احتساب مقدار التحيز لمعاملات ومعلمة القياس لنموذج انحدار القيمة المتطرفة الخطي (النوع الأول) وللقيم الكبرى

م. د. فاطمة جاسم محمد العزاوي
قسم الاقتصاد الزراعي/كلية الزراعة
جامعة بغداد

أ. م. د. عادل أحمد هدو الربيعي
قسم الإحصاء/كلية الإدارة والاقتصاد
الجامعة المستنصرية

المستخلص

تمتاز طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية عن طريقة الإمكان الأعظم بأن العزوم المضبوطة تكون معروفة، أي أنه يمكن أن توجد، بينما الطريقة الأخرى فإنها تكون غير معروفة ، ولكن التقريبات لتحيزاتها يمكن أن توجد باستخدام الطرق القياسية. في بحثنا، تم التوصل إلى صيغ تقريبية للتحيز لمقدرات الإمكان الأعظم (معاملات الانحدار ومعلمة القياس) لنموذج انحدار القيمة المتطرفة الخطي (النوع الأول) وللقيم الكبرى وذلك باستخدام أسلوب متقدم يعتمد على إيجاد المشتقة الأولى والثانية والثالثة.

المصطلحات الرئيسية للبحث / **انحدار القيمة المتطرفة، معاملات الانحدار، معلمة القياس، مربعات صغرى اعتيادية، الإمكان الأعظم، العزوم، التحيزات.**

مجلة العلوم
الاقتصادية والإدارية
المجلد 19
العدد 74
الصفحات 295- 310

1- المقدمة:

ركزت أغلب الدراسات في مجال تحليل الانحدار حول افتراض كون الخطأ العشوائي في النموذج يتبع التوزيع الطبيعي في النماذج الخطية، فعند تقدير نموذج الانحدار فإن مقدرات المربعات الصغرى ستكون متطابقة مع مقدرات الإمكان الأعظم، ولهذا تعد مقدرات كفوءة وجيدة. ولكن في حالة الأخطاء التي تسلك على وفق توزيع القيمة المتطرفة (النوع الأول) وللقيم الكبرى ستكون غير متطابقة، حيث تكون تقديرات الإمكان الأعظم (MLE) أكثر كفاية من تقديرات المربعات الصغرى الاعتيادية (OLSE) في تقدير معالم النموذج [1]. ولكن تمتاز طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية عن طريق الإمكان الأعظم بأن العزوم المضبوطة تكون معروفة، أي أنه يمكن أن توجد، بينما الطريقة الأخرى فإنها تكون غير معروفة، ولكن التقريبات للتقديرات المتحيزة يمكن أن توجد باستخدام الطرائق القياسية حيث تم حساب مقدار التحيزات لمقدرات الامكان الاعظم لنموذج انحدار القيمة المتطرفة النوع الاول وللقيم الصغرى من قبل الباحث عادل هدو[6] ،[7] ، لذا هدف بحثنا إلى إيجاد صيغ تقريبية للتحيز لمقدرات الإمكان الأعظم (لمعاملات نموذج الانحدار ومعلمة القياس) لنموذج انحدار القيمة المتطرفة الخطي (النوع الأول) وللقيم الكبرى وذلك باستخدام اسلوب متقدم يعتمد على إيجاد المشتقة الأولى والثانية والثالثة.

2- خصائص العزوم لمقدرات الإمكان الأعظم (لمعاملات نموذج الانحدار ومعلمة القياس) [9]، [6]، [1]

تعد طريقة الإمكان الأعظم من أكثر الطرائق استخداماً لأنها تمتلك خواصاً جيدة وتكون أكثر دقة خصوصاً عند زيادة حجم العينة حيث تصبح التقديرات بهذه الطريقة تقريباً غير متحيزة، وأساس الطريقة يعتمد على إيجاد دالة الإمكان (Likelihood Function) للمتغيرات العشوائية ومن ثم إيجاد النقطة التي تجعلها أعظم ما يمكن (بأخذ التفاضلات الجزئية) التي تمثل مقدر الإمكان الأعظم وتتطلب طريقة (ML) تخصيص أو تحديد التوزيع للأخطاء وذلك للحصول على دالة الإمكان الأعظم، ولكن طريقة المربعات الصغرى (OLS) لا تحتاج إلى تخصيص التوزيع للأخطاء.

الأساس الذي اتبع لطريقة الإمكان هو استخدام طريقة نيوتن رافسن وأسلوب فشر (Newton-Raphson and Fisher's Scoring approach) وهما من طرائق التعويض التكرارية (Iterative Procedures) التي يتم اللجوء إليها في حالة الحصول على تقديرات يصعب حلها بالأسلوب الاعتيادي.

