اختبار نسبة الامكان لاجل التساوي للمعلمات المحلية لـ $(K \geq 2)$ لمجتمعات أسية مبنية على نوع Π لمراقبة العينات

أ. د. سليم الغرابي   د. انعام عبد الوهاب
جامعة بغداد- كلية الادارة والاقتصاد
قسم الاحصاء

الخلاصة Summary

هنا المبحث يعطي أختبار نسبة الامكان لاجل المقارنة لاثنين أو أكثر معلمتين لتوزيع أسي ذلك أنها لها نفس المعلمات القياسية غير المعلومة واثبات أن أختبار نسبة الامكان تؤدي الى أختبار مكافئ مبني على الاحصاءة التي لها توزيع F . الفائدة الرئيسية لهذا الاختبار تقع نسبياً ببساطة وسهولة مع التي يمكن تطبيقها.

References:

1- **Epstein, B., and sobel , M. (1954)."Some Thearems Relevant to life Testing from an Exponential population" Annals of Mathematical Statistics, 25, 373 – 381 .**

2- **Epstein, B., and Tsao, C.K.(1953) "Some Tests Based on Order Observation From Two Exponential Populations" Annals of Mathematical Statistics , 24 , 458 – 466 .**

3- **Hogg, R.V. and Tonis, E,A. (1963), "An Iterated procedure for Testing the Equality of several Exponential Distributions" Journal of the American Statistical Association, 58 , 435 – 443.**

4- **Kumar, S. , and patel , H. I. (1971) "ATest for the Comparision of two Exponential Disributions" Technometrics , 13 , 183 – 189 .**

5- **Reng, A (1953) "On the Theory of Order Statistics" Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae , 4 , 191-231.**

6- **Robert V. Hogg and Elliot A. Tanis "Probabulty and statistical Inference (1983) Macmillian Publishing Co. Inc. New York .**

1- المقدمة :- Introduction

حياة الاختبار والمعولية، للتوزيعات الاسية هي غالباً طلب لنموذج لحياة التوزيعات لاشياء مثل المركبات الالكترونية ولمبات مضيئة، وهكذا في المعلمتين للتوزيع الاسي، المعلمة المحلية هي تفسر كأنها وقت صغير (أو مؤكد) مثل التي يكون فشل وقوعها، والمعلمة القياسية مثل قياس معدل الحياة من المعلمة المحلية كنقطة بداية.

أعتبر الان أن المسألة مقارنة $(K \geq 2)$ لمعلمتين لتوزيعات أسية والتي لها نفس المعلمات القياسية لكن متشابهة وأنها تختلف عن المعلمات المحلية. هذه المسألة تظهر عندما أحد يرغب لمقارنة عدة دورات مؤكدة . $[2]$، $[1]$

(أفرض أن jth دالة أحتمالية الكثافة للتوزيع) الاسي (pdf) (j = 1,2,3,……,K) هي تعطى بالشكل - :

$$P(x_j) = \Big|_0\ \sigma^{-1}\exp[-\sigma^{-1}(x_j-\beta_j) \qquad x_j \geq \beta_j, \sigma > 0 \quad ,0/w......(1-1)$$

حيث ان β_j هي معلمة محلية ، σ هي معلمة قياسية مشتركة الاختبار لاجل مساواة المعلمات لـ $(k \geq 2)$ لتوزيعات اسية تتكون من هذه الفرضية الصفرية null hypotheses

(1-2)

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_k = \beta$$

حيث ان β غير مخصصة، ضد الفرضية البديلة

: at Least two H_1 β 'S Are un equal ..... (1-3)

لاجل K=2

Kumar and Patel (1971) Epstein and Tsao (1953)

يطلب اختبارات Ho ضد HA بنسبة على نوع $\prod$ لبيانات مراقبة لاجل (1963) $K \geq 2$ Hogg and Tanis وصف تكرار الطريقة لاختبار H_0 ضد H_A

2- اشتقاق احصاء نسبة الامكان

Derivation of the Likely hood Ratio Statistic

افرض أن فضاء المعلمة هو لمعرفة بالشكل

$$\Omega = \{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k, \sigma > 0\}$$

وافرض أن S هي فضاء جزئي لـ Ω بحيث أن

$$S = \{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k, \sigma > 0\}$$

أفرض أن:

$$\left[x_{11},....,x_{ir1},.....,x_{k1},.....,x_{krk}\right]$$

هي مجموعة لـ K من النوع $\prod$ لعينات مراقبة، فأن دالة الامكان هي تعطى بالشكل :-

$$L\left(\beta_1.....,\beta_k,\sigma \middle| x_{11},....,x_{1r1},....,x_{k1},...,x_{KrK}\right)$$

$$\prod_{j=1}^{k}\frac{n_j!}{\left(N_j-r_j\right)\sigma^{rj}}\, x\exp\left[-\frac{1}{\sigma}\left[\sum_{i=1}^{rj}\left(x_{ji}-\beta_j\right)+\left(n_j-r_j\right)\left(x_{jrj}-\beta_j\right)\right]\right]$$

