ايجاد توزيع ويبل المختلط

Finding Mixture Weibull Distribution

أ. م. د . علي عبد الحسين الوكيل
جامعة بغداد- كلية الادارة والاقتصاد
قسم الاحصاء

الخلاصة

في هذا البحث تم التعرف الى فكرة جديدة وهي ايجاد توزيع جديد من توزيعات سابقة باستخدام معلمات الخلط (mixing parameters)؛ w_i وان $0 < w_i < 1$ كذلك فان $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ وبذلك نستطيع ان نحصل على عدة توزيعات مختلطة وبعدد مختلف من المعلمات. وفي هذا البحث طرحت فكرة توزيع ويبل المختلط الناتج من توزيعي ويبل؛ التوزيع الاول يحتوي على معلمتين وهما معلمة القياس $\alpha_1 > 0$ ومعلمة الشكل $\beta_1 > 0$ والتوزيع الثاني يحتوي ايضا على معلمة القياس $\alpha_2 > 0$ ومعلمة الشكل $\beta_2 > 0$ اضافة الى معلمة الموضع $\gamma > 0$. وقد تم خلط هذين التوزيعين بمعلمة جديدة هي معلمة الخلط w والتي تمثل نسبة مساهمة كل توزيع من هذين التوزيعين في تكوين التوزيع المختلط الجديد وقد تم اخذ عدة قيم مختلفة لمعلمة الخلط وتم ايجاد الدوال الاحتمالية كافة لتوزيع ويبل المختلط . وقد تم تطبيق هذه الدوال باستخدام مجموعة من البيانات الحقيقية وتم رسم هذه الدوال وكانت نتائج التحليل ظاهرة بعدة جداول توضح فكرة استخدام ويبل المختلط.

Abstract

In this paper a new idea was introduced which is finding a new distribution from other distributions using mixing parameters; w_i where $0 < w_i < 1$ and $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$. Therefore we can get many mixture distributions with a number of parameters. In this paper I introduced the idea of a mixture Weibull distribution which is produced from mixing two Weibull distributions; the first with two parameters, the scale parameter $\alpha_1 > 0$, and the shape parameter, $\beta_1 > 0$ and the second also has the scale parameter $\alpha_2 > 0$, and the shape parameter, $\beta_2 > 0$ in addition to the location parameter, $\gamma > 0$. These two distributions were mixed using a new parameter which is the mixing parameter w which represents the proportion of contribution of each of the component distributions in the new mixture distribution. Different values for the mixing parameter were considered and the probability functions of the mixture Weibull distribution were found. An application of these functions was added using real data and the functions were graphed. The results of the analysis were tabulated in a number of tables that clearly illustrate the idea of the uses of mixture Weibull distribution.

المقدمة

يعتبر توزيع ويبل من التوزيعات الاحتمالية المهمة في المعولية لما له من تأثير كبير في اعطاء نتائج دقيقة لدى استخدامه. وتبحث الدراسات الحديثة الآن في ايجاد توزيعات مختلطة ناتجة من دمج توزيعات سابقة للحصول على توزيعات جديدة لها فائدة في التطبيقات العلمية وبذلك نتجت توزيعات مختلطة منها المتقطعة والمستمرة.
بالنسبة لهذا البحث فسوف اتطرق الى فكرة حديثة وهي كيفية ايجاد توزيع ويبل المختلط الناتج من دمج عدد من توزيعات ويبل كل توزيع يحتوي على عدد من المعلمات وبذلك سوف ينتج توزيع جديد يحتوي على عدد اكبر من المعلمات وله خاصية المرونة في العمل الإحصائي.

الهدف

يهدف البحث االى استخراج توزيع ويبل المختلط الذي يحتوي على عدد من المعلمات حيث يتم استخراج دوال توزيع ويبل المختلط كدالة التوزيع التجميعية ودالة البقاء او المعولية ودالة الخطر باستخدام معلمة مستحدثة هي معلمة الخلط (Mixing Parameter) تمثل نسبة المساهمة لكل من التوزيعات المشتركة في تكوين توزيع ويبل المختلط.

