

Comparison of classical method and optimization methods for estimating parameters in nonlinear ordinary differential equation
مقارنة بين الطريقة الكلاسيكية وطرائق الامثلية لتقدير المعلمات في نماذج المعادلات التفاضلية العادية اللاخطية

أ.م.د. عماد حازم عبودي / جامعة بغداد / كلية الإدارة والاقتصاد
م.م. وفاء جعفر حسين / جامعة واسط / كلية الإدارة والاقتصاد

24
19

OPEN ACCESS

P - ISSN 2518 - 5764
E - ISSN 2227 - 703X

Received:14/8/2018

Accepted:1/10/2018

المخلص :

يهتم هذا البحث على تقدير المعالم الثابتة والمتغيرة زمنيا في نماذج المعادلات التفاضلية العادية اللاخطية والتي لا تمتلك صيغ حلول تحليلية، حيث تم التقدير بطريقة مكونة من عدة مراحل حيث يتم تقدير المعلمات الثابتة والمتغيرة زمنيا بطريقة مباشرة متسلسلة من عدة مراحل يتم في المرحلة الأولى تحويل نموذج المعادلات التفاضلية الى نموذج انحدار يتضمن متغيرات الحالة مع مشتقاتها وبعدها تقدير متغيرات الحالة ومشتقاتها بطريقة الشرائح الجزائية وتعويض المقدرات في نموذج الانحدار وفي المرحلة الثانية تم استعمال طريقة المربعات الصغرى الزائفة لتقدير المعالم الثابتة اما في المرحلة الثالثة يتم تقدير ما تبقى من معالم ثابتة والمعالم المتغيرة زمنيا وذلك بوضعها بنموذج انحدار شبه معلمي ومن ثم مقارنة هذه الطريقة مع طريقة الامثلية التي تعتمد خوارزمية التطور التفاضلي لتقدير المعلمات المجهولة ولقد تمت المقارنة باستعمال المحاكاة وبينت النتائج تفوق الطريقة المستندة على خوارزمية التطور التفاضلي حيث أعطت افضل المقدرات.

المصطلحات الرئيسية للبحث / المعادلات التفاضلية العادية اللاخطية ، الشريحة الجزائية، الانحدار اللامعلمي ، الانحدار شبه المعلمي ، خوارزمية التطور التفاضلي .



1- المقدمة Introduction

تستعمل النماذج الرياضية وبصورة خاصة نماذج المعادلات التفاضلية لوصف العمليات الديناميكية في جميع نواحي العلوم المختلفة . ويتم نمذجة هذه العمليات بحيث تحتوي نماذج المعادلات التفاضلية القدر الأكبر من سلوك العملية الديناميكية قيد النمذجة وتختلف هذه النماذج من عملية الى أخرى وذلك بحسب طبيعة العملية التي تكون قيد النمذجة او الدراسة وم ا يميز هذه النماذج انها تحتوي على معلمات مجهولة وتتميز هذه المعلمات كونها اما تكون ثابتة مع مرور الزمن او قد تكون قيمتها متغيرة وذلك تبعاً للمشكلة قيد الدراسة . وعادة ما تحسب هذه المعلمات بالاعتماد على قيم ابتدائية أولية ، حيث يتم اعتمادها من الدراسات السابقة او بالاستناد على الخبرة او قد تحسب من ادبيات الموضوع ومع ذلك ان هنالك معلمات مجهولة نحتاج الى تقديرها من البيانات المشاهدة . وتكمن المشكلة في هذه الدراسات هي بتقدير هذه المعالم المجهولة وذلك بسبب المجال العالي لهذه المعلمات وكذلك بسبب الكلفة الحسابية العالية^[9] وفي حالة توفر الحل التحليلي