في معلمة فضاء العينة Ω مقدرات الامكان الاعظم لـ β_j ، σ هي :

$$\sigma=R^{-1}\sum_{j=1}^{k}\left[\sum_{i=1}^{rj}\left(x_{ji}-x_{ji}\right)+\left(n_j-r_j\right)\left(x_{jrj}-x_{j1}\right)\right],\beta_j=x_{j1} \qquad \textbf{(2.1)}$$

حيث أن j = 1,2,3, …., K

على التوالي وفي معلمة فضاء العينة الجزئي s ، مقدار الامكان الاعظم المقابلة هي :

$$\hat{\beta}=\min\left(x_{11},x_{21},.....,x_{k1}\right)=x_{11}$$

بما أن فرضنا ان

$$x_{j1}>x_{j-1},1,\ j=2,.....,k$$

وأن

$$\hat{\sigma}=R^{-1}\sum_{J=1}^{k}\left[\sum_{i=1}^{rj}\left(x_{ji}-x_{11}\right)+\left(n_j-r_j\right)\left(x_{jrj}-x_{11}\right)\right] \qquad ...... \qquad \textbf{(2.2)}$$

فأن ،

$$L=\left(\ \Omega\ \right)=c\sigma^{\sim\text{-R}}\exp\left[-R\right]$$

$$L=\left(\ \tilde{S}\ \right)=c\sigma_1^{\wedge\text{-R}}\exp\left[-R\right]$$

حيث أن

$$C = \prod_{j=1}^{k} n_j!/(n_j - r_j)!$$

وعليه فأن

$$\lambda = \frac{L\left(\hat{S}\right)}{L\left(\tilde{\Omega}\right)} = \left(\frac{\hat{\sigma}}{\tilde{\sigma}}\right)^{-R} \qquad (2.3)$$

عوض القيم لـ $\tilde{\sigma}$, $\hat{\sigma}$ من (2-1) ، (2-2) من (2-3) نستطيع تحقق أن:

$$\lambda = (1+U)^{-R} \qquad (2.4)$$

حيث أن U هي معرفة في المبحث (4) معادلة (4-5)

التي هي $U = v/2(k-1)s$

3- توزيع – U (Distribution of U)

لاشتقاق توزيع U اولاً نثبت أن (j=2 ,.... , k) W_{js} هي مستقلة ومطابقة مثل توزيع $x^2(2)$.

تحت فرضية العدم فأن دالة أحتمال الكثافة المشتركة Joint pbf لـ $\left(x_{k1},....., x_{21}, x_{11}\right)$ **هي معطاة بالشكل :**

$$f\left(x_{11}, x_{21},......, x_{k1}\right) = \prod_{j=1}^{k} n_j \; X \exp\left[-\sum_{j=1}^{k} n_j \left(x_{j1} - \beta\right)/\sigma\right]/\sigma^k$$

$$\beta < x_{j1} < \infty$$

ضع :

$$W_j = 2\left(\sum_{i=j}^{k} n_j\right)\left(x_{j1} - x_j - 1,1\right)/\sigma, \; j = 2,....,k$$

$$W_1 = 2\left(\sum_{j=1}^{k} n_j\right)(x_{11} - \beta)/\sigma,$$

فأن

$$f\left(w_1, w_2, \ldots\ldots, w_k\right) = \left(x_{11}, x_{21}, \ldots\ldots, x_{k1}\right) | J |$$

$$= \prod_{j=1}^{k} n_j \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k} w_j\right] / 2^k \prod_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=j}^{k} n_i\right)$$

حيث أن | J | هو تحويل جاكوبين وأنه يساوي

$$\sigma^k / 2^k \prod_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=j}^{k} n\right)$$

اي تكامل W_1 ، نحصل على

$$f\left(w_2, \ldots., w_k\right) = \prod_{j}^{k} \exp\left[-\sum_{j=2}^{k} w_j / 2\right] / 2^{k-1} \prod_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=j}^{k} n_i\right)$$