توزيع ويبل Weibull Distribution

من المعلوم لدينا ان توزيع ويبل قد يحتوي على معلمتين او ثلاثة معلمات، وهذه المعلمات هي معلمة الشكل (Shape Parameter) ومعلمة القياس (Scale Parameter) وقد تكون هناك معلمة ثالثة وهي معلمة الموضع (Location or Threshold Parameter)، ولذلك فان دالة توزيع ويبل ذو المعلميتن تكون كما يلي؛

$$f(x)=\frac{\beta x^{\beta-1}}{\alpha^{\beta}}e^{-\left[\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right]} \qquad 0\le x\le\infty \qquad (1)$$

حيث ان معلمة الشكل هي $\beta>0$ ومعلمة القياس هي $\alpha>0$

وكذلك فان دالة توزيع ويبل ذو الثلاث معلمات هي كما يلي

$$f(x)=\frac{\beta(x-\gamma)^{\beta-1}}{\alpha^{\beta}}e^{-\left[\left(\frac{(x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}\right]} \qquad \gamma<x\le\infty \qquad (2)$$

حيث ان معلمة الشكل هي $\beta>0$ ومعلمة القياس هي $\alpha>0$ ومعلمة الموضع هي $\gamma\ge 0$
ويمكن استخدام توزيع ويبل ذو المعلمتين وذو الثلاث معلمات لايجاد توزيع جديد هو توزيع ويبل المختلط والذي تأخذ دالته اشكال مختلفة

توزيع ويبل المختلط Mixture Weibull Distribution

لايجاد توزيع ويبل المختلط لابد من وجود معلمة او معلمات جديدة لربط التوزيعات مع بعضها وهذه المعلمات هي معلمات الخلط (mixing parameters)؛ w_i وان $0 < w_i < 1$ كذلك فان $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$.

ان عدد معلمات الخلط يعادل عدد المركبات او التوزيعات المستخدمة مطروحاً منه واحد وذلك لغرض تحديد نسبة مساهمة كل مركبة او توزيع في التوزيع المختلط سواء كانت هذه التوزيعات من نفس النوع او من انواع مختلفة.
وبصورة عامة فان دالة الكثافة الاحتمالية **Probability Density Function** للتوزيع المختلط سوف تكون بالشكل التالي

$$f(x) = w_1 f_1(x) + w_2 f_2(x) + \ldots + w_n f_n(x) \quad (3)$$

حيث ان $f(x)$ تمثل دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع المختلط ، و $w_i;\ i=1,\ldots,n$ هي معلمة الخلط، و$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ هي دوال الكثافة الاحتمالية للتوزيعات المساهمة في التوزيع المختلط.

كذلك فان دالة التوزيع التجميعية **Cumulative Distribution Function** للتوزيع المختلط هي كما يلي

$$F(x) = w_1 F_1(x) + w_2 F_2(x) + \ldots + w_n F_n(x) \quad (4)$$

حيث ان $F(x)$ تمثل دالة التوزيع التجميعية للتوزيع المختلط ، و$F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x)$ هي دوال التوزيع التجمعية للتوزيعات المساهمة في التوزيع المختلط.

ودالة البقاء او المعولية **Survival or Function or Reliability** للتوزيع المختلط ستكون كما يلي

$$R(x) = w_1 R_1(x) + w_2 R_2(x) + \ldots + w_n R_n(x) \quad (5)$$

حيث ان $R(x)$ تمثل دالة البقاء للتوزيع المختلط ، و$R_1(x), R_2(x), \ldots, R_n(x)$ هي دوال البقاء للتوزيعات المساهمة في التوزيع المختلط.

ودالة الخطر او معدل الفشل **Hazard Function or Failure Rate** للتوزيع المختلط ستكون كما يلي

$$h(x) = w_1 h_1(x) + w_2 h_2(x) + \ldots + w_n h_n(x) \quad (6)$$

حيث ان $h(x)$ تمثل دالة البقاء للتوزيع المختلط ، و$h_1(x), h_2(x), \ldots, h_n(x)$ هي دوال الخطر للتوزيعات المساهمة في التوزيع المختلط.

