امثلة على تقديرات الامكان الاعظم غير الوحيدة

أ. سليم اسماعيل الغرابي
جامعة بغداد– كلية الادارة والاقتصاد
قسم الاحصاء

1. المقدمة

افرض ان (X1, X2, ... , Xn) هي عينة عشوائية من توزيع لـه دالـة احتماليـة الكثافـة $f(x,\theta)$. المثال المعتاد في مثل هكذا تقدير للامكـان الاعظم (MLE) $\hat{\theta}$ θL_1 هو ليس وحيد باخذ $f(x,\theta)$ ليكون كثافة منتظمة عليه، مثل $(\theta-\frac{1}{2},\theta+\frac{1}{2})$.

انظر [Bicked and Doksum (1977, P111)] او [Hogg and Craig (1978, P(207)] بالاضـافة الى احضار بعض الامور غير الطبيعية. هذا المثال وصف ذلك من الممكن له MLE'S في فترة معينة.

في هذا المبحث تكون فئة كبيرة من الامثلـة $f(x,\theta)$ والتي تكون مع احتمالية موجبة. الـ MLE بنيت على مثال بحجم 2 هو غير وحيد في طريقة اساسية، ذلك ان الاختبارات ممكنـة لـ $\hat{\theta}$ ليست في الفترة. الكثافات $f(x,\theta)$ لبعض معنى طبيعي ذلك يمكن اختبارها ان تكون احادية لاجل ان (MLE) مبنيه على ملاحظة مفردة هي دائماً وحيدة. الكثافة الكوشية مع معلمة محاية هي هكذا امثال. المناقشة يمكن ان تكون متقطعة لتوضيح غير وحيدة اساسية لـ MLE لاجل امثلة بحجوم اختبارية وان مناقشة مسالة بناء كفوء لتقديرات عدم وحدانية MLE'S. [انظر Lehmann 1980].

2. عدم وحدانية الـ MLE لاجل فئة في الكثافات

The Nonuiqueness of the MLE for Class of Densities.

افرض ان g هي دالة احتمالية الكثافة معرفة على R تحقق الشروط الثلاثة التالية:

1. g هي دالة مستمرة ومتماثلة حول نقطة الاصل 0 وهي موجبة بجميع القيم.
2. g هي مستمرة وقابلة للاشتقاق مرتين لجميع القيم عدا ربما عند 0 .
3. اذا كتبنا $h=\log g$ فان $h''(y)\succ 0$ لبعض قيم y التي لا تساوي صفر.

ا لحالة مع هكذا كثافة يمكن ان تكون مركبة هي سوف تناقش اخيراً في نهاية هذا المبحث.

افرض ان (x_1,x_2) هو متغير عشوائي من توزيع له دالة احتماليـة الكثافـة $f(x,\theta)=g(x-\theta)$ حيث ان $x\in R$ وان $\theta\in R$.

افـرض ان x_1,x_2 همـا قـيم مشـاهده لــ X_1,X_2 علـى التـوالي، نكتـب $\overline{X}=(X_1+X_2)/2$ وان $\Delta=(X_1-X_2)/2$ دالة الامكان الاعظم هي تعطى بالشكل:

$$L(\theta/X)=g(X_1-\theta)\,g(X_2-\theta)$$

$$=g(\overline{X}+\Delta-\theta)\,g(\overline{X}-\Delta-\theta)$$

فرضية 1 ترينا انه لكل $K\geq 0$:

$$L(\overline{X}+K/X)=L(\overline{X}-K/X)=g(\Delta+K)\,g(\Delta-K).....(1)$$

هكذا $L(\hat{0}/X)$ هي متماثلة حول $\overline{X}$.

اذاً اما $\hat{\theta}=\overline{X}$ او ان θ ليست وحيدة حسب الفرضية 2 ، 3 ، يوجد (a,b) بحيث انـه لكل y(a,b)، يوجد $\delta\succ 0$ بحيث ان

$$h(y+\delta)-h(y)\succ h(y)-h(y-\delta)$$

$$or\ \ g(y+\delta)\,g(y-\delta)\succ\left|g(y)\right|^2\ \ .....(2)$$

افرض ان x_1,x_2 هي بحيث ان $\Delta\in(a,b)$. فان (2) ، (1) ترينا بانه يوجد $\delta\succ 0$ بحيث ان

$$L(\overline{X} \pm \delta / X) = g(\Delta+\delta)\, g(\Delta-\delta) \succ |g(\Delta)|^2 \setminus = L(\overline{X} / X)$$

اذاً ليست وحيدة $\hat{\theta} \neq \overline{X}$, $\hat{\theta}$is not uique

وان الاختبار المحتمل لـ $\hat{\theta}$ ليس في الفترة الاحتمالية ذلك ان $\hat{\theta}$ هي ليست وحيدة هي على الاقل اكبر في الاحتمالية $|X_1 - X_2|/2$ تعود الى (a,b). الاحتمالية الاخيرة هي موجبة بسبب ان g هي موجبة لكل القيم.