فعلى افتراض $Y_1, Y_2, \ldots Y_n$ متغيرات عشوائية مستقلة حيث أن Y_i يسلك على وفق توزيع القيمة المتطرفة النوع الأول وللقيم الكبرى وله دالة الكثافة الاحتمالية p.d.f.

$$f_{y_i}(y_i) = \frac{1}{\theta}\exp\left[-\left(\frac{y_i - x_i'\underset{\sim}{\beta}}{\underset{\sim}{\theta}} + \gamma\right) - \exp\left(-\left(\frac{y_i - \underset{\sim}{x_i'}\,\underset{\sim}{\beta}}{\theta} + \gamma\right)\right)\right],$$

$$-\infty < y < \infty \quad (1)$$

حيث $\gamma = 0.577216$ (Eulers constant) و $\theta > 0$ (معلمة القياس للتوزيع). أما الوسط والتباين للتوزيع فهو:

$$E\, y_i = \underset{\sim}{x_i'}\,\underset{\sim}{\beta}, \;\; \mathrm{var}(y_i) = \frac{1}{6}\Pi^2\theta^2 \quad (2)$$

التوزيع غير متماثل مع معامل التواء (1.29857) ومعامل تفلطح (2.4) [9]. مقدرات المربعات الصغرى الاعتيادية (O.L.S) لـ $\underset{\sim}{\beta}$ هو

$$\underset{\sim}{\tilde{\beta}} = (\underset{\sim}{x}'\underset{\sim}{x})^{-1}\underset{\sim}{x}'\underset{\sim}{y} \tag{3}$$

يوضع تقديرات المعلمة $\tilde{\beta}_r$ حيث أن r=1,2,3…K وتعد أفضل مقدر (أصغر تباين) غير متحيز (B.L.U.E) بالمقارنة مع كل التقديرات غير المتحيزة التي تكون خطية في المشاهدات $\{y_i\}$. علماً بأن

$$E(\underset{\sim}{\tilde{\beta}}) = \underset{\sim}{\beta}, \quad V.C(\underset{\sim}{\tilde{\beta}}) = \sigma^2(\underset{\sim}{x}'\underset{\sim}{x})^{-1} \tag{4}$$

وحيث أن

$$\sigma^2 = \frac{1}{6}\Pi^2\theta^2$$

فإن

$$\operatorname{var}(\beta'_o) = \frac{\Pi^2\theta^2}{6n}, \quad (\Pi = 3.1415903)$$

أما مصفوفة التباين والتباين المشترك للمعاملات $\tilde{\beta}_1,\tilde{\beta}_2,\ldots\tilde{\beta}_k$ فهي:

$$\operatorname{cov}\left(\tilde{\beta}_1,\ldots\tilde{\beta}_k\right) = \frac{1}{6}\Pi^2\theta^2 \underset{\sim 2}{I}^{-1}, \underset{\sim 2}{I}^{-1} = \left\|\sum_i x_{ir}x_{is}\right\|^{-1}, \qquad r=s=0,1,2\ldots,K \tag{5}$$

مقدر المربعات الصغرى الاعتيادية (OLS) $\tilde{\theta}$ للمعلمة θ

$$E(\tilde{\theta}) = \theta\left[1 - \frac{1}{4(n-k-1)}\left[1 + \frac{1.2}{n-k-1}\sum_{i=1}^{n}(1-h_{ii})^2\right]\right] \tag{6}$$

h_{ii} هي العنصر i في قطر المصفوفة $x\,(x'x)^{-1}x'$

أما قيمة التباين لـ $\tilde{\theta}$ فهو:

$$V(\tilde{\theta}) = \frac{1.1\theta^2}{n}$$

وباعتبار أن مقدرات المربعات الصغرى الاعتيادية كتقدير أولي يستخدم في طريقة الإمكان الأعظم (ML) والمعتمدة على طريقة فشر وذلك للحصول على تقديرات معاملات الانحدار ومعلمة القياس لنموذج انحدار القيمة المتطرفة (النوع الأول) وللقيم الكبرى ويتم ذلك باستخدام السلسلة التالية:

$$\begin{bmatrix} \hat{\underset{\sim}{\beta}}^{(\ell+1)} \\ \hat{\theta}^{(\ell+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\underset{\sim}{\beta}}^{(\ell)} \\ \hat{\theta}^{(\ell)} \end{bmatrix} - \left[\underset{\sim}{D}_2^{\ell}\right]^{-1} \underset{\sim}{D}_1^{(\ell)} \tag{7}$$

$$\underset{\sim}{D}_{1\,(K+2)\times 1}^{(\ell)} = \begin{bmatrix} \partial L\left(\underset{\sim}{\beta},\theta\right)/\partial\beta_j \\ \partial L\left(\underset{\sim}{\beta},\theta\right)/\partial\theta \end{bmatrix}_{\underset{\sim}{\beta}=\hat{\underset{\sim}{\beta}}^{(\ell)},\ \theta=\hat{\theta}^{(\ell)}} \tag{8}$$