وسنركز في هذا البحث على حالة خلط توزيعي ويبل احدهما ذو معلمتين والثاني ذو ثلاث معلمات وذلك باستخدام معلمة الخلط (w) والتي تمثل نسبة مساهمة كل مركبة (توزيع) في توزيع ويبل المختلط، وسوف تعطى قيم مختلفة لمعلمة الخلط يتم من خلالها احتساب دوال توزيع ويبل المختلط.

وان دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع المختلط لهذه الحالة هي؛

$$f(x) = w f_1(x) + (1-w) f_2(x) \quad (7)$$

حيث ان$f_1(x)$ تمثل دالة توزيع ويبل ذو المعلمتين، و $f_2(x)$ تمثل دالة توزيع ويبل ذو الثلاث معلمات و w تمثل معلمة الخلط.

ومن المعادلتين (1) و (2) نحصل على دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ويبل المختلط؛

$$f(x)=w\left[\frac{\beta_1 x^{\beta_1-1}}{\alpha_1^{\beta_1}}e^{-\left[\left(\frac{x}{\alpha_1}\right)^{\beta_1}\right]}\right]+(1-w)\left[\frac{\beta_2(x-\gamma)^{\beta_2-1}}{\alpha_2^{\beta_2}}e^{-\left[\left(\frac{(x-\gamma}{\alpha_2}\right)^{\beta_2}\right]}\right] \qquad \textbf{(8)}$$

وبنفس الطريقة، فان دالة التوزيع التجميعية للتوزيع المختلط هي؛

$$F(x)=wF_1(x)+(1-w)F_2(x) \qquad \textbf{(9)}$$

وبما ان دالة التوزيع التجميعية لتوزيع ويبل ذو المعلمتين هي

$$F_1(x)=1-e^{-\left[\left(\frac{x}{\alpha_1}^{\beta_1}\right)\right]} \qquad \textbf{(10)}$$

وان دالة التوزيع التجميعية لتوزيع ويبل ذو الثلاث معلمات هي

$$F_2(x)=1-e^{-\left[\left(\frac{(x-\gamma)^{\beta_2}}{\alpha_2}\right)\right]} \qquad \textbf{(11)}$$

لذا فان دالة التوزيع التجميعية لتوزيع ويبل المختلط ستكون كما يلي؛

$$F(x)=w\left[1-e^{-\left[\left(\frac{x}{\alpha_1}^{\beta_1}\right)\right]}\right]+(1-w)\left[1-e^{-\left[\left(\frac{(x-\gamma)^{\beta_2}}{\alpha_2}\right)\right]}\right] \qquad \textbf{(12)}$$

كذلك فان دالة البقاء للتوزيع المختلط هي

$$R(x)=wR_1(x)+(1-w)R_2(x) \qquad \textbf{(13)}$$

وبما ان

$$R(x)=1-F(x)$$

فان دالة البقاء لتوزيع ويبل ذو المعلمتين هي

$$R_1(x)=e^{-\left[\left(\frac{x}{\alpha_1}^{\beta_1}\right)\right]} \qquad \textbf{(14)}$$

وان دالة البقاء لتوزيع ويبل ذو الثلاث معلمات هي

$$R_2(x) = e^{-\left[\left(\frac{(x-\gamma)^{\beta_2}}{\alpha_2}\right)\right]} \qquad \textbf{(15)}$$

لذلك فان دالة البقاء لتوزيع ويبل المختلط ستكون كما يلي

$$R(x) = w\left[e^{-\left[\left(\frac{x^{\beta_1}}{\alpha_1}\right)\right]}\right] + (1-w)\left[e^{-\left[\left(\frac{(x-\gamma)^{\beta_2}}{\alpha_2}\right)\right]}\right] \qquad \textbf{(16)}$$

كما ان دالة الخطر للتوزيع المختلط هي

$$h(x) = wh_1(x) + (1-w)h_2(x) \qquad \textbf{(17)}$$

وبما ان دالة الخطر لتوزيع ويبل ذو المعلمتين هي

$$\textbf{(18)}\ h_1(x) = \frac{\beta_1 x^{\beta_1 - 1}}{\alpha_1{}^{\beta_1}}$$

وان دالة الخطر لتوزيع ويبل ذو الثلاث معلمات هي

$$\textbf{(19)}\ h_2(x) = \frac{\beta_2 (x-\gamma)^{\beta_2 - 1}}{\alpha_2{}^{\beta_2}}$$

