معادلات الانحدار غير المرتبطة ظاهريا (توزيع المتغيرات والخطأ بواسون)

م. م فاطمة عبد الحميد جواد البيرماني
جامعة بغداد- كلية الادارة والاقتصاد
قسم الاحصاء

Abstract

This study is about finding the estimation of tow equations, the comparative has been done between the estimations by using seemingly unrelated regression equations for the variable and random error has been distribution with poisson and the variable and random error has been distribution with normal and the method by using oldenary lest square.

While in the application side, we have estimated the parameter of investment specification function for the sector of agriculture with the industry sector is enabled us to obtain an estimation efficiency for the model of seemingly unrelated Poisson regression equation.

المستخلص

تناولت هذه الدراسة تقدير معالم اثنان من المعادلات الغير مرتبطة ظاهريا عندما تكون المتغيرات والخطأ لها توزيع بواسون، اذ تمت المقارنة بين تقديرات هذا النموذج مع التقديرات لكل معادلة باستخدام المربعات الصغرى الاعتيادية. وكذلك مقارنة معادلات الانحدار غير المرتبطة ظاهريا في حالة المتغيرات والخطأ لها توزيع الطبيعي مع توزيع بواسون .

اما الجانب التطبيقي فقد تم تقدير معالم دالة التخصيصات الاستثمارية لقطاعي الزراعة والصناعة والتي تم فيها الحصول على كفاءة التقدير لنموذج معادلات الانحدار غير المرتبة ظاهريا في حالة المتغيرات والخطأ لها توزيع بواسون .

1- المقدمة وهدف البحث

تفسر معادلات الانحدار غير المرتبطة ظاهريا حالة التشابك (الترابط) بين متغيرات الظاهرة المدروسة، ويكون هذا الترابط غير ظاهر في الهيكل العام للنموذج. ومن الامثلة على ذلك التشابك بين قطاعي الزراعة والصناعة، فان ظاهرة الاستثمار في احد هذه القطاعات لا يمكن ان ينظر اليها كحالة مستقلة عن القطاع الاخر وخصوصا التخصيصات الاستثمارية لقطاع الزراعة لايمكن ان تكون مستقلة عن التخصيصات الاستثمارية في القطاع الصناعي حيث ان المصدر الرئيسي للتخصيصات الاستثمارية هو الدخل القومي.

لذا عندما تكون متغيرات الظاهرة المدروسة مرتبطة بعلاقات تشابكية فأن نموذج المعادلة المفردة تكون غير كفوءة عند التقدير، اي يجب الأخذ بنظر الاعتبار العلاقات التشابكية بين متغيرات الظاهرة المدروسة والتي يمكن تمثيلها بشكل معادلات مرتبطة في حدود الخطأ العشوائي هذا النوع من المعادلات لاتظهر فية المتغيرات كمتغير مستقل ومعتمد في آن واحد وتبدو هذة المعادلات غير مرتبطة في الهيكل العام للنموذج.

ويعد زلنر (zellner) اول من اوجد تقدير معادلات الأنحدار غير المرتبطة ظاهريا في عام (1962) والتي تكون اكثر كفاءة من التقدير باستخدام (ols) لكل معادلة وقد كانت المتغيرات والخطأ لها توزيع طبيعي ،لذا فان الهدف من هذا البحث هو ايجاد تقديرات مجموعة من معادلات الانحدار غير المرتبطة ظاهريا عندما تكون المتغيرات والخطأ لها توزيع بواسون وذلك للحصول على تقديرات اكثر كفاءة، اذ تمت المقارنة بين تقديرات هذا النموذج ونموذج المعادلة المنفردة باستخدام طريقة المربعات الصغرى الأعتيادية.

2- مفهوم معادلات الانحدار غير المرتبطة ظاهريا (SURE) في حالة توزيع المتغيرات والخطأ توزيع طبيعي [5][2]

النموذج يتكون من M من المعادلات عددها مساو الى عدد المتغيرات المعتمدة والتي تسمى بالمتغيرات الداخلية (Endogenous Variables) اما المتغيرات المستقلة فتسمى بالمتغيرات الخارجية (Exogenous Variables) وهذه المتغيرات لا تظهر كمتغير معتمد ومستقل في آن واحد اي انها تحوي مجموعة معادلات مشخصة تماما، كل معادلة تتكون من متغير داخلي واحد وعدد من المتغيرات الخارجية، اي ان كل معادلة توضح علاقة انحدار احصائية معينة وان وجود هذه العلاقة سوف ينعكس على الحدود العشوائية مكونة بذلك منظومة معادلات مرتبطة من خلال التباين المشترك للاخطاء العشوائية، ويعرف هذا بنموذج الانحدار غير المرتبط ظاهريا (Seemingly Unrelated Regression Equations) ويعد زلنر (Zellner) اول من صاغها وبشكل مختصر يشار اليها (SURE) .

يمكن كتابة صيغة منظومة (SURE) بالشكل التالي :-

$$Y_i = X_i B_i + U_i \qquad \ldots(1)$$

$$i = 1,2,\ldots, M$$

حيث أن

M : تمثل عدد المعادلات .

Y_i:موجة عمودي$(T\times 1)$ لمشاهدات المتغير المعتمد في المعادلة i .

X_i:مصفوفة المتغيرات المستقلة ذات مرتبة$(T\times k_i)$.

B_i:موجة عمودي $(K_i\times 1)$ تمثل عناصرة معالم المعادلة i .

U_i: موجة عمودي$(T\times 1)$ للمشاهدات غير الظاهرة(حد الخطأ) .