$$\underset{\sim}{D}_{2\,(K+2)\times(K+2)}^{(\ell)} = -\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L(\underset{\sim}{\beta},\theta)}{\partial\beta_0^2} & \frac{\partial^2 L(\underset{\sim}{\beta},\theta)}{\partial\beta_0\partial\beta_1}\cdots & \frac{\partial^2 L(\underset{\sim}{\beta},\theta)}{\partial\beta_0\partial\beta_K} & \frac{\partial^2 L(\underset{\sim}{\beta},\theta)}{\partial\beta_0\partial\theta} \\ \frac{\partial^2 L(\underset{\sim}{\beta},\theta)}{\partial\beta_0\partial\beta_K} & \frac{\partial^2 L(\underset{\sim}{\beta},\theta)}{\partial\beta_1\partial\beta_K}\cdots & \frac{\partial^2 L(\underset{\sim}{\beta},\theta)}{\partial\beta_K^2} & \frac{\partial^2 L(\underset{\sim}{\beta},\theta)}{\partial\beta_K\partial\theta} \\ \frac{\partial^2 L(\underset{\sim}{\beta},\theta)}{\partial\beta_0\partial\theta} & \frac{\partial^2 L(\underset{\sim}{\beta},\theta)}{\partial\beta_1\partial\theta}\cdots & \frac{\partial^2 L(\underset{\sim}{\beta},\theta)}{\partial\beta_K\partial\theta} & \frac{\partial^2 L(\underset{\sim}{\beta},\theta)}{\partial\theta^2} \end{bmatrix}_{\underset{\sim}{\beta}=\hat{\underset{\sim}{\beta}}^{(\ell)},\ \theta=\hat{\theta}^{(\ell)}} \tag{9}$$

حتى يتم التوصل الى التقريب الملائم، علماً بأن $\hat{\beta}^{(\ell)}$ و $\hat{\theta}^{(\ell)}$ تشير إلى التقريبات لـ $\hat{\underset{\sim}{\beta}}$ و $\hat{\theta}$ إلى درجة (ℓ) من التكرار، فستكون التقريبات القياسية (تباينات العينة الكبيرة).

$$\operatorname{var}(\hat{\beta}_0) \approx \frac{1.607927\,\theta^2}{n}, \quad \operatorname{var}(\hat{\theta}) \approx \frac{0.607927\,\theta^2}{n},$$

$$\operatorname{cov}(\hat{\beta}_0,\hat{\theta}) \approx \frac{0.607927\,\theta^2}{n} \tag{10}$$

والتقريب لمصفوفة التباين المشترك لـ $\hat{\underset{\sim}{\beta}}'_i = (\hat{\beta}_1,\ldots,\hat{\beta}_K)$ هو:

$$\operatorname{cov}(\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2,\ldots\hat{\beta}_K) \approx \theta^2 \left\| \Sigma_i \, x_{ir} \quad x_{is} \right\|^{-1} \qquad , \ \mathbf{r=s=0,1,2\ldots,k}$$

(11)

3- استخراج مقدار التحيزات لمقدرات الإمكان الأعظم

استخراج مقدار التحيزات لمقدرات الإمكان الأعظم يتم عن طريق استخدام الطرق القياسية ل **Cox & Snell** [3] والتي تحتاج إلى اسلوب متقدم يعتمد على إيجاد المشتقة الأولى والثانية والثالثة للوغاريتم دالة الكثافة الاحتمالية.

$$f_{y_i}(y_i;\underset{\sim}{\beta},\theta) = \frac{1}{\theta}\exp\left[-\left(\frac{y_i - \underset{\sim}{x}'_i\underset{\sim}{\beta}}{\theta}+\gamma\right) - \exp\left(-\left(\frac{y_i - x'_i\underset{\sim}{\beta}}{\theta}+\gamma\right)\right)\right], -\infty < y < \infty$$

(12)

نضع

$$Z_i = \frac{y_i - x'_i\beta}{\theta} + \gamma \quad , \quad i = 1,2,\ldots,n$$

فدالة الكثافة الاحتمالية ل y_i ستكون

$$\mathbf{f}_i(\mathbf{y}_i;\beta,\theta) = \theta^{-1}\exp(-Z_i - \exp(-Z_i))$$

وبافتراض

$$\mathbf{f}_i(y_i;\beta,\theta) = f_{y_i}(y_i)$$

وذلك لسهولة العمل ، ونفرض التفاضلات ذو المرتبة الثالثة للوغاريتم الكثافة الاحتمالية

$$\left.\begin{aligned} W_{rst}^{(i)} &= \frac{\partial^3 \operatorname{Log} \ f_{y_i}(y_i)}{\partial\beta_r\partial\beta_s\partial\beta_t}, \qquad & W_{rs\theta}^{(i)} &= \frac{\partial^3 \operatorname{Log} \ f_{y_i}(y_i)}{\partial\beta_r\partial\beta_s\partial\theta}, \\ W_{r\theta\theta}^{(i)} &= \frac{\partial^3 \operatorname{Log} \ f_{y_i}(y_i)}{\partial\beta_r\partial\theta^2}, \qquad & W_{\theta\theta\theta}^{(i)} &= \frac{\partial^3 \operatorname{Log} \ f_{y_i}(y_i)}{\partial\theta^3}, \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