لذا فان دالة الخطر لتوزيع ويبل المختلط ستكون كما يلي

$$h(x) = w\left[\frac{\beta_1 x^{\beta - 1_1}}{\alpha_1{}^{\beta_1}}\right] + (1-w)\left[\frac{\beta_2 (x-\gamma)^{\beta_2 - 1}}{\alpha_2{}^{\beta_2}}\right] \qquad \textbf{(20)}$$

تطبيق على توزيع ويبل المختلط

تم استخدام بيانات خاصة من **Murthy** لعدد من المشاهدات التي تمثل اوقات الفشل لـ **20** من الوحدات حيث احتسبت دوال توزيعي ويبل ذو المعلمتين وذو الثلاث معلمات بتطبيق المعادلات **(1)** ، **(2)**، **(10)**، **(11)**، **(14)**، **(15)**، **(18)**، **(19)** وكانت النتائج كما مبينة في الجدول **1.** ثم تم احتساب دوال توزيع ويبل المختلط بأخذ قيم لمعلمة الربط w تساوي **0.25**، **0.50** و **0.75.** وتم الحصول على النتائج المبينة في الجداول **2** و **3** و **4** وذلك باستخدام المعادلات **(8)**، **(12)**، **(16)** ، **(20)**

جدول 1 – دوال توزيعي ويبل ذو المعملتين وذو الثلاث معلمات المساهمة في توزيع ويبل المختلط ، عندما $\alpha_1 = 5$ ، $\beta_1 = 3$ ، $\alpha_2 = 6$ ، $\beta_2 = 2$ ، $\gamma = 1$

i	xi	f1(x)	f2(x)	F1(X)	F2(X)	R1(x)	R2(x)	h1(x)	h2(x)
1	0.072	0.0001	0.0000	0.0000	0.0236	1.0000	0.9764	0.0001	0.0000
2	0.477	0.0055	0.0000	0.0009	0.0076	0.9991	0.9924	0.0055	0.0000
3	1.592	0.0589	0.0326	0.0318	0.0097	0.9682	0.9903	0.0608	0.0329
4	2.475	0.1302	0.0771	0.1142	0.0586	0.8858	0.9414	0.1470	0.0819
5	3.597	0.2140	0.1196	0.3109	0.1708	0.6891	0.8292	0.3105	0.1443
6	4.763	0.2294	0.1411	0.5787	0.3252	0.4213	0.6748	0.5445	0.2091
7	5.284	0.2059	0.1429	0.6928	0.3994	0.3072	0.6006	0.6701	0.2380
8	7.709	0.0365	0.1068	0.9744	0.7136	0.0256	0.2864	1.4263	0.3727
9	7.867	0.0302	0.1029	0.9797	0.7301	0.0203	0.2699	1.4854	0.3815
10	8.661	0.0100	0.0834	0.9945	0.8041	0.0055	0.1959	1.8003	0.4256
11	8.663	0.0099	0.0833	0.9945	0.8043	0.0055	0.1957	1.8011	0.4257
12	9.511	0.0022	0.0632	0.9990	0.8663	0.0010	0.1337	2.1710	0.4728
13	10.636	0.0002	0.0406	0.9999	0.9242	0.0001	0.0758	2.7150	0.5353
14	10.729	0.0001	0.0390	0.9999	0.9279	0.0001	0.0721	2.7627	0.5405
15	11.501	0.0000	0.0273	1.0000	0.9533	0.0000	0.0467	3.1746	0.5834
16	12.089	0.0000	0.0202	1.0000	0.9671	0.0000	0.0329	3.5075	0.6161
17	13.036	0.0000	0.0120	1.0000	0.9821	0.0000	0.0179	4.0785	0.6687
18	13.949	0.0000	0.0068	1.0000	0.9905	0.0000	0.0095	4.6698	0.7194
19	16.169	0.0000	0.0014	1.0000	0.9983	0.0000	0.0017	6.2745	0.8427
20	19.809	0.0000	0.0001	1.0000	0.9999	0.0000	0.0001	9.4175	1.0449