بتطبيق طريقة المربعات الصغرى العامة (GLS) نحصل على تقدير المعالم والتي تكون اكثر كفاءة من مقدرات المربعات الصغرى الاعتيادية (OLS) لكل معادلة على انفراد اما صيغة التقدير فهي كالاتي:-

$$b_{sure}=(X'\Omega^{-1} X)^{-1}X'\Omega^{-1}Y \qquad \ldots(2)$$

اما مصفوفة التباين والتباين المشترك للمعالم المقدرة فتكون صيغتها كالأتي :-

$$Var\text{-}Cov(b)_{sure}=(X'\Omega^{-1} X)^{-1} \qquad \ldots(3)$$

3- معادلات الانحدار غير المرتبطة ظاهريا (المتغيرات والخطأ لها توزيع بواسون SUPREM) [4]

ليكن X_{1i} ، X_{2i} ، U متغيرات مستقلة لها توزيع بواسون الوسط الحسابي لها λ_{1i} ، λ_{2i} ، ξ على التوالي لكل $(i=1,2,..n)$ حيث ان n تمثل عدد المشاهدات اي ان :-

$$X_{1i}\sim poisson(\lambda_{1i})$$

$$X_{2i}\sim poisson(\lambda_{2i})$$

$$U\sim poisson(\xi)$$

اما y_{1i} , y_{2i} متغيرات معتمدة لها توزيع بواسون بحيث ان y_{1i}, y_{1j} , y_{2i} , y_{2j} غير مرتبطة لكل $(i \neq j)$ لذا لايكون هناك ارتباط متعدد (autocorrelation) لكل بيانات السلسلة .

اما القيم المتوقعة لمشاهدات المتغير المعتمد يمكن التعبير عنها بالشكل التالي :-

$$E(y_{1i}/x_{1i}) \equiv \theta_{1i} = \exp(x_{1i}B_1) \quad \ldots(4)$$

$$E(y_{2i}/x_{2i}) \equiv \theta_{2i} = \exp(x_{2i}B_2) \quad \ldots(5)$$

حيث ان:- x_{1i} , x_{2i} متجهات المتغير الخارجي $(1\times K_1)$,$(1\times K_2)$ على التوالي .

B_1,B_2 معالم المتغير الخارجي $(K_1\times 1)$, $(K_2\times 1)$ على التوالي .

ξ يمثل التباين المشترك للمتغيرين اي ان

$$cov(y_{1i}, y_{2i}) = \xi$$

يمكن كتابة دالة بواسون والتي تكون صيغتها كالأتي :-

$$f(y_{1i},y_{2i}/\theta_{1i},\theta_{2i},\xi)=e^{(\xi-\theta_{1i}-\theta_{2i})}\sum_{j=0}^{m}\frac{\xi^{j}(\theta_{1i}-\xi)^{y_{1i}-j}(\theta_{2i}-\xi)^{y_{2i}-j}}{j!\,(y_{1i}-j)!\,(y_{2i}-j)!}$$

$$m=\min(y_{1i},y_{2i}) \quad , i=1,2,\ldots,n \qquad \ldots(6)$$

بعد التعويض عن قيمة θ_{1i} θ_{2i} , والموضحة في المعادلتين (4),(5)

يمكن اعادة كتابة دالة بواسون بالشكل التالي :-

$$f(y_{1i},y_{2i}/B_1,B_2,\xi)=$$
$$e^{(\xi-e^{x_{1i}B_1}-e^{x_{2i}B_2})}\sum_{j=0}^{m}\frac{\xi^j(e^{x_{1i}B_1}-\xi)^{y_{1i}-j}(e^{x_{2i}B_2}-\xi)^{y_{2i}-j}}{j!\ (y_{1i}-j)!\ (y_{2i}-j)!}$$

4 - تقدير معادلات الانحدار غير المرتبطة ظاهريا في حالة توزيع المتغيرات والخطأ توزيع بواسون [4][3]

ليكن لدينا النموذج الاتي :-

$$Y_{1i}=x_{1i}+u$$
$$Y_{2i}=x_{2i}+u$$
$$(i=1,2,\ldots,n)$$

حيث ان :-

عدد المعادلات (M=2) .

y_{2i},y_{1i} موجة المتغيرات المعتمدة ذات مرتبة $(k_2\times 1),(k_1\times 1)$ على التوالي .

x_{2i},x_{1i} موجة المتغيرات المستقلة ذات مرتبة $(1\times k_2),(1\times k_1)$ على التوالي .

u يمثل الخطأ العشوائي .

$$E(y_{1i}/x_{1i})=\exp(x_{1i}B_1)$$
$$E(y_{2i}/x_{2i})=\exp(x_{2i}B_2)$$
$$\operatorname{cov}(y_{1i},y_{2i})=\xi$$

يتم اولا تقدير معالم المعادلتين (B_2,B_1) بطريقة (OLS) كالأتي :-

$$b_{OLS}=(x'x)^{-1}x'y$$

وبعد ايجاد التقديرات يتم ايجاد البواقي للحصول على مصفوفة S ،يتم توظيف المعالم المقدرة والتباين المشترك للمعادلتين (S_{12}) وتعويضها في المشتقات الجزئية الاتية للحصول على تقدير المعالم ومصفوفة التباين والتباين المشترك في حالة توزيع المتغيرات والخطأ توزيع بواسون وفيما يلي صيغ الاشتقاق :-

$$f(y_{1i},y_{2i}/B_1,B_2,\xi)=e^{(\xi-e^{x_{1i}B_1}-e^{x_{2i}B_2})}\sum_{j=0}^{m}\frac{\xi^j(e^{x_{1i}B_1}-\xi)^{y_{1i}-j}(e^{x_{2i}B_2}-\xi)^{y_{2i}-j}}{j!\ (y_{1i}-j)!\ (y_{2i}-j)!}$$