وباستخدام تفاضلات المرتبة الثانية [1] $V^{(i)}_{\theta\theta},\ V^{(i)}_{r\theta},\ V^{(i)}_{rs},$ نستخرج التفاضلات المطلوبة أعلاه:

$$-W_{rst^{(i)}}=\frac{\partial}{\partial\beta_t}(V^{(i)}_{rs})=\frac{\partial}{\partial\beta_t}\left(\frac{-x_{ir}x_{is}}{\theta^2}e^{-z_i}\right)=\left(\frac{x_{ir}x_{is}x_{it}}{\theta^3}e^{-z_i}\right)$$

(14)

$$-W^{(i)}_{rs\theta}=\frac{\partial}{\partial\theta}(V^{(i)}_{rs})=\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{-x_{ir}x_{is}}{\theta^2}e^{-z_i}\right)=\frac{x_{ir}x_{is}}{\theta^3}e^{-z_i}\left[2+\gamma-z_i\right]$$

(15)

$$-W^{(i)}_{r\theta\theta}=\frac{\partial}{\partial\beta_r}(V^{(i)}_{\theta\theta})=\frac{\partial}{\partial\beta_r}\left[-\frac{1}{\theta^2}\left((z_i-\gamma)^2e^{-Zi}+2(z_i-\gamma)(1-e^{Zi})-1\right)\right]$$

$$=\frac{x_{ir}}{\theta^3}\left[e^{-Zi}\left[4(z_i-\gamma)-(z_i-\gamma)^2-2\right]\right]+\frac{2x_{ir}}{\theta^3}$$

(16)

$$-W^{(i)}_{\theta\theta\theta}=\frac{\partial}{\partial\theta}(V^{(i)}_{\theta\theta})=\frac{\partial}{\partial\theta}\left[-\frac{1}{\theta^2}\left[(z_i-\gamma)^2e^{-Zi}+2(z_i-\gamma)(1-e^{-Zi})-1\right]\right]$$

$$=\frac{1}{\theta^3}\left[-e^{-Zi}\left(\ (z_i-\gamma)^3-6(z_i-\gamma)+6(z_i-\gamma)+6(z_i-\gamma)\ \right)-2\right]$$

(17)

كما يتطلب ايجاد الصيغ التقريبية للتحيز ايجاد التوقع لمجموع تفاضلات المرتبة الثالثة اي:

$$\left.\begin{aligned}K_{rst}&=E\left(\sum_i W^{(i)}_{rst}\right), & K_{rs\theta}&=E\left(\sum_i W^{(i)}_{rs\theta}\right),\\ K_{r\theta\theta}&=E\left(\sum_i W^{(i)}_{r\theta\theta}\right), & K_{\theta\theta\theta}&=E\left(\sum_i W^{(i)}_{\theta\theta\theta}\right),\end{aligned}\right\}\quad (18)$$

وباستخدام العلاقة التالية

$$E\left(z^{r}e^{zt}\right)=d^{r}M_{Z}(t)/d\,t^{r}=d^{r}\Gamma\left(1-t\right)/d\,t^{r}$$

(19)

حيث ان $\mathbf{M}_{Z}(t)=\int_{0}^{\infty}z^{(1-t)}e^{-z}dz=\Gamma(1-t)\qquad (t<1)$

وتمثل الدالة المولدة للعزوم لتوزيع القيمة المتطرفة النوع الاول القياسي وللقيم الكبرى [9]، وباستخراج كل من الاتي :

$$E\,z^{3}e^{-Zi}=-\Gamma'''(2),M_{z}'''(t)=\int_{-\infty}^{\infty}Z^{3}e^{Zt}e^{-Z}e^{-e^{-Z}}dz=-\Gamma'''(1-t),(t<1)$$

$$\therefore -\Gamma'''(2)=-0.489460$$

$$E\left[(Z-\gamma)^{3}e^{-Zi}\right]=E\left[(Z-\gamma)(Z-\gamma)^{2}e^{-Zi}\right]$$

$$=\left(-\Gamma'''(2)\right)-2\gamma\Gamma''(2)+\gamma^{2}\left(-\Gamma'(2)\right)-\gamma\Gamma''(2)+2\gamma^{2}\left(-\Gamma'(2)\right)-\gamma^{3}$$

$$=-2.2688205$$

ومن خلالها يمكن أن نحصل على المقادير المطلوبة في معادلة (18) وهي على التوالي :

$$K_{rst}=E\left(\sum_{i}\frac{-X_{ir}X_{is}X_{it}}{\theta^{3}}e^{-Zi}\right)=-\frac{-\sum X_{ir}X_{is}X_{it}}{\theta^{3}}$$

(20)

حيث: $E\,e^{-Zi}=1$

$$-K_{rs\theta}=E\left(\sum_{i}\frac{X_{ir}X_{is}}{\theta^{3}}e^{-Zi}\left(2+\gamma-z_{i}\right)\right)=\frac{3}{\theta^{3}}\sum_{i}x_{ir}x_{is}$$

(21)