الان نرى انه يوجد اعداد كبيرة لكثافات g تحقق الشروط المطلوبه الشروط 1 ، 2 هي سهلة التقابل. افرض ان معاكس L' 3 ، $h''(y) \leq 0$ لكل قيم y التي لا تساوي صفر. فانه من السهل ان نرى ان $g(x)$ نتيجة الى الصفر عند التغير الاسي عندما $X \to \mp\infty$ ، وان g لها دالة مولدة العزم. في التطبيق g يجب ان يكون لها عزم محدود لكل الترتيبات اذا كان $h''(y) \leq 0$ لكل القيم وهكذا اذا كانت g تحقق 1 ، 2 ولها عزم غير محدد لبعض الرتبة، فان g سوف تحقق 3 اوتوماتيكياً.

انه من الواضح اننا نستطيع اختبار g لان تكون احادية مع منوال وحيد. وهكذا لعينة ذات حجم 1. الـ MLE يكون وحيد. الكثافات g التي تحقق

$$g^2(y) \geq g(y+\delta)\, g(y-\delta) \quad ....(3)$$

لكل $\delta \in R, y \in R$ تسمى لوغارتم المقعر.

اذاً g هي لوغارتم المقعر، فان $f(x,\theta) = g(X-\theta)$ هي (a Polya Frequency Function) من نوع 2 [انظر Lehmann , (1959,P.115].

اذا دققنا في المتباينة المتحققة في (3) عندما $\delta \neq 0$ من السهولة يمكن ان الـ MLE لـ θ هو وحيد لاجل عينات من اي حجم. وهكذا هدفنا الذي اتم حول عدم وحدانية الـ $\hat{\theta}$ هو ضروري لكون $\log g$ يجب ان يكون محدب بشكل دقيق على بعض الفترة.

3. الامثلة Examples

في هذا المبحث نحضر مثالين مخصصين توضيح نتيجة المبحث 2 نفرض $h = \log g$ ، $f(x,\theta) = g(X-\theta)$ ، $\hat{\theta}$ هي المقدر MLE لـ θ مبنية على عينة ذات حجم 2. القيمتين الملاحظتين x_1, x_2 هما مكتوبة بالشكل $\overline{X} \pm \Delta$.

مثال (1)

افرض ان

$$g(y) = \left[\Pi(1+y^{2)}\right]^{-1}$$

فأن

$$h'''(y) = 2(y^2-1) / \left[(1+y^2)^2\right]$$

اذا $h''(y) \succ 0$

عندما $|y| \succ 1$. فانه يتبع ان $\hat{\theta}$ هي غير وحيدة طالما يكون $|X_1 - X_2| \succ 2$

هذه يمكن ايضاً ان تحقق مباشرة كما يأتي:
بما ان
$$h'(y) = -2y(1+y^2)^{-1}$$
تملك
$$\frac{1}{2}\frac{\partial \log L}{\partial \theta} = \frac{(\bar{X}+\Delta-\theta)}{\left[1+(\bar{X}+\Delta-\theta)^2\right]} + \frac{(\bar{X}-\Delta-\theta)}{\left[1+(\bar{X}+\Delta-\theta)^2\right]}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \log L}{\partial \theta} = \frac{2(\bar{X}-\theta)\left[(\bar{X}-\theta)^2-\Delta^2+1\right]}{\left[1+(\bar{X}+\Delta-\theta)^2\right]\left[1+(\bar{X}-\Delta-\theta)^2\right]}$$
افرض ان $|\Delta| \succ 1$ فان معادلة الامكان يكون لها ثلاثة جذور هي:

$\theta = \bar{X}$, $\theta = \bar{X} \pm (\Delta^2-1)^{\frac{1}{2}}$، اكثر من ذلك عندما θ تزداد من $-\infty$ الى ∞ ، المشتقة السابقة هي على التعاقب موجبة، سالبة، موجبة، سالبة، انه يتبع ذلك ان
$$\hat{\theta} = \bar{X} \pm (\Delta^2-1)^2$$
كلما كانت $|\Delta| \succ 1$

بالطبع فان $\hat{\theta} = \bar{X} \quad if\,|\Delta| \le 1$

هذه مسألة صحيحة

[انظر (1977) 23 (b) on page 114 of Bicked and Doksum]

<u>مثال (1)</u>

هذا المثال يرينا ان $\hat{\theta}$ يمكن ان تكون غير وحيدة مع احتمالية **1**

افرض ان $g(y) = c(1+|y|)^{-\alpha}$

حيث ان $\alpha \succ 1$ هي معرفه ثابتة وان **c** يمكن جعلها ثابتة فان
$$h''(y) = \alpha(1+|y|)^{-2} \succ 0 \ , \ \forall\, y \neq 0$$
ينتج من ذلك ان **MLE** هي وحيدة فقط اذا كانت $\Delta = 0$ بما ان الحادث $x_1 = x_2$ له احتمالية**0** ، الـ **MLE** هو غير وحيد مع احتمالية **1.**