باخذ (Ln) الى الدالة اعلاة

$$LnL^S=Ln\ e^{(\xi-e^{x_{1i}B_1}-e^{x_{2i}B_2})}\sum_{j=0}^{m}\frac{\xi^j(e^{x_{1i}B_1}-\xi)^{y_{1i}-j}(e^{x_{2i}B_2}-\xi)^{y_{2i}-j}}{j!\ (y_{1i}-j)!\ (y_{2i}-j)!}$$

حيث ان $L^S = f(y_{1i},y_{2i} / B_1,B_2,\xi)$

$$\mathrm{Ln}L^S = \prod_{i=1}^{n}(\xi - e^{x_{1i} B_1} - e^{x_{2i} B_2}) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{\xi^j (e^{x_{1i} B_1}-\xi)^{y_{1i}-j}(e^{x_{2i} B_2}-\xi)^{y_{2i}-j}}{j!\ (y_{1i}-j)!\ (y_{2i}-j)!}$$

$$\frac{\partial LnL^S}{\partial B_1} = -\sum_{i=1}^{n} x_{1i}e^{x_{1i}B_1} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{\xi^j (e^{x_{2i} B_2}-\xi)^{y_{2i}-j}}{j!\ (y_{2i}-j)!\ (y_{1i}-j)!}$$
$$\left[(y_{1i}-j)(e^{x_{1i} B_1}-\xi)^{y_{1i}-j-1}\ x_{1i}e^{x_{1i}B_1}\right]$$

$$\frac{\partial LnL^S}{\partial B_1} = -\sum_{i=1}^{n} x_{1i}e^{x_{1i}B_1} + \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=0}^{m} A_{ij}\frac{(y_{1i}-j)x_{1i}e^{x_{1i}B_1}}{(e^{x_{1i}B_1}-\xi)}\right] \quad \dots(7)$$

حيث ان $A_{ij} = \frac{\xi^j (e^{x_{1i} B_1}-\xi)^{y_{1i}-j}(e^{x_{2i} B_2}-\xi)^{y_{2i}-j}}{j!\ (y_{1i}-j)!\ (y_{2i}-j)!}$

$$\frac{\partial^2 LnL^s}{\partial B_1\,\partial B_1} = -\sum_{i=1}^{n}(x_{1i})^2 e^{x_{1i}B_1} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{\xi^j (e^{x_{2i} B_2}-\xi)^{y_{2i}-j}(y_{1i}-j)x_{1i}}{j!\ (y_{2i}-j)!\ (y_{1i}-j)!}$$
$$\left\{\begin{matrix} e^{x_{1i}B_1}(y_{1i}-j-1) \\ (e^{x_{1i} B_1}-\xi)^{y_{1i}-j-2}x_{1i}e^{x_{1i}B_1} + (e^{x_{1i} B_1}-\xi)^{y_{1i}-j-1}\ x_{1i}e^{x_{1i}B_1}\end{matrix}\right\}$$

$$\frac{\partial^2 LnL^s}{\partial B_1\,\partial B_1} = -\sum_{i=1}^{n}(x'_{1i}\,x_{1i})e^{x_{1i}B_1} + \sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{j=0}^{m} A_{ij}\left[\frac{(y_{1i}-j)(x'_{1i}x_{1i})e^{x_{1i}B_1}}{(e^{x_{1i}B_1}-\xi)} + \frac{(y_{1i}-j)(y_{1i}-j-1)(x'_{1i}x_{1i})(e^{x_{1i}B_1})^2}{(e^{x_{1i}B_1}-\xi)^2}\right]\right\} \quad \dots(8)$$

$$\frac{\partial^2 LnL^s}{\partial B_1\,\partial B_2} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{\xi^j(y_{1i}-j)\,(e^{x_{1i} B_1}-\xi)^{y_{1i}-j-1}\,x_{1i}e^{x_{1i}B_1}}{j!\ (y_{1i}-j)!\ (y_{2i}-j)!}$$
$$\left\{(y_{2i}-j)\ (e^{e^{x_{2i}B_2}}-\xi)^{y_{2i}-j-1}\,x_{2i}\ e^{e^{x_{2i}B_2}}\right\}$$

$$\frac{\partial^2 LnL^s}{\partial B_1\,\partial B_2} = \sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{j=0}^{m} A_{ij}\frac{(y_{1i}-j)(y_{2i}-j)(x'_{1i}x_{2i})(e^{x_{1i}B_1})(e^{x_{2i}B_2})}{(e^{x_{1i}B_1}-\xi)(e^{x_{2i}B_2}-\xi)}\right\} \quad \cdots(9)$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{LnL^s}}{\partial \mathrm{B_1}\, \partial \xi} = \left\{\sum_{j=0}^{m} \frac{(y_{1i}-j)\,(x_{1i})(e^{x_{1i}B_1})}{j!(y_{1i}-j)!\,(y_{2i}-j)!}\right\}$$

$$\left[\xi^{j}\,(e^{x_{2i}B_2}-\xi)^{y_{2i}-j}\,(y_{1i}\text{-j-1})\,(e^{x_{1i}B_1}-\xi)^{y_{1i}-j-2}\,(-1)+\right.$$