لنماذج المعادلات التفاضلية يمكن استعمال نماذج الانحدار اللاخطي **Nonlinear Regression Models** في حالة كون النماذج تحتوي على معلمات ثابتة فقط و وعندما تكون النماذج تحتوي على معلمات متغيرة مع الزمن فتستعمل نماذج انحدار المعاملات المتغيرة زمنياً **Time Varying Coefficient Regression Models**^[14] وكما هو معلوم ان معظم هذه النماذج من المعادلات لا تمتلك صيغ حلول تحليلية لذا يتم اللجوء الى الحل العددي و طرائق الامثلية للحصول على هذه المقدرات والتي يمكن تصنيفها الى طرائق الامثلية العالمية **Global Optmazation** وطرائق الامثلية المحلية **Local Optmazation** ولكن يعاب على هذه الطرائق التكلفة الحسابية العالية التي تكون ثمن الاستقرار فيها ومن جانب اخر طرائق الامثلية المحلية مثل البرمجة التربيعية المتسلسلة **Sequential Quadratic Programming (SQP)** وكاوس نيوتن **Gauss-Newton** وغيرها حيث تكون فعالة حسابياً لكنها تميل او تقترب من نقطة النهاية الدنيا المحلية (**local minima**) بدلا من نقطة نهاية عالمية (**Global minimum**). لهذا يتم اللجوء الى طرائق الامثلية التي تكون هجينة بين النوعين من طرائق الامثلية وذلك للحصول على مقدرات المربعات الصغرى اللاخطية. في هذا البحث يتم استعمال طريقتين لتقدير المعلمات في نماذج المعادلات التفاضلية اللاخطية (**Nonlinear Ordinary Differential Equations Models(ODE)** وهما الطريقة المباشرة (**DM**) **Direct method** يتم فيها تقدير المعلمات الثابتة والمتغيرة الزمن بثلاث مراحل حيث تستمد العلاقات المباشرة بين المعلمات المجهولة ومتغيرات القياس و مشتقاتها ومن ثم توظف طريقة لامعلمية لتقدير متغيرات القياس ومشتقاتها في هذا البحث تم توظيف الطريقة اللامعلمية الشريحة الجزائية **Penalized spline** ثم يتم استبدال متغيرات القياس ومشتقاتها الممهدة في نموذج الانحدار وذلك لتقدير المعلمات الثابتة المجهولة في النموذج حيث ان هذه الطريقة تتجنب الحل العددي وتكون فعالة حسابياً . اما الطريقة الثانية المستعملة هي طريقة المربعات الصغرى المعاملة بالشرائح طريقة والمربعات الصغرى اللاخطية المعززة بالشرائح **The Spline- Enhanced Nonlinear Least Squares (SNLS)** حيث ان هذه الطريقة تستعمل الطريقة اللامعلمية أساس الشريحة **Basis Spline (B-Spline)** لتقريب المعلمات المتغيرة الوقت حيث يصبح نموذج المعادلات التفاضلية يحتوي على معلمات ثابتة فقط . هذه الطريقة تحتاج الى طريقة عددية تكرارية لحل نموذج **ODE** اللاخطي وباستعمال طرق الامثلية لمشكلة الابعاد العالية في مجال المعلمات المجهولة بطريقة المربعات الصغرى اللاخطية . ولقد تمت المقارنة بين هذه الطرائق باستعمال معيار المقارنة معدل الخطاء النسبي **(ARE) Average Relative Error** وذلك للحصول على افضل النتائج وبدقة عالية.

1-1 مشكلة البحث

في كثير من الأحيان تحدد دالة الانحدار من نماذج المعادلات التفاضلية العادية اللاخطية وهي في الغالب تشتمل على معلمات ثابتة ومتغيرة زمنياً حسب طبيعة المشكلة قيد البحث وفي الغالب تكون هذه المعلمات مجهولة، تصبح معها عملية تقدير المعلمات في هذه النماذج من المشاكل الأساسية والهامة وبما يتفق مع السلوك الأساسي للمشكلة قيد البحث ومع البيانات المتاحة والتي غالباً ما تقاس مع الأخطاء العشوائية ، إذ في اغلب الأحيان لا تمتلك هذه النماذج صيغ حلول تحليلية مما يؤدي الى اللجوء الى الحل العددي المتكرر للمعادلات التفاضلية والذي بدوره يؤدي الى الكلفة الحسابية العالية في تقدير المعلمات المجهولة والتي تعاني من مشكلة الابعاد في مجالها.