جدول 2 – دوال توزيع ويبل المختلط باستخدام معلمة الخلط 0.25=*w*
وعندما $\alpha_1 = 5$ ، $\beta_1 = 3$ ، $\alpha_2 = 6$ ، $\beta_2 = 2$ ، $\gamma = 1$

i	xi	f(x)	F(x)	R(x)	h(x)
1	0.072	0.0000	0.0177	0.9823	0.0000
2	0.477	0.0014	0.0059	0.9941	0.0014
3	1.592	0.0392	0.0152	0.9848	0.0398
4	2.475	0.0904	0.0725	0.9275	0.0975
5	3.597	0.1432	0.2058	0.7942	0.1803
6	4.763	0.1631	0.3886	0.6114	0.2668
7	5.284	0.1587	0.4727	0.5273	0.3009
8	7.709	0.0892	0.7788	0.2212	0.4032
9	7.867	0.0848	0.7925	0.2075	0.4086
10	8.661	0.0650	0.8517	0.1483	0.4384
11	8.663	0.0650	0.8518	0.1482	0.4385
12	9.511	0.0480	0.8995	0.1005	0.4772
13	10.636	0.0305	0.9431	0.0569	0.5360
14	10.729	0.0293	0.9459	0.0541	0.5410
15	11.501	0.0205	0.9649	0.0351	0.5835
16	12.089	0.0152	0.9754	0.0246	0.6161
17	13.036	0.0090	0.9866	0.0134	0.6687
18	13.949	0.0051	0.9929	0.0071	0.7194
19	16.169	0.0011	0.9987	0.0013	0.8427
20	19.809	0.0000	1.0000	0.0000	1.0449

جدول 3 – دوال توزيع ويبل المختلط باستخدام معلمة الخلط w=0.50

وعندما $\alpha_1 = 5$ ، $\beta_1 = 3$ ، $\alpha_2 = 6$ ، $\beta_2 = 2$ ، $\gamma = 1$

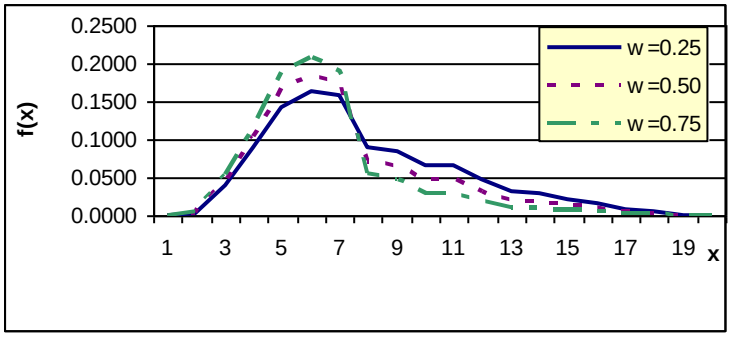
i	xi	f(x)	F(x)	R(x)	h(x)
1	0.072	0.0001	0.0118	0.9882	0.0001
2	0.477	0.0027	0.0042	0.9958	0.0027
3	1.592	0.0457	0.0207	0.9793	0.0467
4	2.475	0.1037	0.0864	0.9136	0.1135
5	3.597	0.1668	0.2409	0.7591	0.2197
6	4.763	0.1852	0.4520	0.5480	0.3380
7	5.284	0.1744	0.5461	0.4539	0.3842
8	7.709	0.0716	0.8440	0.1560	0.4592
9	7.867	0.0666	0.8549	0.1451	0.4589
10	8.661	0.0467	0.8993	0.1007	0.4634
11	8.663	0.0466	0.8994	0.1006	0.4634
12	9.511	0.0327	0.9326	0.0674	0.4858
13	10.636	0.0204	0.9621	0.0379	0.5372
14	10.729	0.0196	0.9639	0.0361	0.5421
15	11.501	0.0136	0.9766	0.0234	0.5837
16	12.089	0.0101	0.9836	0.0164	0.6161
17	13.036	0.0060	0.9911	0.0089	0.6687
18	13.949	0.0034	0.9953	0.0047	0.7194
19	16.169	0.0007	0.9992	0.0008	0.8427
20	19.809	0.0000	1.0000	0.0000	1.0449