$$(e^{x_{1i}B_1}-\xi)^{y_{1i}-j-1}$$

$$\left[\xi^{j}(y_{2i}\text{-j})\,(e^{x_{2i}B_2}-\xi)^{y_{2i}-j-1}\,(-1)+(e^{x_{2i}B_2}-\xi)^{y_{2i}-j}\, j\, \xi^{j-1}\right]\Big]$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{LnL^s}}{\partial \mathrm{B_1}\, \partial \xi} = \sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{j=0}^{m} A_{ij}\left[-\frac{(y_{1i}-j)(y_{1i}-j-1)x_{1i}e^{x_{1i}B_1}}{(e^{x_{1i}B_1}-\xi)^2}-\frac{(y_{1i}-j)(y_{2i}-j)\,x_{1i}e^{x_{1i}B_1}}{(e^{x_{1i}B_1}-\xi)(e^{x_{2i}B_2}-\xi)}+\frac{j(y_{1i}-j)\,x_{1i}e^{x_{1i}B_1}}{\xi(e^{x_{1i}B_1}-\xi)}\right]\right\} \quad \cdots(10)$$

$$\frac{\partial LnL^s}{\partial B_2} = -\sum_{i=1}^{n} x_{2i}\; e^{x_{2i}B_2} + \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=0}^{m}\frac{\xi^j\,(e^{x_{1i}B_1}-\xi)^{y_{1i}-j}}{j!\,(y_{1i}-j)!\,(y_{2i}-j)!}\right]$$

$$\left((y_{2i}-j)\,(e^{x_{2i}B_2}-\xi)^{y_{2i}-j-1}\,x_{2i}\,e^{x_{2i}B_2}\right)$$

$$\frac{\partial LnL^s}{\partial B_2} = -\sum_{i=1}^{n} x_{2i}\; e^{x_{2i}B_2} + \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=0}^{m} A_{ij}\,\frac{(y_{2i}-j)x_{2i}\,e^{x_{2i}B_2}}{(e^{x_{2i}B_2}-\xi)}\right] \qquad \ldots(11)$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{LnL^s}}{\partial \mathrm{B_2}\, \partial \mathrm{B_2}} =$$

$$-\sum_{i=1}^{n}(x_{2i})^2 e^{x_{2i}B_2} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{\xi^j\,(e^{x_{1i}B_1}-\xi)^{y_{1i}-j}\,(y_{2i}-j)x_{2i}}{j!\,(y_{1i}-j)!\,(y_{2i}-j)!}\Big\{$$

$$(e^{x_{2i}B_2}-\xi)^{y_{2i}-j-1}\,x_{2i}e^{x_{2i}B_2}+e^{x_{2i}B_2}\,(y_{2i}\text{-j-1})\,(e^{x_{2i}B_2}-\xi)^{y_{2i}-j-2}\,x_{2i}\,e^{x_{2i}B_2}\Big\}$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{LnL^s}}{\partial \mathrm{B_2}\, \partial \mathrm{B_2}} =$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\left(x'_{2i}x_{2i}\right)e^{x_{2i}B_2} + \sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{j=}^{m} A_{ij}\left[\frac{(y_{2i}-j)(x'_{2i}x_{2i})e^{x_{2i}B_2}}{(e^{x_{2i}B_2}-\xi)} + \frac{(y_{2i}-j)(y_{2i}-j-1)(x'_{2i}x_{2i})(e^{x_{2i}B_2})^2}{(e^{x_{2i}B_2}-\xi)^2}\right]\right\} \quad \cdots(12)$$

$$\frac{\partial^2 LnL^s}{\partial B_2\,\partial\xi} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{(y_{2i}-j)x_{2i}\,e^{x_{2i}B_2}}{j!\,(y_{1i}-j)!\,(y_{2i}-j)!}$$

$$\left\{\xi^j(e^{x_{1i}B_1}-\xi)^{y_{1i}-j}(y_{2i}-j-1)(e^{x_{2i}B_2}-\xi)^{y_{2i}-j-2}(-1) + (e^{x_{2i}B_2}-\xi)^{y_{2i}-j-1}\left[\xi^j(y_{1i}-j)(e^{x_{1i}B_1}-\xi)^{y_{1i}-j-1}(-1) + (e^{x_{1i}B_1}-\xi)^{y_{1i}-j}\,j\,\xi^{j-1}\right]\right\}$$

$$\frac{\partial^2 LnL^s}{\partial B_2\,\partial\xi} = \sum_{i=1}^{n}\left\{A_{ij}\left[-\frac{(y_{2i}-j)(y_{2i}-j-1)(x_{2i}e^{x_{2i}B_2})}{(e^{x_{2i}B_2}-\xi)^2} - \frac{(y_{1i}-j)(y_{2i}-j)\,x_{2i}e^{x_{2i}B_2}}{(e^{x_{1i}B_1}-\xi)(e^{x_{2i}B_2}-\xi)} + \frac{j(y_{2i}-j)\,x_{2i}e^{x_{2i}B_2}}{\xi(e^{x_{2i}B_2}-\xi)}\right]\right\} \quad \cdots(13)$$

$$\frac{\partial LnL^s}{\partial\xi} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{j!\,(y_{1i}-j)!\,(y_{2i}-j)!}$$

$$\left\{\xi^j(e^{x_{1i}B_1}-\xi)^{y_{1i}-j}(y_{2i}-j)(e^{x_{2i}B_2}-\xi)^{y_{2i}-j-1}(-1) + (e^{x_{2i}B_2}-\xi)^{y_{2i}-j}\left[\xi^j(y_{1i}-j)(e^{x_{1i}B_1}-\xi)^{y_{1i}-j-1}(-1) + (e^{x_{1i}B_1}-\xi)^{y_{1i}-j}\,j\,\xi^{j-1}\right]\right\}$$