مقارنة بين الطريقة الكلاسيكية وطرائق الامثلية لتقدير المعلمات في نماذج المعادلات التفاضلية العادية الخطية

2-1 هدف البحث

يهدف البحث الى مقارنة الطريقة الكلاسيكية التي تستند على التمهيد اللامعلمي لتقدير متغير الحالة ومشتقاته والتي تحسن الكفاءة والاستقرارية في طرائق الامثلية حيث يمكن اعتمادها كقيم أولية لهذه الطرائق لتقدير المعلمات الثابتة والمتغيرة زمنيا في نماذج المعادلات التفاضلية العادية اللاخطية *Ordinary Non Linear Differential Equation* والتي لا تمتلك صيغ حلول تحليلية مع الطريقة التي تستعمل خوارزميات الامثلية التي تعالج مشكلة الأبعاد في مجال المعلمة والتي تلائم النماذج المتنوعة من أنظمة المعادلات التفاضلية العادية اللاخطية .

2- التقدير اللامعلمي لمتغيرات الحالة ومشتقاتها في نماذج المعادلات التفاضلية اللاخطية بشكل عام يمكن التعبير عن نماذج (ODE) اللاخطية والتي تمتلك معالم ثابتة ومعالم متغيرة مع الزمن:

$$\frac{d x(t)}{dt} = f\{t, x(t), \beta, \eta(t)\} \quad \forall t \in [t_0, T]$$
$$x(t_0) = x_0 \quad \dots \dots \dots (1)$$

ويمكن التعبير عن نماذج (ODE) اللاخطية والتي تمتلك معالم ثابتة مع الزمن بالمعادلة

$$\frac{d x(t)}{dt} = f(t, x(t), \beta), \quad t \in [t_0, T] \quad \dots \dots \dots (2)$$
$$x(t_0) = x_0$$

حيث ان :

$x(t)$: وهو متجه متغيرات الحالة (state variables) بالبعد w

$$x(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_w(t)\}^T$$

β : موجه المعالم الثابتة المجهولة بالبعد r

$\eta(t)$: موجه المعالم المتغيرة زمنيا (في النموذج الذي سيتم الاعتماد عليه في هذا البحث ستكون لدينا معلمة واحدة متغيرة الزمن).

$f(\cdot)$: موجه الدوال التفاضلية التي تكون صيغها معلومه والتي تكون خطية او لا خطية

$$f(\cdot) = [f_1(\cdot), f_2(\cdot), \dots, f_w(\cdot)]^T$$

$x(t, \beta)$ القيمة الابتدائية (ويفترض ان تكون معلومه في هذا البحث وحيث ان $x(t_0) = x_0$

(1) على التوالي وللسهولة سوف نرمز (تعبير عن الحل الصحيح لكل من المعادلتين (2) و $x(t, \beta, \eta(t))$ مستمرة وقابلة للاشتقاق بالنسبة الى f وهو ما يعبر عنه بمتغير الحالة . وبصورة عامة الدالة $x(t)$ للحل $x(t)$ ومتغير الحالة $x(t)$ وموجهات المعالمات. [13:pp2:3]

. في الواقع $x(t)$ لا يمكن قياسها بدقة ومباشرة بدلا من ذلك يمكن قياس البديل $y(t)$ حيث نفترض نموذج خطأ قياس إضافي لوضع العلاقة بين $x(t)$ والبديل $y(t)$ الذي يستند عليه تقدير المعالم المجهولة في النموذج

$$y(t_i) = x(t_i) + \varepsilon(t_i) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \dots \dots \dots (3)$$

حيث أخطاء القياس $\varepsilon(t_1), \varepsilon(t_2), \dots, \varepsilon(t_n)$ مستقلة بمتوسط يساوي صفر ومصنوفة تباين وتباين مشترك