حيث:

$$EZ_{i}\,e^{-Zi}=-\Gamma'(2)=-0.422784,\gamma=0.57722$$

$$-K_{r\theta\theta}=E\left(\sum_{i}\frac{X_{ir}}{\theta^{3}}\left[e^{-Zi}\left(4(z_{i}-\gamma)-(z_{i}-\gamma)^{2}-2\right)+2\right]\right)$$

$$=\frac{-5.6449336}{\theta^{3}}\sum_{i}X_{ir}\qquad \textbf{(22)}$$

$$-K_{\theta\theta\theta}=E\left(\sum\left(\frac{1}{\theta^{3}}\left(-e^{-Zi}\left(\ (z_i-\gamma)^{3}-6(z_i-\gamma)^{2}+6(z_i-\gamma)+6(z_i-\gamma)-2\right)\right)\right)\right)$$

$$=\frac{20.138422n}{\theta^{3}} \qquad (23)$$

حيث أن $EZ_i=\gamma\Rightarrow E(z_i-\gamma)\ =\text{Zero}$

وأخيراً نحتاج إلى المعاملات التالية والتي تمثل التوقع لمجموع حاصل ضرب تفاضلات المرتبة الاولى بتفاضلات المرتبة الثانية والتي يستند عليها في حساب الصيغ المتعلقة بالتحيز : $J_{r,st}$, $J_{r,s\theta}$, $J_{r,\theta\theta}$, $J_{\theta,st}$, $J_{\theta,s\theta}$, $J_{\theta,\theta\theta}$

حيث أن:

$$\left.\begin{array}{l}
J_{rst}=E\left(\sum u_r^{(i)}v_{st}^{(i)}\right),\quad J_{r,s\theta}=E\left(\sum u_r^{(i)}v_{s\theta}^{(i)}\right),\\[2em]
J_{r,\theta\theta}=E\left(\sum u_r^{(i)}v_{\theta\theta}^{(i)}\right),\quad J_{\theta,st}=E\left(\sum u_\theta^{(i)}v_{st}^{(i)}\right)\\[2em]
J_{\theta,s\theta}=E\left(\sum u_\theta^{(i)}v_{s\theta}^{(i)}\right),\quad J_{\theta,\theta\theta}=E\left(\sum u_\theta^{(i)}v_{\theta\theta}^{(i)}\right)
\end{array}\right\} \qquad (24)$$

$u_r^{(i)}, u_\theta^{(i)}$ تمثل تفاضلات المرتبة الاولى، $V_{S\theta}^{(i)}, V_{St}^{(i)}, V_{\theta\theta}^{(i)}$ تفاضلات المرتبة الثانية [1] ، ومن خلالها ممكن أن نستخرج قيم المعاملات:

$$-J_{r,st} = E\left[\sum_i \frac{x_{ir}}{\theta}\left(1-e^{-z_i}\right)\left(\frac{-x_{is}x_{it}}{\theta^2}e^{-z_i}\right)\right] = -\frac{1}{\theta^3}\sum_i x_{ir}x_{is}x_{it}E\left(e^{-z_i}\left(1-e^{-z_i}\right)\right) \quad (25)$$

$$-J_{r,s\theta} = E\left(\sum_i \frac{x_{ir}}{\theta}\left(1-e^{-z_i}\right)\right)\left(\frac{-x_{is}}{\theta^2}\left[\left(1-e^{-z_i}\right)+e^{-z_i}\left(z_i-\gamma\right)\right]\right)$$

$$= -\frac{1}{\theta^3}\sum x_{ir}x_{is}E\left[\left(1-e^{-z_i}\right)\left[\left(1-e^{-z_i}\right)+e^{-z_i}\left(z_i-\gamma\right)\right]\right] \quad (26)$$

$$-J_{r,\theta\theta} = E\left(\left(\frac{\sum x_{ir}}{\theta}\left(1-e^{-z_i}\right)\right)\left(-\frac{1}{\theta^2}\left(z_i-\gamma\right)^2e^{-z_i}+2\left(z_i-\gamma\right)\left(1-e^{-z_i}\right)-1\right)\right)$$

(27)

$$-J_{\theta,st} = E\left(\sum\left(\frac{\left(z_i-\gamma\right)\left(1-e^{-z_i}\right)-1}{\theta}\right)\left(-\frac{x_{is}x_{it}}{\theta^2}e^{-z_i}\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{\theta^3}\sum_i x_{is}x_{it} \quad E\left[e^{-z_i}\left(\left(z_i-\gamma\right)\left(1-e^{-z_i}\right)-1\right)\right] \quad (28)$$

$$-J_{\theta,s\theta} = E\left(\sum\left(\frac{\left(z_i-\gamma\right)\left(1-e^{-Zi}\right)-1}{\theta}\right)\left(\frac{-x_{is}}{\theta^2}\left[\left(1-e^{-Zi}\right)+e^{-Zi}\left(z_i-\gamma\right)\right]\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{\theta^3}\sum x_{is}E\left[\left[\left(z_i-\gamma\right)\left(1-e^{-z_i}\right)-1\right]\left[\left(1-e^{-z_i}\right)+e^{-z_i}\left(z_i-\gamma\right)\right]\right]$$

