{a}{N\overline{\overline{X}}}\right)$$

وبما ان الطرف الايمن لا يعتمد على θ.

افرض ان $\theta=1$ ولما كان المتغيرين X_1 , $X_2+X_3+...+X_N$ هما مستقلان ويتوزع كل منهما توزيع كاما بالمعلمتين ١، N-1 على الترتيب. فان توزيع $\dfrac{X_1}{X_1+X_2+...+X_N}$ يتوزع بيتا بالمعلمتين ١، N-1

$$G_x^*(a)=\int_0^{\frac{a}{N\overline{\overline{X}}}} \frac{\Gamma(N-1+1)}{\Gamma(N-1)\Gamma(1)}\, u^{1-1}(1-u)^{N-1-1}du$$

$$=\left.\frac{(1-u)^{N-1}}{N-1}\right]_0^{\frac{a}{N\overline{\overline{X}}}} = 1-\left(1-\frac{a}{N\overline{X}}\right)^{N-1}$$

٩- المعلمة الموقعية

افرض ان $\theta = H = R$

تسمى (1)............ $\left[g(\chi,\theta)\theta \in \theta, X \in H\right]$

بالموقع العائلي فيما كان المتغير العشوائي X يتوزع بالنسبة الى $g(\chi,\theta)$ فان لأي $y \in R$ ازاحة المتغير x+y مرة اخرى له توزيع من هذه العائلة. هنا القيمة الجديدة للمعلمة ربما تعتمد على كلا y,θ ذلك انه يوجد دالة $\alpha(y,\theta)$ بحيث ان

$$g(x+y,\theta) = g(x,\alpha(\theta,y)); x,y,\theta \in R \qquad ....(2)$$

اكثر من ذلك ، نفرض انه لكل θ معطاة توجد ازاحة $v(\theta)$ مع $\alpha = (\theta, v(\theta)) = 0$ وان العكس v^{-1} له وجود وقابلة للاشتقاق وهكذا فان (٢) يمكن اعادة كتابتها كما يأتي:

$$g(x,\theta) = g(x-y,\alpha(\theta,y))$$

بواسطة كتابة $f(x) := g(x,\theta)$ ، نحصل على $\mu = v(\theta)$ ، $\theta = v^{-1}(\mu)$ وان

$$\begin{aligned} f(x-\mu) &= g(x-\mu,o) = g(x,\theta) \\ &= \exp\left[b(\theta)x + c(\theta) + d(x)\right] \\ &= \exp\left[\beta(\mu)x + \gamma(\mu)\right]g(x,o) \\ &= \exp\left[\beta(\mu)x + \gamma(\mu)\right]f(x) \qquad ....(3) \end{aligned}$$

حيث ان $\beta(\mu) = b(v^{-1}(\mu) - b(o), \gamma(\mu) = c(v^{-1}(\mu)))$ هي قابلة للاشتقاق.
الجانب الايمن لـ (٣) فانه قابل للاشتقاق بالنسبة الى μ والتي تؤدي الى جعل الجانب الايسر قابل للاشتقاق وهكذا لـ f.
في الحقيقة الاشتقاق عند $\mu = o$ يؤدي الى:

$$-f'(x) = (\beta'(o)x + \gamma'(o))f(x) =: (BX + A)f(x) \qquad ....(4)$$

انظر الى (٣) ترى انه عندما f تكون موجبة، على الاقل في نقطة واحدة فانه يجب ان تكون موجب في كل مكان.
وهكذا نستطيع تكامل (٤) الى

$$\log\ f(x) = -Bx^2/2 + Ax + C$$

والتي نعرض فيها f كأنها دالة احتمالية الكثافة لتوزيع طبيعي مع معدل $-A/B$ وتباين $\dfrac{1}{|B|}$

والتي ايضاً تؤدي الى $B > o$. انظر الى (٣) ماذا ترى؟ ترى ما يأتي:
[انظر ايضاً (١٩٥٨) **Lindley,(1965) Borges and pfanzagl**].

العبارة ١ اذا العائلة الاسية في الشكل (١) مع $t(x)=x$ هي عائلة موقعية وانه تكون عائلة التوزيع الطبيعي لدوال احتمالية الكثافة مع تباين ثابت $\frac{1}{B}$ ومع توقع (معدل)

$$v(\theta)-A/B=b(\theta).B$$

ملاحظة ١ من العبارة ١، والمعادلة (٢)، نحسب ان

$$\alpha(\theta,y)=v^{-1}(v(\theta)-y)$$

ملاحظة ٢ اذا اجرينا نفس التطوير بدون تخصيص $t(x)=x$، المعادلة التفاضلية (٤) سوف تكون بالشكل

$$-f'(x)=(Bt(x)+A)f(x)$$

نحن مدينين الى حكم واحد لاجل الاشارة الى ان (up to obvious modifications) الحالة $t(x)=e^{x}$ هي فقط الحالة مع $t(x)\equiv x$ تسمح لحل والذي يجعل f تكون دالة احتمالية الكثافة، تقود الى العائلة

$$g(x,\theta)=\exp\left[e^{-\theta}e^{x}-\theta+x\right]$$

[انظر e.g.,ferguson 1962].

