تقديــر دالـــة المخاطـــرة المختلطة

د. حسام نجم عبود
رئيس قسم علوم الحاسبات
كلية الرافدين الجامعة

ملخص

في هذا البحث تم اجراء المقارنة بين مقدرات الامكان الأعظم ومقدرات بيز بتوظيف أسلوب المحاكاة بطريقة مونت كارلو لكل من دالة المخاطرة المختلطة ودالة المعوليه وكل منهما بدلالة المعلمتين λ و P حيث انλ هي معلمة القياس و P احتمال عدم تأثر النظام بالضغوط البيئية وتم التوصل إلى أفضلية طريقة الامكان الأعظم على طريقة بيز لتقدير المعلمة P ودالة المخاطرة المختلطة ودالة المعوليه في حين كانت طريقة بيز الأفضل لتقدير معلمة القياس λ.

Abstract

In this research we estimate the mixture hazart rate function and reliability function by using the maximum likelihood method and Bayes method.

المقدمـــة

تخضع النظم الهندسية إلى ضغوط بيئية قد تؤثر (أو لا تؤثر) على رياضيا". للنظام افرض أن $P(0<P<1)$ يمثل احتمالية ان النظام القادر على معالجة هذه الضغوطات بحيث لا يتأثر نمط فشله وان $q(q=1-p)$ تمثل احتمالية الحدث المتمم . ففي مثل هذه الحالات يستخدم توزيع الفشل لوصف نمط الفشل للنظام رياضيا" . ويمكن في بعض الحالات الخاصة استخدام التوزيعات المختلطة لحل مثل تلك المشكلة. على أية حال في هذا الصدد سوف نواجه مشكلتين:

<u>المشكلة الأولى:-</u> هو وجود مسببات مادية وراء فشل النظام بصورة منفردة او مجتمعة وفي الوقت الحالي لا يمكن التمييز بين تلك المسببات والتقدير الرياضي لها لذا تزداد صعوبة الاعتماد على توزيع الفشل .

<u>اما المشكلة الثانية</u>:- فحتى لو طبق أسلوب حسن المطابقة على مشاهدات حقيقية لوقت الفشل تبقى هناك مشكلة طبيعة اللانظامية للتوزيعات الزمنية التي يختلف سلوكها تماما" عندما تكون المشاهدات قليلة بالنسبة للعينة ذات الحجم الصغير.

ومن الواضح ان أفضل ما يمكن عمله بهذا الخصوص هو البحث عن مفهوم نافع يمكن من خلاله التمييز بين توزيعات زمنية مختلفة ولعل نموذج نسبة المخاطرة تمثل مفهوم يمكن اعتماده في المعولية إذ بعد تحليل الاعتبارات المادية للنظام يمكن صياغة توليفة من دوال نسبة المخاطرة التي توفر بدورها توزيعات لوقت الفشل .

واستنادا إلى ما تقدم وبسبب الضغوطات المستمرة للنظم لنفترض ان احتمالية بقاء دالة نسبة المخاطرة للنظام دون تغيير في P وان تلك الدالة تعاني من التغيير باحتمالية $q(q=1-p)$

دالة المخاطرة المختلطة:-

افرض أن دالة المخاطرة المختلطة هي كما في المعادلة التالية :

$$h(t) = p\lambda + (1-p)\lambda t.............................(1)$$

حيث أن

P: تمثل احتمال أن النظام يمكن أن يتحمل الضغوطات و λ تمثل معلمة القياس

عندما **p=1** نحصل على دالة المخاطرة الثابتة للتوزيع الأسى

عندما **p=0** نحصل على دالة المخاطرة لتوزيع رالي أو توزيع ويبل بمعلمة شكل = **2**

توزيع وقت الفشل المختلط

باستخدام العلاقة

$$f(t) = h(t)\exp\{-\int_0^t h(t)dt\}...............................(2)$$

ودالة **h(t)** في المعادلة **1** فان توزيع وقت الفشل هو

$$f(t) = [p\lambda + (1-p)\lambda t]\exp[-\{p\lambda t + 1/2(1-p)\lambda t^2\}]........................(3)$$

حيث أن λ ، $t > 0$

ويمكن الحصول على دالة المعولية **R(t)**

$$R(t) = 1 - F(t)$$
$$= \exp[-\{p\lambda t + 1/2(1-p)\lambda t^2\}] \quad , t > 0.................(4)$$