(29)

$$-J_{\theta,\theta\theta} = E\left(\sum\left(\frac{\left(z_i-\gamma\right)\left(1-e^{-z_i}\right)-1}{\theta}\right)\left(-\frac{1}{\theta^2}\left(\left(z_i-\gamma\right)^2e^{-z_i}+2\left(z_i-\gamma\right)\left(1-e^{-z_i}\right)-1\right)\right)\right)$$

$$= \frac{-n}{\theta^3}E\left[\left(\left(z_i-\gamma\right)\left(1-e^{-z_i}\right)-1\right)\left(\left(z_i-\gamma\right)^2e^{-z_i}+2\left(z_i-\gamma\right)\left(1-e^{-z_i}\right)-1\right)\right]$$

(30)

باستخدام دوال digamma وtrigamma [1]، [6] فإن:

$$E\left[z^{r}\exp(2z)\right]=d^{r}\Gamma(x)/d\,x^{r}$$

وعندما x=3 فإن: $E\left(e^{-2Z}\right)=\Gamma(3)=2,\quad E\left(e^{-2Z}\right)=-\Gamma(3)=-1.845568$

$$E\left(z^{2}e^{-2Z}\right)=\Gamma''(3)=2.442928,\quad E\left(z^{3}e^{-2Z}\right)=-\Gamma''(3)$$
$$=-3.449968$$

حيث أن:

$$\Gamma(x)=(x-1)\Gamma(x-1)$$
$$\Gamma'(x)=\Gamma(x-1)+(x-1)\Gamma'(x-1)$$
$$\Gamma''(x)=2\Gamma'(x-1)+(x-1)\Gamma''(x-1)$$
$$\Gamma'''(x)=3\Gamma''(x-1)+(x-1)\Gamma'''(x-1)$$

وهكذا فإن: $\Gamma'(3)=\Gamma_{(2)}+2\Gamma'_{(2)}=1.845568$

$$\Gamma''(3)=2.442928,\qquad \Gamma'''(3)=3.449968$$

باستخدام النتائج السابقة يتم استخراج الناتج لدوال J وكالآتي:

$$-J_{r,st}=\frac{1}{\theta^{3}}\sum x_{ir}x_{is}x_{it}$$

(31)

حيث: $E\,e^{-Zi}(1-e^{-z_i})=E\,e^{-z_i}-E\,e^{-2z_i}=\Gamma(2)-\Gamma(3)=-1$

$$-J_{r,s\theta}=-\frac{3}{\theta^{3}}\sum x_{ir}x_{is}$$

(32)

حيث: $E(1-e^{-z_i})(1-e^{-z_i})=E(1-e^{-z_i})-E\,e^{-2z_i}(1-e^{-z_i})=1$

$$E\,e^{-Z_i}(z_i-\gamma)-E\,e^{-2Z_i}(z_i-\gamma)=3$$

$$-J_{r,\theta\theta}=\frac{4.6492376}{\theta^3}\sum x_{ir}$$

(33)

حيث:

$$E(1-e^{-Z_i})(z_i-\gamma)^2\,e^{-Z_i}=-2.6492216$$

$$2E\left[(1-e^{-Z_i})(z_i-\gamma)(1-e^{-Z_i})\right]=-2.000016$$

$$E(1-e^{-Z_i})=\text{Zero}$$

$$-J_{\theta,st}=-\frac{1}{\theta^3}\sum x_{is}\,x_{it}$$

(34)

$$E\,e^{-Z_i}(z_i-\gamma)(1-e^{-z_i})-Ee^{-Z_i}=1$$

$$-J_{\theta,s\theta}=\frac{2.312234}{\theta^3}\sum x_{is}$$

حيث:

$$E\left[((z_i-\gamma)(1-e^{-Z_i})-1)((1-e^{-Z_i})+e^{-Z_i}(z_i-\gamma))\right]=$$

$$E(z_i-\gamma)(1-e^{-Z_i})-1)(1-e^{-Z_i})+E(z_i-\gamma)(1-e^{-Z_i})(z_i-\gamma)\,e^{-Z_i}$$

$$-E(1-e^{-Z_i})-E\,e^{-Z_i}(z_i-\gamma)$$

$$E(z_i-\gamma)(1-2\,e^{-Z_i}+e^{-2Z_i})=-1$$

$$E(z_i-\gamma)(1-2\,e^{-Z_i})(z_i-\gamma)\,e^{-Z_i}=-2.312226$$

$$-J_{\theta,\theta,\theta}=\frac{-11.110654}{\theta^3}n$$

(35)