$$\frac{\partial LnL^s}{\partial\xi} = \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=0}^{m} A_{ij}\left(-\frac{(y_{1i}-j)}{(e^{x_{1i}B_1}-\xi)} - \frac{(y_{2i}-j)}{(e^{x_{2i}B_2}-\xi)} + \frac{j}{\xi}\right)\right] \quad \ldots(14)$$

$$\frac{\partial^2 LnL^s}{\partial\xi\,\partial\xi} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{j!\,(y_{1i}-j)!\,(y_{2i}-j)}$$

$$\Big\{-(y_{2i}-j)\left[\xi^j(e^{x_{1i}B_1}-\xi)^{y_{1i}-j}(y_{2i}-j-1)(e^{x_{2i}B_2}-\xi)^{y_{2i}-j-2}(-1) + (e^{x_{2i}B_2}-\xi)^{y_{2i}-j-1}\left[\xi^j(y_{1i}-j)(e^{x_{1i}B_1}-\xi)^{y_{1i}-j-1}(-1) + (e^{x_{1i}B_1}-\xi)^{y_{1i}-j}\,j\,\xi^{j-1}\right]\right]$$
$$-(y_{1i}-j)\left[\xi^j(e^{x_{2i}B_2}-\xi)^{y_{2i}-j}(y_{1i}-j-1)(e^{x_{1i}B_1}-\xi)^{y_{1i}-j-2}(-1) + (e^{x_{1i}B_1}-\xi)^{y_{1i}-j-1}\left[\xi^j(y_{2i}-j)(e^{x_{2i}B_2}-\xi)^{y_{2i}-j-1}(-1) + (e^{x_{2i}B_2}-\xi)^{y_{2i}-j}\,j\,\xi^{j-1}\right]\right]\Big\}$$

$$+j\left\{\xi^{j-1}\left(e^{x_{2i}B_2}-\xi\right)^{y_{2i}-j}(y_{1i}-j)\left(e^{x_{1i}B_1}-\xi\right)^{y_{1i}-j-1}(-1)+\left(e^{x_{1i}B_1}-\xi\right)^{y_{1i}-j}\left[\xi^{j-1}(y_{2i}-j)\left(e^{x_{2i}B_2}-\xi\right)^{y_{2i}-j-1}(-1)+\left(e^{x_{2i}B_2}-\xi\right)^{y_{2i}-j}(j-1)\,\xi^{j-2}\right]\right\}\Bigg\}$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{LnL^s}}{\partial\xi\,\partial\xi}=\sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{j=0}^{m}A_{ij}\left[\frac{(y_{2i}-j)(y_{2i}-j-1)}{(e^{x_{2i}B_2}-\xi)^2}+2\frac{(y_{1i}-j)(y_{2i}-j)}{(e^{x_{1i}B_1}-\xi)(e^{x_{2i}B_2}-\xi)}-2\frac{j(y_{2i}-j)}{\xi(e^{x_{2i}B_2}-\xi)}+\frac{(y_{1i}-j)(y_{1i}-j-1)}{(e^{x_{1i}B_1}-\xi)^2}-2\frac{j(y_{1i}-j)}{\xi(e^{x_{1i}B_1}-\xi)}+\frac{j(j-1)}{\xi^2}\right]\right\}$$

...(15)

اما مصفوفة التباين والتباين المشترك للمعالم المقدرة يمكن كتابتها بشكل مختصر كالاتي :-

$$V(\psi)=\begin{bmatrix} E\left(-\frac{\partial^2 \mathrm{LnL^s}}{\partial B_1\,\partial B_1}\right) & E\left(-\frac{\partial^2 \mathrm{LnL^s}}{\partial B_1\,\partial B_2}\right) & E\left(-\frac{\partial^2 \mathrm{LnL^s}}{\partial B_1\,\partial\xi}\right)\\ E\left(-\frac{\partial^2 \mathrm{LnL^s}}{\partial B_2\,\partial B_1}\right) & E\left(-\frac{\partial^2 \mathrm{LnL^s}}{\partial B_2\,\partial B_2}\right) & E\left(-\frac{\partial^2 \mathrm{LnL^s}}{\partial B_2\,\partial\xi}\right)\\ E\left(-\frac{\partial^2 \mathrm{LnL^s}}{\partial\xi\,\partial B_1}\right) & E\left(-\frac{\partial^2 \mathrm{LnL^s}}{\partial\xi\,\partial B_2}\right) & E\left(-\frac{\partial^2 \mathrm{LnL^s}}{\partial\xi\,\partial\xi}\right)\end{bmatrix}^{-1} \quad ...(16)$$

وهي عبارة عن مصفوفة متماثلة (symmetric matrix) رتبتها $(k_1+k_2+1)*(k_1+k_2+1)$.