جدول 4 – دوال توزيع ويبل المختلط باستخدام معلمة الخلط w=0.75

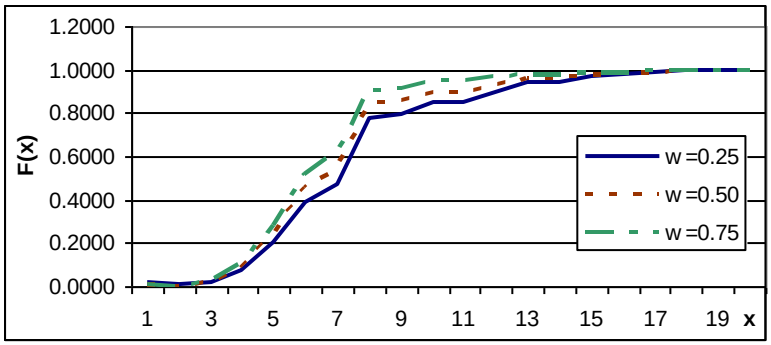
وعندما $\alpha_1 = 5$ ، $\beta_1 = 3$ ، $\alpha_2 = 6$ ، $\beta_2 = 2$ ، $\gamma = 1$

i	xi	f(x)	F(x)	R(x)	h(x)
1	0.072	0.0001	0.0059	0.9941	0.0001
2	0.477	0.0041	0.0025	0.9975	0.0041
3	1.592	0.0523	0.0262	0.9738	0.0537
4	2.475	0.1170	0.1003	0.8997	0.1300
5	3.597	0.1904	0.2759	0.7241	0.2629
6	4.763	0.2073	0.5153	0.4847	0.4277
7	5.284	0.1901	0.6194	0.3806	0.4996
8	7.709	0.0541	0.9092	0.0908	0.5955
9	7.867	0.0484	0.9173	0.0827	0.5851
10	8.661	0.0283	0.9469	0.0531	0.5330
11	8.663	0.0283	0.9469	0.0531	0.5329
12	9.511	0.0175	0.9658	0.0342	0.5110
13	10.636	0.0103	0.9810	0.0190	0.5410
14	10.729	0.0099	0.9819	0.0181	0.5452
15	11.501	0.0068	0.9883	0.0117	0.5843
16	12.089	0.0051	0.9918	0.0082	0.6162
17	13.036	0.0030	0.9955	0.0045	0.6687
18	13.949	0.0017	0.9976	0.0024	0.7194
19	16.169	0.0004	0.9996	0.0004	0.8427
20	19.809	0.0000	1.0000	0.0000	1.0449

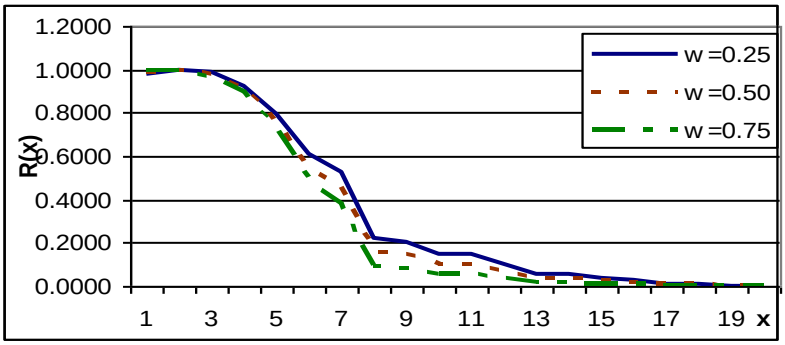
شكل – 1 دوال الكثافة الاحتمالية لتوزيع ويبل المختلط
بقيم لمعلمة الخلط ؛ w=0.25 ، w=0.50 ، w=0.75