١٠- معلمة القياس Scale Parameter

افرض ان

$$H=\theta=R^{*}=[Z,Z>o]$$

عائلة دوال احتمالية الكثافة

$$F=\lfloor g(x,\theta),\theta\in\theta,x\in H\rfloor$$

سوف تسمى قياس العائلة (Scale family)، اذا لاجل المتغير العشوائي X يتوزع بالنسبة الى $g(x,\theta)$، واي مضاعف موجب yX سوف ايضاً يملك دالة احتمالية الكثافة للعائلة F– ذلك انه، اذا لاجل y > o معطاة يوجد $\alpha(\theta,y)>o$ بحيث ان:

$$yg(xy,\theta)=g(X,a(\theta,y)),x>0 \quad \text{...............(5)}$$

مرة اخرى سوف نفرض انه لاجل θ معطاة، يوجد $v(\theta)>o$ بحيث ان $a(\theta,v(\theta))=1$ وان العكس v^{-1} له وجود وهي قابلة للاشتقاق.

بواسطة وضع x/y بدل x في (٥)، نحصل على

$$g(x,\theta)=g(x/y,a(\theta,y))/y$$

بواسطة تعريف $f(x)1=g(x,1)$ نستطيع المناقشة في تشابه جزئي الى (٣)

$$f(x/\mu)=g(x/\mu,1)=\mu g(x,\theta)$$
$$=\mu\ \exp[b(\theta)x+c(\theta)+d(x)]$$
$$=\mu\ \exp[\beta(\mu)x+\gamma(\mu)]g(x,1)$$
$$=\mu\ \exp[\beta(\mu)x+\gamma(\mu)]f(x) \qquad ....(6)$$

حيث ان $\mu=v(\theta)$ وحيث ان
$$\beta(\mu)=b(v^{-1}(\mu))-b(1)$$
وان
$$\gamma(\mu)=c(v^{-1}(\mu))-c(1)$$
هي قابلة للاشتقاق. اشتق النسبة الى μ عند $\mu=1$ الان تكون ممكنة وتؤدي الى
$$-xf'(x)=(B'(1)x+\gamma'(1)+1)f(x)=:(BX-A),\ f(x)$$
هذه المعادلة التفاضلية يكون لها حل الدالة
$$f(x)=CX^{A}\ \exp(-BX)$$
والتي تكون دالة احتمالية الكثافة اذا $A>-1$ وان $1=B^{A+1}\Gamma(A+1)$
الحل النهائي يكون
$$g(x,\theta)=g(x/\mu,1)/\mu=\ f(x/v(\theta))/v(\theta)$$
$$=(b(\theta))^{A+1}\,\Gamma(A+1)X^{A}\ \exp[-b(\theta)x]$$

ذلك انه شاهـدنا العبارة التالية [انظر ايضاً ; ١٩٦٥ **Boryes and Pfanzagl Lindley(1958)**

العبارة ٢ اذا F كما اعطت في (١) هي قياس عائلي، فانه تكون عائلة توزيع كاما مع شكل ثابت للمعلمة A ومع قياس المعلمة $b(\theta)$

ملاحظة ٣ في التشابه الجزئي للملاحظة ١ ، نحن نملك
$$a(\theta,y)=v^{-1}(v(\theta)/y)$$

References

1. Borges,R.,and pfanzagl,J.(1965) "one-Parameter Exponential Families Generated by Transformation Groups" Annals of Mathematical statistics,36,261-271.
2. Forguson,T.s.(1962) "Location and Scale Parameters in Exponential Families of Distribution" Annals of Mathematical statistics,33,986-1001:Correction(1963),34,1603.
3. Gercbah (Gertsbach),I.B.(1967) On estimation of parameters of a distribution with on exponential factor, Teoriya Veroyatnostei iee Primmeneniya,7,121-123.(English tramslation : Theory of probability and Application,7,110-111).
4. Govindarajula,Z.(1966) Characterization of the exponential and power distribution, skandinavisk, Aktuarietidskrift,49,132-136.
5. Mc Gill, W,J.and Gibbon, J(1965),the general-gamma distribution and reaction time,Journal of Mathematical Psychology,2,1-18.
6. Marsaglia G.(1961) Generating exponential yandom Variables, Annals of Mathematical statistics,32,899-900.
7. Reinhardi,H.E.(1968) Characterizing the exponential distribution,Biometrics, 24,437-438.
8. Sibuya,M.(1962) On exponential and other random Variable generators, Annals of the Institute of Statistical mathemetics,Tokyo,13,231-237.
9. Srivastava,M.S.(1967) A characterization of the exponential distribution,A merican mathemetics Monthly,74,414-416.
10. Welfgeng J.Buhler and Joachim sehr. The American Statistican Volume 41.Number 4, November(1987).