تقدير المعالم ودالة المعولية ودالة المخاطرة

سوف يتم استخدام كل من طريقة الإمكان الأعظم وطريقة بيز للتقدير وكما يلي :

1- طريقة الإمكان الأعظم MLE:-

افرض أن $t_1,t_2,t_3,......t_n$ هي عينة عشوائية من أوقات الفشل التي دالة الفشل لها هي الدالـة رقم (3)فان دالة الإمكان لها هو :

$$L(t_1,t_2,t_3,.......,t_n/\lambda,p) = \lambda^n[\prod_{i=1}^{n}\{p+(1-p)t_i\}]\exp[-\lambda\sum_{i=1}^{n}\{pt_i + \tfrac{1}{2}(1-p)t_i^2\}].........(5)$$

وبأخذ اللوغاريتم إلى المعادلة (5) نحصل على

$$\ln l = n\ln\lambda + \sum_{i=1}^{n}[\ln\{p+(1-p)t_i\}] - \lambda\sum_{i=1}^{n}\{pt_i + \tfrac{1}{2}(1-p)t_i^2\}............(6)$$

الحالة الأولى:- عندما **p** معلومة ولتقدير المعلمة λ نأخذ المشتقة الجزئية إلي **lnL** بالنسبة إلى λ ونساويها بالصفر نحصل على مقدر الامكان الاعظم للمعلمه λ

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}[pt_i + \tfrac{1}{2}(1-p)t_i^2]}..................(7)$$

وباستخدام خاصية الثبات لمقدر الإمكان الأعظم نحصل على تقدير الإمكان الأعظم لكل من دالـة المعوليـة **R(t)** ودالة المخاطرة **h(t)** وكما يلي :

$$\hat{R}_1(t_i) = \exp[-\hat{\lambda}\{pt_i + \tfrac{1}{2}(1-p)t_i^2\}] \quad \ldots\ldots(8)$$

$$\hat{h}_1^{2}(t_i) = p\,\hat{\lambda} + (1-p)\,\hat{\lambda}\,t_i \quad \ldots\ldots(9)$$

<u>الحالـة الثانيـة</u> :- عنـدما λ **معلومـة ولتقدير p نأخذ المشتقة الجزئيـة الى Log L بالنسبة الـى المعلمـة p ومساواتها بالصفر نحصل على**

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\hat{p}+\frac{t_i}{1-t_i}}\right] - \frac{\lambda}{2}\sum_{i=1}^{n} t_i(2-t_i) = 0 \quad \ldots\ldots(10)$$

وبسبب ارتفـاع درجـة غيـر الخطيـة فـي المعادلـة رقـم (10) يمكـن اسـتخدام احـدى الطـرق العدديـة فـي التقـدير (طريقة نيوتن رافسون) لتقدير المعلمة p

$$\hat{p} = p_0 - \frac{g(p_0)}{g'(p_0)} \quad \ldots\ldots(11)$$

حيث ان

$g(p_0)$ **هي الدالة رقم (10) بتعويض قيمة أولية إلى** p **في المعادلة .** $g'(p_0)$ **هي مشتقة الدالـة** $g(p_0)$ **ونستمر بتطبيق المعادلة (11) الى ان يتم الحصول على تقدير** $\hat{p}$ **بحيث ان الفرق يكون اقل مـا يمكن . وباستخدام خاصية الثبات لمقدر الإمكـان الاعظـم نحصل علـى مقدري كل مـن دالـة المعوليـة R(t) ودالة المخاطرة h(t)**

$$\hat{R}_2(t_i) = \exp[-\lambda\{\hat{p}\,t_i + \tfrac{1}{2}(1-\hat{p})t_i^2\}] \quad \ldots\ldots(12)$$

$$\hat{h}_2^{2}(t_i) = \hat{p} + (1-\hat{p})t_i \quad \ldots\ldots(13)$$

2- تقدير بيز

افرض أن التوزيع الأولى للمعلمة λ **هو توزيع كاما بالمعلمتين α , β**

$$g_1(\lambda) = \frac{\alpha^{\beta}}{\Gamma\beta}\lambda^{\beta-1}e^{-\alpha\lambda} \qquad \alpha,\beta,\lambda > 0 \quad \ldots\ldots(14)$$