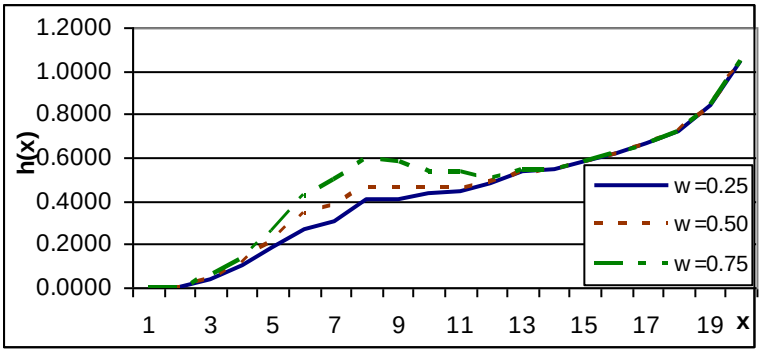
شكل – 2 دوال التوزيع التجميعية لتوزيع ويبل المختلط
بقيم لمعلمة الخلط ؛ w=0.25 ، w=0.50 ، w=0.75



شكل – 3 دوال البقاء (المعولية) لتوزيع ويبل المختلط
بقيم لمعلمة الخلط ؛ w=0.25 ، w=0.50 ، w=0.75



شكل – 4 دوال الخطر (معدل الفشل) لتوزيع ويبل المختلط
بقيم لمعلمة الخلط ؛ w=0.25 ، w=0.50 ، w=0.75



النتائج

من خلال البيانات التي استخدمت في البحث ظهر لنا توزيع ويبل المختلط وبعدة قيم مختلفة لمعلمة الخلط وكانت كافة الدوال الاحتمالية لتوزيع ويبل المختلط اكثر مرونة عندما كانت قيمة معلمة الخلط $w=0.5$ وقد تكون تظهر حالات اخرى عند استخدام قيم لخرى لمعلمة الخلط حيث من الممكن استخراج عدة توزيعات ويبل المختلطة وبقيم مختلفة لمعلمات الخلط . وقد ظهر في هذه البحث وجود ستة معلمات لتوزيع ويبل المختلط ولذلك فقد تظهر حالات اخرى يحتوي فيها توزيع ويبل على خمسة معلمات او اكثر حسب عدد التوزيعات المساهمة وعدد المعلمات الموجودة في كل توزيع في تكوين توزيع ويبل المختلط. وهذا يعني ظهور نتائج اخرى غير هذه النتائج التي ذكرت في متن هذا البحث. ولذلك فان الباحث يستطيع ان يستخرج توزيعات مختلطة اخرى اضافة الى توزيع ويبل المختلط وبعدد من المعلمات يختلف عن الذي استخرج في هذا البحث.

المصادر

1.Ahmad Mahir Razali and Ali A. Salih Al-Wakil (2007). Evaluating the Bi-Weibull Distribution Function with a Number of Parameters. Proceedings of ICMS07, Universiti Kebangsaan Malaysia, pp 805-810.
2.Boerrigter D.G. (1998). Parameter Estimation of the Mixed Generalized Gamma Distribution using Maximum Likelihood Estimation and Minimum Distance Estimation, MSc Thesis, School of Engineering, AFIT, Air University, USA
3.Boe s, D.C. (1966), On the Estimation of Mixing Distributions, Ann. Math. Statist, 37: 177-188
4.Evirette B. S. and Hand D. J. (1981). Finite Mixture Distributions, Chapman and Hall Ltd. London.
5.Jiang, R and Murthy D (1997), Comments on a General Linear-Regression Analysis Applied to the 3-parameter Weibull Distribution, IEEE Transaction on Reliability, 46, 389-393
6.Marshall A. W. and Olkin I. (2007). Life Distributions, Springer Series in Statistics
7. Mendenhall W. and Hader R.J. (1958). Estimation of Parameters of Mixed Exponentially Distributed Failure Time Distributions from Censored Life Tested Data, Biometrika, 45: 504-520
8. Murthy, D. N., Xie, M. and Jiang, R. (2004). Weibull Models, Wiley Series in Probability and Statistics. New York.
9.Tsokos C. P. (1972). Probability Distribution: An Introduction to Probability Theory with Applications. Wadsworth Publishing. USA.