و لتقدير الانموذج ضمن اطار وجود خطأ بالقياس في نماذج الانحدار بسبب ان النموذج (3) يفترض ان متغير الحالة State variable يقاس مع التشويش (الضوضاء) فيكون بالامكان استعمال طرق التمهيد اللامعلمية لتقدير $x(t_i)$ ومشتقاتها $x^{(1)}(t_i)$. نفترض بأن $\hat{x}(t_i)$ هي مقدر $x(t_i)$ و $\hat{x}^{(1)}(t_i)$ هي مقدر $x^{(1)}(t_i)$. [6:p:1:2]

في هذا البحث سيتم تقدير متغيرات الحالة ومشتقاتها في نموذج المعادلات التفاضلية الخطية بطريقة التمهيد اللامعلمية جزاء الشريحة (penalized splines (p splines) لكون هذه الطريقة المنحنيات لديها ميزة التسوية بين الانحدار Regression وتمهيد الشرائح Smoothing Splines كما تمتلك القدرة على تركيب أنواع مختلفة من المنحنيات كذلك لكفاءتها الحاسوبية مقارنة بغيرها من طرق التمهيد حيث يتم في هذه الطريقة استخدام شرائح (B Spline) مع عقد تكون بمسافات متساوية وعادة ما يكون عددها اقل من عدد البيانات [2:pp529]

سوف نوظف هذه الطريقة في التمهيد لتقدير متغيرات الحالة في نماذج المعادلات التفاضلية حيث نقدر $x(t)$ وكالاتي :

حيث ان نموذج المعادلات التفاضلية الذي سيتم اعتماده في هذا البحث هو انموذج الدينامية الفايروسية للأمراض الفيروسية المعدية [13:pp5][7:pp:641] :

$$\frac{dU(t)}{dt} = \lambda - \rho U(t) - \eta(t)U(t)V(t) \dots \dots \dots (4)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \eta(t)U(t)V(t) - \delta I(t) \dots \dots \dots (5)$$

$$\frac{dV(t)}{dt} = \delta NI(t) - cV(t) \dots \dots \dots (6)$$

الخلايا المستهدفة U تنتج بمعدل λ وتموت بمعدل ρ وحيث ان الخلايا المصابة I تنتج من الخلايا غير المصابة والفايروسات الحرة بمعدل $\eta(t)$ وتموت بمعدل δ والفايروسات تنتج من الخلايا المصابة بمعدل N وتخفض بمعدل c . ونتيجة لذلك يتكون النموذج من ثلاث معادلات تفاضلية تصف التغير في عدد الخلايا U والخلايا المصابة I والحمل الفايروسي V المعالم $(\rho, \lambda, \delta, c, N, \eta(t))$ هي المعالم المجهولة المراد تقديرها [7:pp461]

نقوم بتقريب متغير الحالة $U(t), I(t), V(t)$ بالزمن t بواسطة شرائح B spline حيث تتكون هذه الشرائح من قطع متعددة الحدود توصل بنقاط تسمى بالعقد knots ولقد وضع De Boor [3:pp90] صيغة تكرارية تم احتساب الشرائح فيها لاي درجة بمسافات غير متساوية بعد ان عرف الشريحة من الدرجة صفر ويكون تقريب متغير الحالة كالاتي :

$$U(t) \approx \sum_{j=-u}^s \pi_j \Phi_{j,u+1}(t) = \Phi_{u+1}^T(t) \pi \dots \dots \dots (7)$$

حيث:

$$\pi = (\pi_{-u}, \dots, \pi_s)$$

$\Phi_{u+1}(t) = \{\Phi_{-u,u+1}(t), \dots, \Phi_{s,u+1}(t)\}^T$ هو موجه دوال اساس B spline للدرجة u والرتبة $u+1$ بمجال $1 \times (s+u+1)$ وبمتسلسلة من العقد في $[t_0, T]$ [14].