5- كفاءة التقدير [5]

لإيجاد كفاءة التقدير بين مقدرات معالم منظومة معادلات الانحدار غير المرتبطة ظاهريا في حالة توزيع المتغيرات والخطأ توزيع بواسون والمقدرات باستخدام المربعات الصغرى الاعتيادية (OLS)، والتي هي عبارة عن النسبة بين تباين المنظومة (SUPREME) وبين تباين (OLS) وكفاءة التقدير لمقدرات معالم منظومة معادلات الانحدار غير المرتبطة ظاهريا في حالة توزيع المتغيرات والخطأ توزيع طبيعي وفي حالة توزيع بواسون، وهي عبارة عن النسبة بين تباين المنظومة (SUPREME) وبين (SURE) في حالة التوزيع الطبيعي عندما يكون المتوسط لهما يقترب من القيمة الحقيقية تكون كفاءة التقدير كالاتي :-

$$\mathrm{eff}=\frac{Var(b)(SUPREME)}{Var(b)\,in\,(OLS)} \quad ...(17)$$

$$\mathrm{eff}=\frac{Var(b)(SUPREME)}{Var(b)\,(SURE)} \quad ...(18)$$

الجانب التطبيقي

المقدمة

في هذا الجانب سوف نقوم بتطبيق ما تم التطرق اليه في الجانب النظري باستخدام دالة التخصيصات الاستثمارية، وقد تم ايجاد التقديرات لغرض المقارنة بين منظومة SURE في حالة توزيع المتغيرات والخطأ بواسون وبين التقديرات في حالة التوزيع الطبيعي، والمقارنة باستخدام المربعات الصغرى الاعتيادية وقد كانت السلسلة الزمنية من 1970 - 1975 .

1- دالة التخصيصات الاستثمارية [1]

يعد الدخل القومي المحدد الاساسي للتخصيصات الاستثمارية والتي تكون مرتبطة بزيادة او نقصان الدخل القومي، لذلك فان المتغيرات المستقلة التي تم اعتمادها في تفسير سلوك هذه الدالة هي الدخل القومي والتخصيص الاستثماري في السنة السابقة (متغير مرتد زمنيا Lagged Variable) .

وعليه فان الدالة في اعلاة يمكن التعبير عنها بالصيغة الاتية

$$\mathbf{A_t = B_0 + B_1}\boldsymbol{G_t} + \boldsymbol{B_2}\mathbf{A_{t-1}} + \boldsymbol{U_t}$$

حيث ان A_t يمثل التخصيصات الاستثمارية في السنة t ، G_t الدخل القومي في السنة t، A_{t-1} التخصيصات الاستثمارية في السنة t-1 و U_t حد الخطأ العشوائي B_0 الاستثمار التلقائي (الحد الثابت).

2- الترابط في معادلات الاستثمار بين قطاعي الزراعة والصناعة :

ان ظاهرة الاستثمار في احد قطاعي الزراعة والصناعة لا يمكن ان ينظر اليها كحالة مستقلة عن القطاع الاخر، وخصوصا ان التخصيصات الاستثمارية في قطاع الزراعة لا يمكن ان تكون مستقلة عن تخصيصات الاستثمار في قطاع الصناعة من حيث مصدر هذة التخصيصات الدخل القومي وان اي زيادة او نقصان في هذا المصدر من شأنة ان يؤدي الى زيادة او نقصان في التخصيصات لكلا القطاعين، كذالك فأن تطور القطاع الزراعي لا يتم دون الاستعانة بالمكائن والمعدات والالات الزراعية والاسمدة الكيمائية... الخ.

يتضح مما تقدم ان حالة التشابك بين القطاعين تعتبر مصدرا اساسيا لوجود الخطأ العشوائي في المعادلات وان هذا التشابك عبارة عن تأثير متبادل بين القطاعين وبالتالي سوف ينعكس ذالك على الاخطاء العشوائية للمعادلات المختلفة، مما يجعل تلك المعادلات متداخلة بشكل غير مباشر، وذلك لكون هيكل تلك المعادلات لا يدل على وجود تداخل وترابط ظاهري بينها.

جدول رقم (1) التخصيصات الاستثمارية والدخل القومي لقطاعي(الزراعة والصناعة)- مليون دينار

السنة	الدخل القومي	التخصيصات الاستثمارية	
		قطاع الزراعة	قطاع الصناعة
1970	937.5	28	28
1971	1072.6	60	50
1972	1103.4	23	28
1973	1382.5	65	60
1974	2916.5	190	225
1975	3562.2	207	448

المصدر – وزارة التخطيط – هيئة التخطيط الاقتصادي.

3- تقدير معالم دالة التخصيصات الاستثمارية باستخدام معادلات الانحدار غير المرتبطة ظاهريا.

1- في حالة توزيع المتغيرات والخطأ توزيع طبيعي .

لإيجاد تقدير معالم دالة التخصيصات الاستثمارية والتي صيغتها كالاتي :-

$$Y_{1t}=B_{01}+B_{11}X_{11t}+B_{21}X_{21t}+U_{1t}$$

$$Y_{2t}=B_{02}+B_{12}X_{12t}+B_{22}X_{22t}+U_{2t}$$

$$(t=1,2,3,4,5)$$

اي ان:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

$$=[x_{01t} \quad x_{11t} \quad x_{21t}] \;,\; B'_1=[B_{01} \quad B_{11} \quad B_{21}]X_1$$

$$=[x_{02t} \quad x_{12t} \quad x_{22t}] \;,\; B'_2=[B_{02} \quad B_{12} \quad B_{22}]X_2$$

Y_{2t},Y_{1t} تمثل التخصيصات الاستثمارية في السنة t .

X_{12t}, X_{11t} تمثل الدخل القومي في السنة t .

X_{22t}, X_{21t} تمثل التخصيصات الاستثمارية في السنة (t-1) .

U_{2t}, U_{1t} حد الخطأ العشوائي و B_{02}, B_{01} الاستثمار التلقائي (الحد الثابت) .