4. غير الوحدانية لـ MLE لعينات ذات احجام اختيارية

Nonuniqueness of the MLE for samples of Arbitrarysize

في المبحث 2، الحقيقة ان x_1, x_2 يقعان متماثلين مع $\bar{X}$ التي تستخدم بطريقة اساسية. لأجل هذه النتيجة يوجد بعض الصعوبة في توسيع هذه النتيجة، لذلك المبحث لعينات ذات حجوم احتيارية المناقشة يمكن ان تكون غير صحيحة. على اي حال لإثبات ان عدم وحدانية الـ **MLE** لعينات لاي حجم ≤ 2 .

هذا التوسيع هو مخطط في هذا المبحث

افرض ان **I** تمثل مجموعة كل الاعداد الصحيحة، افرض ان $\left[g(i) \ , \ ie\, I\right]$ هو توزيع على **I** بحيث ان
$$(a) \quad q(i) \succ 0 \ \ and \ \ q(i) = q(-i) \ for\, all\, i \in I \ ;$$
(b) **g** هي احادية مع منوال وحيد عند **0** وان

(c) اذا كانت $\eta = q(1)/q(0)$ فانه لبعض $N \ge 2$ يكون
$$\eta\, q(N+1)\, q(N-1) \succ |q(N)|^2 \qquad .....(4)$$

لكي نرى الشرط c يكون متحقق، ضع $q(1)=\eta q(0)$, $q(2)=q(3)=\xi \eta q(0)$ حيث ان $1 \succ \eta \succ \xi \succ 0$ فان (4) تحقق لـ $N=2$ نلاحظ انه في رؤية الشرط (b) المتباينة (4) لا تحقق لـ $N=0$ او $N=1$

افرض ان $X_1, X_2, ..., X_n$ هي مشاهدات مستقلة بحيث ان $P_\theta (X_j = i) = q(i-\theta)$ لكل $\theta \in I$, $i \in I$, $j=1,2,....,n$

افرض ان x_j هي قيمة مشاهدة لـ X_j. الشرط (b) يرينا ان MLE لـ θ هو وحيد ويساوي X_1 عندما $n=1$.

الآن افرض ان $n \geq 2$ ، افرض ان n هي عدد فردي وان $n=2m+1$ مع $m \geq 1$. افرض ان

$$X_j = a \ , \ X_{m+j} = a + 2N$$

لكل $j=1,2,...,m$ وان $X_{2m} = a+N$ وان

$$X_{2m+} = a+N$$

فأن $L(\theta / X) = \left[q(a-\theta)\, q(a+2N-\theta)\right]^m . q(a+N-\theta)$

اذاً لاجل $K \in I$

$$L(a+N+K / X) = \left[q(N+K)\, q(N-K)\right]^m . q(K)$$

وهكذا L هي متماثلة حد a + N اكثر من ذلك نرى الشروط $\eta \prec 1$ ، (4) لنحصل على

$$\begin{aligned} L(a+N \pm 1 / X) &= \left[q(N+1)\, q(N-1)\right]^m . q(1) \\ &= \left[q(N+1)\, q(N-1)\right]^m . \eta\, q(0) \\ &\geq \left[q(N+1)\, q(N-1)\right]^m . \eta^m\, q(0) \\ &\succ \left[q(N)\right]^{2m} . q(0) = L(a+N / X) \end{aligned}$$

وهكذا فان $\hat{\theta} \neq a+N$ ، الـ MLE هو ليس وحيد، وامكانية اختيار $\hat{\theta}$ لا تكون فترة متقطعة. نلاحظ ان الحادث

$$X_1 = X_2 = ... = X_m = a$$

$$X_{2m+1} = a+N \, , X_{m+1} = ... = X_{2m} = a+2N$$

لها احتمالية موجبة. حساب حالة $n=2m$ هي متشابه وهنا تكون كافية وان يكون لها شكل ضعيف لـ (4) حيث ان العامل η هو غائب في جهة اليسار.

Reference

1. Bickel Peter J. and Doksum, Kjell A. (1977) "Mathematical Statistical " san Framcisco, Holden – Day.

2. Hogg, Robert V., and Craig Alan T. (1978) " Introduction to Mathematical Statistical " (4 th ed.) New York Macmillan.

3. Hogg Robert V., and Tanis, Elliot A. (1983) " Probability and Statistical Inference " (2 sd ed.) Macmillan Co. New York.

4. Lehmann, E. L. (1959) " Testing Statistical Hypotheses " New York, Jone Wiley.

5. Lehmann, E. L. (1980) "Efficient Likelihood Estimators " The American Statisticion, 34, 233 – 235.

6. Mood, Alexander M. (1987) " Introduction to the Theory of Statistical " (3 rd ed.) Megraw Hill International Editions.