$$t_0 < t_1 < \dots < t_s < t_{s+1} = t_{s+2} = \dots = t_{s+u+1} = T$$

$$t_0 = t_{-u} = t_{-u+1} = \dots = t_{-1} =$$

نعرف مصفوفة الشرائح بالبعد $n \times (s+u+1)$ كالاتي

$$z = [\Phi_{u+1}(t_1), \dots, \Phi_{u+1}(t_n)]^T$$

$$Y = \{Y(t_1), Y(t_2), \dots, Y(t_n)\}^T$$

$$D = \int_{t_0}^T \Phi_{u+1}^{(2)}(t) [\Phi_{u+1}^{(2)}(t)]^T dt$$

(تكامل مربع المشتقة الثانية لدوال الأساس) [9: pp5]

فان مقدر الشريحة الجزائية $\bar{U}(t)$ لمتغير الحالة $U(t)$ يمكن الحصول عليه بتصغير دالة الهدف الاتية :

$$L(U) = (Y - Z\pi)^T (Y - Z\pi) + \lambda \pi^T D_q \pi \dots \dots \dots (8)$$



مقارنة بين الطريقة الكلاسيكية وطرائق الامثلية لتقدير المعلمات في نماذج المعادلات التفاضلية العادية الخطية

حيث λ هي معلمة التمهيد التي تمثل مقياس حسن المطابقة Goodness-of-fit أي نسبة التغيير بين خطأ البواقي والاختلاف الموضوعي وسيتم اختيارها بطريقة التقاطع الشرعي المعمم Generalized cross validation method عندها يمكن الحصول على مقدر الشريحة الجزائية لمتغير الحالة وفق الصيغة الآتية:

$$\bar{U}(t) = [\Phi_{u+1}]^T (Z^T Z + \lambda D_q)^{-1} Z^T Y$$

كذلك يمكن الحصول على مقدرات مشتقات متغير الحالة $\bar{U}^{(i)}(t)$ وكالاتي [9:pp5]

$$\frac{\partial i}{\partial t^i} \bar{U}(t) = [\Phi_{u+1}^{(i)}(t)]^T (Z^T Z + \lambda D_q)^{-1} Z^T Y \quad i = 1, 2 \dots \dots (9)$$

وبنفس الطريقة نجد مقدرات متغيرات الحالة $I(t), V(t)$ ومقدرات مشتقاتها .

3- طرائق تقدير المعلمات المجهولة في نماذج المعادلات التفاضلية اللاخطية

Methods of estimation of unknown parameters in nonlinear ordinary differential equations models

عند تقدير المعلمات المجهولة في نماذج المعادلات التفاضلية بصورة عامة يجب التحقق من كون معلمات النموذج مشخصة وهي خاصية تتعلق بتفرد الحل للمعلمات المجهولة . [1:pp55]

ويمكن تمييز نوعين من التشخيص الأول هو التشخيص الرياضي (Mathematical) وهذا النوع من التشخيص يتمثل بتشخيص المعلمات في نماذج ODE اللاخطية تحت افتراض عدم وجود خطأ في القياس . اما النوع الثاني من التشخيص هو التشخيص الاحصائي (Statistical) وهو دراسة فيما اذا كانت المعلمات في نماذج ODE قابلة للتشخيص في حالة وجود الضوضاء مع البيانات التي يتم قياسها وعندئذ يمكن تقدير المعلمات المجهولة في نموذج المعادلات التفاضلية ضمن طرائق التقدير قيد الدراسة . [8:pp4]

وبعد إتمام تشخيص النموذج يتم تقدير المعلمات المجهولة في النموذج حيث توجد نوعين من طرائق التقدير الطريقة الأولى تعتمد على التقدير اللامعلمي لمتغيرات الحالة ومشتقاتها وتسمى هذه الطرائق بالطرائق المباشرة او الطرائق وهي تتجنب الحل العددي المتكرر لنموذج المعادلات التفاضلية اما الفئة الثانية فتسمى بالطرائق الغير مباشرة والتي تستعمل الحل العددي المتكرر وطرق الامثلية Optimazation Methodes وفيما يلي استعراض لهذه الطرائق:

3-1 الطريقة المباشرة (DM) Direct Method [8][7]