وان التوزيع الأولى للمعلمة p هي توزيع بيتا بالمعلمتين a,b

$$g_2(p) = \frac{1}{\beta(a,b)}p^{a-1}(1-p)^{b-1} \qquad \mathrm{a,b} > 0\,,\, 0 < \mathrm{p} < 1 \quad \ldots\ldots(15)$$

<u>الحالة الأولى</u>:- عندما p معلومة ولتقدير المعلمة λ يمكن صياغة دالة الإمكان في المعادلة (5) كما يلي:

$$L(t_1,t_2,t_3,.......,t_n/\lambda,p)=\lambda^n T_1 e^{-\lambda T_2}........................(16)$$

حيث أن

$$T_1=\underset{i=1}{\overset{n}{\pi}}\{p+(1-p)t_i\}$$

$$T_2=\sum_{i-1}^{n}\{pt_i+\tfrac{1}{2}(1-p)t_i^2\}$$

وباستخدام التوزيع الاولي الى λ (14) ودالة الامكان في (16) يمكن الحصول على دالـة الكثافـة الاحتماليـة الاحقه للمعلمه λ الاتيه :

$$\pi(\lambda/t_1,t_2,t_3,................,t_n,p)=\frac{L(t_1,t_2,t_3,................,t_n/\lambda,p)g_1(\lambda)}{\int_0^\infty L(t_1,t_2,t_3,................,t_n/\lambda,p)g_1(\lambda)}$$

$$=\frac{(\alpha+\mathrm{T}_2)^{n+\beta}}{\Gamma(n+\beta)}\lambda^{n+\beta-1}e^{-\lambda(\alpha+T_2)}..................................(17)$$

وباستخدام دالة الخسارة التربيعية فان تقدير بيز الى λ وليكن λ^* هو

$$\lambda^*=E(\lambda/t_1,t_2,t_3,.......,t_n,p)=\int_0^\infty \lambda\pi_1(\lambda/t_1,t_2,........,t_n,p)d\lambda$$

$$\lambda^*=\frac{n+\beta}{\alpha+T_2}............................(18)$$

ومقدر بيز لدالة المعولية R(t) وليكن $R^*_1(t)$ هو

$$R_1^*(t)=E[R(t)/(t_1,t_2,t_3,.........,t_n,p)]=\int_0^\infty R(t)\Pi_1(\lambda/t_1,t_2,t_3,.........,t_n,p)d\lambda$$

$$=\frac{1}{(1+\frac{\mathrm{T}_3}{\alpha+\mathrm{T}_2})^{n+\beta}}........................(19)$$

حيث ان $\mathrm{T}_3=pt_i+(1-p)t_i^2/2$

وتقدير بيز الى دالة المخاطرة $h_1(t)$ وليكن $h_1^*(t)$ هو

$$h_1^*(t)=E[h(t)/(t_1,t_2,..........,t_n,p)]=\int_0^\infty h(t)\pi_1(\lambda/t_1,.................,t_n,p)\,d\lambda$$

$$=\frac{\mathrm{n}+\beta[\mathrm{p}+(1\text{-}\mathrm{p})\mathrm{t_i}]}{\alpha+T_2}...........................(20)$$

<u>الحالة الثانية</u>:- عندما λ معلومة ولتقدير المعلمة p يمكن صياغة دالة الامكان (5) كما يلي

$$L(t_1,t_2,.........,t_n/\lambda,p)=\lambda^n\sum_{i=1}^{n}p^{n-i}(1-p)k_i(x)e^{-\lambda/2(pT_4+T_5)}.......................................(21)$$

حيث ان

$$k_i(x)=\sum_{1\subseteq i\cdot\subseteq.......\subseteq ij\subseteq n}t_{i1}t_{i2}........t_{ij}$$

$$T_4=(2\sum_{i=1}^{n}t_i-\sum_{i=1}^{n}t_i^2)$$

$$T_5=\sum_{i=1}^{n}t_i^2$$

وافرض ان التوزيع الاولي الى p هو توزيع بيتا بالمعلمتين a,b

$$g_2(p)=\frac{1}{\beta(a,b)}p^{a-1}(1-p)^{b-1},a,b>0\ ,\ \mathrm{o}<\mathrm{p}<1.................................(22)$$