حيث أن:

$$E\left[((z_i-\gamma)(1-e^{-z_i})-1)((z_i-\gamma)^2 e^{-z_i}+2E(z_i-\gamma)(1-e^{-z_i})-1)\right]=$$
$$=E(z_i-\gamma)(1-e^{-z_i})(z_i-\gamma)^2 e^{-z_i}+2E(z_i-\gamma)(1-e^{-z_i})(z_i-\gamma)(1-e^{-z_i})$$
$$-E(z_i-\gamma)(1-e^{-z_i})-E(z_i-\gamma)^2 e^{-z_i}-2E(z_i-\gamma)(1-e^{-z_i})+1$$

علماً أن:

$$-E(z_i-\gamma)(1-e^{-Zi})(z_i-\gamma)^2 e^{-Zi}=E(z_i-\gamma)^3 e^{-Zi}-E(z_i-\gamma)^3 e^{-2Zi}$$
$$=7.4655399$$

و حيث أن:

$$E(z_i-\gamma)^3 e^{-Zi}=-\Gamma'''_{(2)}-2\gamma\Gamma''_{(2)}+\gamma^2\left(-\Gamma'_{(2)}\right)-\gamma\Gamma''_{(2)}+2\gamma^2\left(-\Gamma'_{(2)}\right)-\gamma^3$$
$$=-2.5307067$$

$$E(z_i-\gamma)^3 e^{-Zi}=-9.9962466$$
$$-2E(z_i-\gamma)(1-e^{-Zi})(z_i-\gamma)(1-e^{-Zi})=$$
$$2(E(z_i-\gamma)^2-2E(z_i-\gamma)^2 e^{-Zi}+E(z_i-\gamma)^2 e^{-2Zi})$$
$$=7.2900482$$

حيث أن:

$$E(z_i-\gamma)^2=\frac{\pi^2}{6}=1.645$$

$$E(z_i-\gamma)^2 e^{-Zi}=1.6449336\ ,\ E(z_i-\gamma)^2 e^{-2Zi}=5.2898913$$
$$-E(z_i-\gamma)(1-e^{-Zi})=1,\ -E(z_i-\gamma)^2 e^{-Zi}=1.6449336$$
$$-2E(z_i-\gamma)(1-e^{-Zi})=2$$

فإذا كان

$$\left.\begin{array}{l} b_r=E(\hat{B}_r)-b_r\text{, } \mathbf{r=0, 1, 2,\ldots, K} \\ b_\theta=(\hat{\theta})-\theta \end{array}\right\} \qquad \mathbf{(36)}$$

تشير إلى مقدار التحيزات لـ$(\hat{B}_r)$ و$(\hat{\theta})$ ، وباستخدام الطرق القياسية التي أعطيت من قبل **Cox (1968) and Snell**[3] التي بينوا من خلالها التحيزات المتقاربة المعدلة إلى $O\left(\frac{1}{n}\right)$ فإن:

$$\left.\begin{aligned} b_r &= \frac{1}{2}\sum_s\sum_t\sum_u I^{rs} I^{tu}\left(K_{stu}+2J_{t,su}\right) \\ b_\theta &= \frac{1}{2}\sum_s\sum_t\sum_u I^{\theta s} I^{tu}\left(K_{stu}+2J_{t,su}\right) \end{aligned}\right] \qquad (37)$$

حيث أن:

r,s, t, u= 0, 1, ….K

$\theta, I^{rs}, I^{\theta s}$ ... الخ تشير إلى العناصر في معكوس مصفوفة المعلومات.

4- الاستنتاجات

من خلال ما تم التوصل إليه من احتساب الصيغ المتعلقة بالتحيز لمعاملات ومعلمة القياس لنموذج انحدار القيمة المتطرفة الخطي (النوع الأول) وللقيم الكبرى،وذلك من خلال استخراج المعاملات التي يستند عليها في حساب تلك الصيغ وكما موضح في الجدول رقم (1).

جدول (1):النتائج الاساسية التي تم التوصل اليها والمستخدمة لايجاد الصيغ المتعلقة بالتحيز

1- استخراج التفاضلات ذو المرتبة الثالثة للوغارتم دالة الكثافة الاحتمالية :

$$W_{rst}^{(i)}=\left(\frac{X_{ir}X_{is}X_{it}}{\theta^3}e^{-Z_i}\right)$$

$$W_{rs\theta}^{(i)}=\frac{X_{ir}X_{is}}{\theta^3}e^{-Z_i}[2+\gamma-Z_i]$$

$$W_{r\theta\theta}^{(i)}=\frac{X_{ir}}{\theta^3}\left[e^{-z_i}\left[4(z_i-\gamma)-(z_i-\gamma)^2-2\right]\right]+\frac{2X_{ir}}{\theta^3}$$

$$W_{\theta\theta\theta}^{(i)}=\frac{1}{\theta^3}\left[-e^{-z_i}((z_i-\gamma)^3-6(z_i-\gamma)+6(z_i-\gamma))-2\right]$$