علما ان قيمة : $X_{01t}, X_{02t}=1$

عدد المعادلات $M=2$

عدد المعالم المقدرة لكل معادلة $[K_M=3]$ والتي تمثل عدد المتغيرات المستقلة وبضمنها الحد الثابت ،اما السلسلة الزمنية كانت لستة سنوات (1975-1970)٠

لايجاد تقدير المعالم يجب اولا تقدير معالم المعادلتين بطريقة (OLS) لكل معادلة

وبعد ايجاد التقديرات يتم ايجاد البواقي وفي ادناة نتائج ايجاد تقدير (b) بطريقة (OLS)٠

$$b'_{(OLS)}=[b_1 \quad b_2]=[b_{01} \quad b_{11} \quad b_{21} \quad b_{02} \quad b_{12} \quad b_{22}]$$

$$=[-41.871 \quad 0.088 \quad -0.353 \quad -97.958 \quad 0.093 \quad 0.938]$$

يتم توظيف البواقي الناتجة من كل معادلة للحصول على مصفوفة (S) اما صيغة البواقي تكون كالاتي :

$$e_j=(y_j-x_j b_j)$$

$$S_{jj}=\frac{e'_j e_j}{T-K} \;,\; S_{jj'}=\frac{e'_j e_{j'}}{T-K} \qquad j,j'=1,2$$

وفي ادناة نتائج تقدير المصفوفة S :-

$$S=\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 238.786 & 318.689 \\ 318.689 & 539.998 \end{bmatrix}$$

عناصر القطر تمثل تباين الاخطاء العشوائية في المعادلتين والعناصر غير القطرية تمثل التباين المشترك للمعادلتين ، اما معكوس المصفوفة (S) فتكون كالاتي :-

$$S^{-1}=\begin{bmatrix}0.0197 & -0.0116\\ -0.0116 & 0.0087\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s^{11} & s^{12}\\ s^{21} & s^{22}\end{bmatrix}$$

يتم توظيف عناصر المصفوفة (S^{-1}) لايجاد *مصفوفة* التباين والتباين المشترك للمعالم المقدرة باسلوب (SURE) حيث ان :-

$$\text{Var-Cov}(b_{sure})=(x'(S^{-1}\otimes IT)x)^{-1}$$

اي ان :-

$$\text{Var-Cov}(b_{sure})=\begin{bmatrix}s^{11}x_1'x_1 & s^{12}x_1'x_2\\ s^{21}x_2'x_1 & s^{22}x_2'x_2\end{bmatrix}^{-1}$$

بالتعويض عن المصفوفات الجزئية الواقعة ضمن المصفوفة الكلية ومن ثم ايجاد المعكوس نحصل على مصفوفة التباين والتباين المشترك للمعالم المقدرة المتمثلة بالمصفوفات الجزئية الواقعة على قطر المصفوفة الكلية للمعالم المقدرة باسلوب (SURE) للمعادلتين .

وفيما يلي نتائج ايجاد مصفوفة التباين والتباين المشترك للمعالم المقدرة :-

var-cov(b_{SURE})=

0.968	-0.131	0.875	33.85	-0.172	0.914
-0.131	0.489	-0.0017	-0.192	0.0002	-0.0018
0.875	-0.0017	0.894	1.507	-0.002	0.037
33.85	-0.192	1.507	0.807	-0.325	2.093
0.172	0.0002	-0.002	-0.325	0.738	-0.003
0.914	-0.0018	0.037	2.093	-0.003	0.321

للحصول على تقديرات المعالم باسلوب (SURE) يتم ايجاد عناصر المتجة X'(S-1 IT) y كالاتي :-

$$\begin{bmatrix}\sum_{j=1}^{2} s^{1j}x_1'y_j\\ \sum_{j=1}^{2} s^{2j}x_2'y_j\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s^{11}x_1'y_1+s^{12}x_1'y_2\\ s^{21}x_2'y_1+s^{22}x_2'y_2\end{bmatrix}$$

بعد ايجاد المتجه اعلاه يتم ضرب مصفوفة التباين والتباين المشترك للمعالم المقدرة بالمتجة نحصل بذلك على تقدير المالم باسلوب (SURE) لدالة التخصيصات الاستثمارية والتي تكون نتائجها كالاتي :-

$$b'_{(sure)}=[\ b_{01}\ b_{11}\ b_{21}\ b_{02}\ b_{12}\ b_{22}\ ]$$
$$=[1.328\quad 913.991\quad -100.948\quad 0.737\quad 3985.271\quad 306.936\ ]$$

2- في حالة توزيع المتغيرات والخطأ توزيع بواسون .

لايجـاد تقـدير معـالم دالـة التخصيصـات الاسـتثمارية يمكـن كتابـة دالـة بواسـون كلاتـي :-

$$F(y_{1i},y_{2i})=\exp(\xi-e^{x_{1i}B_1}-e^{x_{2i}B_2})\sum_{j=0}^{m}\frac{\xi^j\,(e^{x_{1i}B_1}-\xi)^{y_{1i}-j}(e^{x_{2i}B_2}-\xi)^{y_{2i}-j}}{j!(y_{1i}-j)!(y_{2i}-j)!}$$

$$(i=1,\dots,n)$$

لايجاد التقديرات يجب اولا تقدير معالم المعادلتين بطريقة (OLS) لكل معادلة وبعد ايجاد التقديرات يتم ايجاد البواقي للحصول على مصفوفة S والتي تم ايجاد نتائجها سابقا (في حالة التوزيع الطبيعي) .