وباستخدام دالة التوزيع الاولية (22) ودالة التوزيع المشتركة (21) يمكن الحصول على دالة التوزيع اللاحقة لـ (p)

$$\pi_2(p/t_1,t_2,.........,t_n/\lambda)=\frac{L(t_1,t_2,.........,t_n/\lambda,p)g_2(p)}{\int_0^1 L(t_1,t_2,.........,t_n/\lambda,p)g_2(p)dp}$$

$$=\frac{\sum_{\mathrm{r=0}}^{\infty}\sum_{\mathrm{t-1}}^{n}(\frac{-\lambda T_4}{2})\frac{1}{r!}p^{n+r+a-i-1}(1-p)^{b+i-1}k_i(x)}{\sum_{\mathrm{r=0}}^{\infty}\sum_{\mathrm{t-1}}^{n}(\frac{-\lambda T_4}{2})\frac{1}{r!}\beta(n+r+a-i,b+i)k_i(x)}.........(23)$$

لذلك فان تقدير بيز للمعلمة p ولتكن $\mathbf{p^*}$ هي

$$p^*=\mathrm{E}(p/t_1,t_2,.........,t_n/\lambda)=\int_0^1 p\pi_2(p/t_1,t_2,.........,t_n/\lambda)dp$$

$$p^*=\frac{\sum_{\mathrm{r=0}}^{\infty}\sum_{\mathrm{t-1}}^{n}(\frac{-\lambda T_4}{2})\frac{1}{r!}\beta(n+r+a-i+1,b+i)k_i(x)}{\sum_{\mathrm{r=0}}^{\infty}\sum_{\mathrm{t-1}}^{n}(\frac{-\lambda T_4}{2})\frac{1}{r!}\beta(n+r+a-i,b+i)k_i(x)}.............................(24)$$

وتقدير بيز الى دالة المعولية $R(t)$ ولتكن R_2^* هي

$$R_2^*(t) = E[R(t)/t_1, t_2, ..., t_n/\lambda]$$

$$= \frac{e^{-\lambda t^2/2}\int_0^1 \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{-\lambda T_4}{2}\right)^r \frac{1}{r!}\left[\frac{-\lambda t(2-t)}{2}\right]^k * \frac{1}{k!}\beta(n+r+a+k-i, b+i)k_i(x)}{\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{t-1}^{n}\left(\frac{-\lambda T_4}{2}\right)\frac{1}{r!}\beta(n+r+a-i+1, b+i)k_i(x)} \quad ....(25)$$

وتقدير دالة المخاطرة $h(t)$ وليكن $h_2^*(t)$ هو

$$h_2^*(t) = E[h(t)/\ t_1, t_2, ..., t_n/\lambda]$$

$$h_2^*(t) = \lambda(1-t)p^* + \lambda t ....(26)$$

حيث ان p^* موجود في المعادلة (24)

الجانب التجريبي:- باستخدام اسلوب المحاكاة بطريقة مونت كارلو تم توليد بيانات تتبع التوزيع المختلط في المعادلة (3) باستخدام عينات مختلفة $n=10,20,50,100$ وقيم افتراضيه للمعلات p,λ وهي

$\lambda = 0.2, 0.5$ $\quad$ $p = 0, 0.5, 1$

ومن خلال استخدام العينات التي تم توليدها قمنا بتقدير المعالم p,λ بكل من طريقة الامكان الاعظم وطريقة بيز وتم مقارنة الطريقتين باستخدام مقياس المقارنة متوسط مربعات الخطأ MSE للقيم التقديرية وفقاً" للصيغة التالية

$$MSE(\hat{\theta}) = \frac{\sum_{i=1}^{r}(\hat{\theta} - \theta)}{r}$$

حيث ان r يمثل عدد مرات التكرار ولتكن r=1000

^θ تمثل مقدر المعلمة او الدالة حسب الطريقة المستخدمة في التقدير

نتائج المحاكاة

باستخدام البرنامج الذي كتب من قبل الباحث بلغة Qbasic تم الحصول على النتائج المعروضة في الجداول التالية

جدول رقم (1)

يبين متوسط مربعات الخطأ MSE لتقدير المعلمة λ

حجم العينة n	λ	P	MLE	Bayes	Best
10	0.1 1 2	0.5	0.156746 0.201002 0.100092	0.132382 0.121121 0.100100	Bayes Bayes MLE
20	0.1 1 2	0.5	0.442356 0.468994 0.501942	0.462712 0.441441 0.400400	MLE Bayes Bayes
50	0.1 1 2	0.5	0.266861 0.279950 0.250251	0.265491 0.260360 0.250250	Bayes Bayes Bayes
100	0.1 1 2	0.5	0.054321 0.022092 0.024489	0.045641 0.035701 0.0101011	Bayes MLE Bayes

نلاحظ من الجدول اعلاه ان طريقة بيز في تقدير المعلمة λ أفضل من طريقة الامكان الاعظم في التقدير ولكافة حجوم العينة كما ونلاحظ ان متوسط مربعات الخطا لتقدير المعلمة λ يبدأ بالتقارب للطريقتين كلما كبر حجم العينة .