2-استخراج المعاملات التالية والتي تمثل التوقع لمجموع تفاضلات المرتبة الثالثة :

$$K_{rst}=-\frac{\sum X_{ir}X_{is}X_{it}}{\theta^3}$$

$$K_{rs\theta}=\frac{3}{\theta^3}\sum_i X_{ir}X_{is}$$

$$K_{r\theta\theta}=\frac{-5.6449336}{\theta^3}\sum_i X_{ir}$$

$$K_{\theta\theta\theta}=\frac{20.138422n}{\theta^3}$$

3-استخراج المعاملات التالية والتي تمثل التوقع لمجموع حاصل ضرب تفاضلات المرتبة الاولى بتفاضلات المرتبة الثانية :

$$J_{r,st}=\frac{1}{\theta^3}\sum_i X_{ir}X_{is}X_{it}$$

$$J_{r,s\theta}=-\frac{3}{\theta^3}\sum x_{ir}x_{is}$$

$$J_{r,\theta\theta}=\frac{4.6492376}{\theta^3}\sum X_{ir}$$

$$J_{\theta,s\theta}=\frac{2.312234}{\theta^3}\sum X_{is}$$

$$J_{\theta,\theta\theta}=-\frac{11.110654n}{\theta^3}$$

4- ومن النتائج اعلاه يمكن ايجاد الصيغ التقريبية للتحيز لمقدرات الامكان الاعظم باستخدام الطرق القياسية ل Cox & Snell :

- لمعاملات الانحدار

$$b_r=\frac{1}{2}\sum_s\sum_t\sum_u I^{rs}I^{tu}(K_{stu}+2J_{t,su})$$

- لمعلمة القياس

$$b_\theta=\frac{1}{2}\sum_s\sum_t\sum_u I^{\theta s}I^{tu}(K_{stu}+2J_{t,su})$$

r,s,t,u= 0,1,…,k

$I^{\theta s}, I^{rs}$, θ …الخ تشير الى العناصر في معكوس مصفوفة المعلومات .

5- التوصيات

نوصي بإيجاد صيغة لتقليل التحيز في معلمة القياس (θ) التي يمكن أن نرى تأثيرها في حساب التباين $\mathrm{var}(\hat{\theta}),\ \mathrm{var}(\hat{\beta}_K),\ K = 0,1,2,...n$.

المصادر:

1- العزاوي، فاطمة جاسم محمد (تقدير معاملات ومعلمة القياس لنموذج انحدار القيمة المتطرفة الخطي (النوع الأول) وللقيم الكبرى)، رسالة ماجستير، كلية الإدارة والاقتصاد، جامعة بغداد، 1995.

2-Barreto-Souza , Wagner and Vasconcellos,Klaus L.P. (2011)."Bias and skewness in ageneral extreme-value regression model ".Computational statistics & data analysis,vol.55,issue 3,p 1379-1393.

3- Cox, D.R. and Snell, E.J. (1968). "A General definition of residuals". J.R.S.S. Series B, 30, 248-265.

4- Draper, N.R. and smith, H. (1966). "Applied Regression Analysis", John Wiley & Sins, New York.

5- Gumbel, E.J. (1954). "Statistical Theory of Extreme Values and Some Practical Applications", Nati. Bureau of Stand, APpl. Math. Ser. No. 33.

6- Haddow, A.A. (1986). "Some Statistical Problems Connected With Exterme Value Regression", Ph.D. Thesis, university of Brunel, U.K.

7- Haddow, A.A., and Young, D.H. (1986). "Moment Properties of Estimators for a type 1 Extreme Value Regression model", Communications in Statistics, Vol. 15, No. 8, 2527-2539.

8- Hogg, R.V. and A.T. Craig (1970). "Introduction to Mathematical Statistics", Macmillan Publishing Co., Inc.

9- Johnson, N.L. and Kotz, S. (1970). "Distribution in Statistics, Continuous Univariate Distributions-1", Boston, Houghton Mifflin Company.

10- Lawless, J.F. (1982). "Statistical Models and Method for Lifetime Data", New York, Wiley.

11-Leblanc,Michael and Moon,James (2006)."Extreme Regression ",Biostatistics,vol.7,issue 1,pp71-84.

12- Mann, N.R. (1968). "Point and Internal Estimation Procedures for the Two-Parameter Weibull or Extreme Value Distributions", Technometrics, 10, 231-256.

13- Silvey, S.D. (1978). "Statistical Inference", John Wiley & Sons Inc., New York.

CALCULATION BIASES FOR COEFFICIENTS AND SCALE PARAMETER FOR LINEAR (TYPE 1) EXTREME VALUE REGRESSION MODEL FOR LARGEST VALUES

Abstract

Characterized by the Ordinary Least Squares (OLS) on Maximum Likelihood for the greatest possible way that the exact moments are known , which means that it can be found, while the other method they are unknown, but approximations to their biases correct to $0(n^{-1})$ can be obtained by standard methods. In our research expressions for approximations to the biases of the ML estimators (the regression coefficients and scale parameter) for linear (type 1) Extreme Value Regression Model for Largest Values are presented by using the advanced approach depends on finding the first derivative, second and third.

Keywords/ Extreme value regression- the regression coefficient- scale parameter- ordinary least squares- maximum likelihood- moments-biases.