يـتم توظيـف التبـاين المشـترك (S_{12}) وتقـدير المعـالم $b_{(OLS)}$ في ايجـاد تقـدير المعـالم في حالـة توزيـع بواسـون وبتعويضها في المعادلات (7) , (11) , (14) نحصل على نتائج التقدير الموضحة كالاتي :-

$$b'=[b_1 \quad b_2]=[b_{01} \quad b_{11} \quad b_{21} \quad b_{02} \quad b_{12} \quad b_{22}]$$

$$=[368.094 \quad 2318.25 \quad 3568.628 \quad -2855.349 \quad 35.766 \quad 97.855]$$

$$E(\xi)=1.7160$$

اما مصفوفة التباين والتباين المشترك للمعالم المقدرة وبالتعويض في المعادلات

(8) , (9) , (10), (12),(13),(14),(15) والتي تكون رتبتها (7*7) ومتماثلة والموضحة نتائجها كالاتي :-

$$\text{var-cov}(b)=\begin{pmatrix} 0.00584 & 5.312 & 4.884 & 6.765 & -6.218 & 1.387 & -2.973 \\ 5.312 & 0.44 & 0.096 & -5.452 & 4.650 & 0.101 & -9.041 \\ 4.884 & 0.096 & 0.0161 & -7.206 & -0.102 & 0.135 & 3.035 \\ 6.765 & -5.452 & -7.206 & 0.00783 & 6.449 & 3.018 & -1.362 \\ -6.218 & 4.650 & -0.102 & 6.449 & 1.477 & -0.394 & 2.302 \\ 1.387 & 0.101 & 0.135 & 3.018 & -0.394 & 0.0165 & -4.784 \\ -2.973 & -9.041 & 3.035 & -1.362 & 2.302 & -4.784 & 2.492 \end{pmatrix}$$

تمثل عناصر القطر الرئيس التباين للمعالم المقدرة اما العناصر غير القطرية تمثل التباين المشترك للمعالم المقدرة للمعادلتين .

اما مصفوفة التباين والتباين المشترك للمعالم المقدرة بطريقة (OLS) فهي كالاتي :-

$$\text{Var-cov}(b1)_{OLS}=\begin{bmatrix} 1.062 & -5.852 & 0.0042 \\ -5.852 & 5.990 & -8.434 \\ 0.0042 & -8.434 & 1.729 \end{bmatrix}$$

$$\text{Var-cov}(b_2)_{OLS}=\begin{bmatrix} 1.140 & -6.442 & 0.0045 \\ -6.442 & 5.765 & -6.563 \\ 0.0045 & -6.563 & 1.107 \end{bmatrix}$$

3- الاستنتاجات

ان تطبيق معادلات الانحدار الغير مرتبطة ظاهريا باستخدام في حالة توزيع المتغيرات والخطأ بواسون اعطت تقديرات اكثر كفاءة وذلك نتيجة المعلومات التي نحصل عليها من خلال الخطأ العشوائي، والتي ادت الى انخفاض في قيمة التباين حيث يشير الجدول رقم (2) الى كفاءة التقدير باستخدام (SUPREME) عن التقديرات باستخدام (OLS) اذ ان نموذج المعادلة المنفردة غير كفوءة في ايجاد تقديرات المعالم عندما تكون الاخطاء بين معادلات الظاهرة المدروسة مترابطة، وانخفاض قيمة التباين حيث يشير الجدول رقم (3) الى كفاءة التقدير (SUPREME) عن التقديرات باستخدام (SURE) في حالة توزيع المتغيرات والخطأ توزيع طبيعي .

اما قيمة تباين الخطأ العشوائي فقد كانت (2.4921) مما يدل على قوة الترابط بين القطاع الزراعي والقطاع الصناعي .

جدول رقم (2) كفاءة التقدير باستخدام (SUPREME) و(OLS).

التخصيصات الاستثمارية	المعالم	تباين المعالم: تقدير (SUPREME)	تقدير (OLS)	كفاءة التقدير
قطاع الزراعة	b_{01} b_{11} b_{21}	0.00584 0.445 0.161	1.0621 5.990 1.729	0.00549 0.0742 0.093
قطاع الصناعة	b_{02} b_{12} b_{22}	0.00 78 3 1.477 0.0165	1.1404 5.765 1.1078	0.00686 0.256 0.0148
تباين الخطأ		2.4921		

جدول رقم (3) كفاءة التقدير باستخدام (SUPREME) و(SURE).

التخصيصات الاستثمارية	المعالم	تباين المعالم: تقدير (SUPREME)	تقدير (SURE)	كفاءة التقدير
قطاع الزراعة	b_{01} b_{11} b_{21}	0.00584 0.445 0.161	0.00603 0.910 0.180	0.968 0.489 0.8944
قطاع الصناعة	b_{02} b_{12} b_{22}	0.00 78 3 1.477 0.0165	0.097 2.0003 0.0514	0.807 0.738 0.321
تباين الخطأ		2.4921		

المصادر

[1] البيرماني ، د-خزعل صالح "مباديء الاقتصاد الكلي "مطبعة الديواني، بغداد ،1987.

[2] **Srivastava,v.k.and dwivedi T.D,"Estimation of seemingly unrelated regression equations",journal of econometrics (10),No.1,1979,P.15-32 .**

[3] **King,G."Statistical models for political science event counts : bias in conventional procedures and evidence for the exponential poisson regression model " Amer.j. of pol.sci.32 ,August,1988,P.839-863.**

[4] **King,G." A Seemingly unrelated poisson regression model",Sociological methods & research ,vol.17,No.3,February,1989,P.235-255.**

[5] **Zellner ,A.,"An efficient method of estimating seemingly unrelated ergressions and test for aggregation bias",JASA,vol.57,No.297,1962,P .348-367.**