جدول رقم (2)

يبين متوسط مربعات الخطأ MSE لتقدير المعلمة P

حجم العينة n	P	λ	MLE	Bayes	Best
10	0.5 0.2 0.7	2	0.745320 0.702421 0.694315	0.774512 0.7011210 0.6654321	MLE Bayes Bayes
20	0.5 0.2 0.7	2	0.546821 0.552145 0.503210	0.556741 0.640121 0.511621	MLE MLE MLE
50	0.5 0.2 0.7	2	0.301202 0.311402 0.299452	0.300210 0.328120 0.300010	Bayes MLE MLE
100	0.5 0.2 0.7	2	0.202010 0.112358 0.187510	0.224560 0.197812 0.143149	MLE MLE Bayes

نلاحظ من الجدول اعلاه ان طريقة الامكان الاعظم افضل من طريقة بيز في تقدير المعلمـة P ولكافة حجوم العينة . كما ونلاحظ اقتراب قيمة متوسط مربعات الخطأ للطريقتين يتقارب كلما كبر حجم العينة

جدول رقم (3)

يبين متوسط مربعات الخطأ MSE لتقدير دالة المعولية R(t)

حجم العينة n	λ	P	MLE	Bayes	Best
10	0.1 1 2	0.5	0.227891 0.2011101 0.234510	0.204506 0.203108 0.255585	Bayes MLE MLE
20	0.1 1 2	0.5	0.233781 0.300451 0.211121	0.243708 0.203176 0.222852	MLE Bayes MLE
50	0.1 1 2	0.5	0.274321 0.243156 0.154346	0.285612 0.205958 0.191499	MLE Bayes MLE
100	0.1 1 2	0.5	0.297810 0.197851 0.181105	0.312323 0.208627 0.181056	MLE MLE MLE

نلاحظ من الجدول اعلاه ان طريقة الامكان الاعظم افضل من طريقة بيز في تقدير دالـة المعوليـة . كمـا ونلاحظ ان متوسط مربعات الخطأ للطريقتين تتقارب كلما كبر حجم العينة .

جدول رقم (4)

يبين متوسط مربعات الخطأ MSE لتقدير دالة المخاطرة h(t)

حجم العينة n	λ	P	MLE	Bayes	Best
10	0.1 1 2	0.5	0.678911 0.637511 0.644721	0.532453 0.786802 0.434448	Bayes MLE Bayes
20	0.1 1 2	0.5	0.135671 0.0.011352 0.12342	0.188540 0.033744 0.099281	MLE MLE Bayes
50	0.1 1 2	0.5	0.697801 0.236678 0.200810	0.793147 0.249562 0.113998	MLE MLE Bayes
100	0.1 1 2	0.5	0.233781 0.11025 0.457087	0.277551 0.104833 0.604472	MLE Bayes MLE

نلاحظ من الجدول اعلاه ان طريقة الامكان الاعظم في تقدير دالـة المخـاطرة افضل من طريقـة بيز . نلاحظ تقارب قيم متوسط مربعات الخطأ MSE من بعضها البعض للطريقتين بزيادة حجم العينه.

الاستنتاجات

1- ان طريقة بيز افضل من طريقة الامكان الاعظم لتقدير معلمة القياس λ.
2- ان طريقة الامكان الاعظم افضل من طريقة بيز لتقدير المعلمة P ودالة المعولية ودالة المخاطرة .
3- ان قيم متوسط مربعات الخطأ ولكافة المقدرات تتقارب بزيادة حجم العينة .

المصادر

1- البياتي، حسام نجم، (2002)،"مقارنـة بين طرائق تقدير انموذج ويبل للفشل باستخدام المحاكاة" اطروحة دكتوراه، كلية الادارة والاقتصاد– جامعة بغداد

2- K.K.sharma , Hare Krishna & Bhupendra Singh (1997) "Bayes estimation of the mixture of hazard – rate model "Reliability Engineering & system safety, vol.55 No.1.