لاحظ أن :

$$P_r\left(W_2 > 0, \ldots\ldots., W_k > 0\right) = P_r\left(X_{21} > X_{11}, \ldots.., X_{k1} > X_{k-1,1}\right)$$

$$= \int_{\beta}^{\infty} \int_{x11}^{\infty} \ldots\ldots\ldots \int_{xk-1,1} \qquad f\left(x_{11}, x_{21}, \ldots\ldots, x_{k1}\right) \prod_{j=k}^{1} dx_{j1}$$

$$= \prod_{j=1}^{k} n_j / \prod_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=j}^{k} n_j\right)$$

وهكذا فأن دالة الكثافة الاحتمالية الشرطية لـ $W_2, \ldots.., W_k$ أعطيت

$W_2 > 0, \ldots, W_k > 0$ هي معطاة بالشكل:

$$f\left(w_2, \ldots, w_k / w_2 > 0, \ldots w_k > 0\right) = \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k} w_j\right] / 2^{k-1} \quad \ldots. \quad (3.1)$$

من (3.1) أنه ينتج أن W_j و S (j=2,...,k) هي متطابقة ومستقلة وأن التوزيع مثل (2) X^2 ومن هنا فأن

$$\sum_{j=2}^{k} w_j = v / \sigma$$

المعرفة من (4.4) هي تتوزع مثل $x_2\left(2\left(k-1\right)\right)$.
أنه من المعروف جيداً أن التوزيع لـ $2r_j s_j / \sigma$ هي تتوزع مربع كاي $x^2\left(2\left(r_j-1\right)\right)$
(انظر Epstein and sobel 1954) اكثر من ذلك وحيث أن S و S_j هي مستقلة ومنافية، المتغير $2\left(R-K\right)S/\sigma = 2\sum_{J=1}^{k} r_j s_j / \sigma$ ، المعرفة في (4.2) هي تتوزع مثل $x^2\left(2\left(R-K\right)\right)$ ، انظر المصدر Rengi (1953) نلاحظ أن S,V هما تتوزع مستقلة.
من الاحصاءة U المعرفة في (4.5) هي تتوزع F مع $2\left(R-K\right),2\left(K-1\right)$ من درجات الحرية .

4- اختبار نسبة الامكان The Like Lihood Ratio Test

أفرض أن $H_{jnj} = \left\lfloor X_{j1} \le X_{j2} \le ..... \le X_{jnj} \right\rfloor$

هي عينة عشوائية مرتبة من (1) وافرض H_{jnj} هي مجموعة لـ r_j أقل مشاهدات لـ H_{jnj}.

تقديرات الامكان الاعظم (ML) لـ β_j ، σ مبينة على H_{jrj} من jth توزيع هي

$$\hat{\beta} = X_{j1}$$

$$S_j = r_j^{-1}\left[\sum_{i=1}^{rj}\left(X_{ji}-X_{j1}\right)+\left(n_j-r_j\right)\left(X_{jrj}-X_{j1}\right)\right] \qquad ..... (4.1)$$

على التوالي $j = 1,2,3,....,k$

(4.2) ...... أفرض أن

$$S = \left(R-k\right)^{-1}\sum_{j=1}^{k} r_j s_j$$

حيث أن
$$R = \sum_{j=1}^{k} r_j$$

اكثر من ذلك، افرض أن **k** من العينات هي مرتبة بحيث أن

$$X_{j1} > X_{j-1},1 \, for j = 2,\ldots,k$$

عرف

$$W = \left(\sum_{i=j}^{k} n_i \right) \left(X_{j1} - X_{j-1},1 \right) / \sigma, \, j = 2 \text{ , ... , k , ...} \quad (4.3)$$

$$\beta = X_{j1}$$

(4.4) ...... حيث أن
$$\sum_{j=2}^{k} w_j = v / \sigma$$

وان (4.5) ......
$$u = v / 2(k-1)S$$

فأنـه لاجل أختبـار H_0 ضـد H_A ، اختبـار نسبـة الامكـان للإحصـاءة وكمـا موضـح فـي المبحـث 2 وفقـاً بمعادلة رقم (2.4) والتي هي بالشكل :

$$\lambda = \left[1 + u \right]^{-R}$$

أنـه يشـاهد فـي (المبحـث 3) ذلـك أن الاحصـاء **u** هـي تتـوزع **F** مـع **(k-1) 2** ، **(R-k) 2** مـن درجـات الحرية

بما أنه ولاجل النوع $\prod$ ومراقبة **rjs** هي ثابتة، الاختبار مبني على مـاهو مكـافئ الـى الاختبـار ذلـك أنـه نرفض H_0 لتأيد H_A عند مستوى α في المعنويـة اذا $U \geq F\alpha$ حيث أن $F\alpha$ هي حد أعلى **th** 100α بالمائة من التوزيع **F** مع **(K-1) 2** ، **(R-K) 2** من درجات الحرية.