تستند هذه الطريقة على التقدير اللامعلمي لمتغيرات الحالة ومشتقاتها ومن ثم تعويض هذه المتغيرات ومشتقاتها في نموذج الانحدار الذي يتم استخلاصه من نموذج المعادلات التفاضلية ويمكن وصف خطوات هذه الطريقة بالنسبة لنموذج المعادلات التفاضلية (4)(5)(6) المعمول به في هذا البحث كالاتي

أولا : نجد التقدير اللامعلمي لمتغيرات الحالة $U(t), I(t), V(t)$ بطريقة الشرائح الجزائية penalized splines (p splines) كما مر بالفقرة (2) والتي هي على التوالي $\bar{U}(t), \bar{I}(t), \bar{V}(t)$ كذلك نجد التقدير اللامعلمي لمشتقات متغيرات الحالة والتي هي على التوالي $\bar{U}^{(1)}(t), \bar{I}^{(1)}(t), \bar{V}^{(1)}(t)$ والتقدير اللامعلمي للمشتقة الثانية للمتغير $V(t)$ التي تكون $\bar{V}^{(2)}(t)$ حيث سيتم استعمال هذه المقدرات في الخطوات اللاحقة .

ثانيا : اجراء العمليات الحسابية على نموذج المعادلات التفاضلية العادية اللاخطية لايجاد العلاقة الرياضية بين المعلمات المجهولة ومتغيرات القياس وكالاتي :

حيث تدمج (4) مع (5) ونحصل على :

$$\frac{d}{dt} [U(t) + I(t)] = \lambda - \rho U(t) - \delta I(t) \dots \dots \dots (7)$$

وليكن $T(t) = U(t) + I(t)$

$$\frac{d}{dt} T(t) = \lambda - \rho [T(t) - I(t)] - \delta I(t)$$



مقارنة بين الطريقة الكلاسيكية وطرائق الامثلية لتقدير المعلمات في نماذج المعادلات التفاضلية العادية الخطية

$$\frac{d}{dt}T(t) = \lambda - \rho T(t) + \rho I(t) - \delta I(t)$$

$$\frac{d}{dt}T(t) = \lambda - \rho T(t) + (\rho - \delta) I(t)$$

$$\frac{d}{dt}T(t) - \lambda + \rho T(t) = I(t)(\rho - \delta)$$

$$I(t) = \frac{-\lambda}{(\rho - \delta)} + \frac{\rho}{(\rho - \delta)} T(t) + \frac{1}{(\rho - \delta)} \frac{d}{dt} T(t)$$

$$\frac{d^2V(t)}{dt^2} = V^{(2)}(t) \text{ و } \frac{dV(t)}{dt} = V^{(1)}(t) \text{ و } \frac{d}{dt} T(t) = T^{(1)}(t) \text{ لتكن}$$

وبالتعويض بالمعادلة (6) نحصل على

$$V^{(1)}(t) = N\delta \left(\frac{-\lambda}{(\rho - \delta)} + \frac{\rho}{(\rho - \delta)} T(t) + \frac{1}{(\rho - \delta)} T^{(1)}(t) \right) - cV(t) \dots \dots (8)$$

$$V^{(1)}(t) = \alpha_0 + \alpha_1 T(t) + \alpha_2 T^{(1)}(t) - cV(t) \dots \dots (9)$$

حيث :

$$\alpha_0 = \frac{-N\delta\lambda}{(\rho - \delta)}, \alpha_1 = \frac{N\delta\rho}{(\rho - \delta)}, \alpha_2 = \frac{N\delta}{(\rho - \delta)}$$

ثالثا: تعوض مقدرات متغيرات الحالة $\bar{U}(t), \bar{I}(t), \bar{V}(t)$ ومقدرات مشتقاتها $\bar{U}^{(1)}(t), \bar{I}^{(1)}(t), \bar{V}^{(1)}(t)$ التي حصلنا عليها بالمرحلة الأولى في المعادلة (9) بالتتابع سوف نحصل على نموذج الانحدار الخطي الاتي [7:PP1576]

$$\bar{V}^{(1)}(t) = \alpha_0 + \alpha_1 \bar{T}(t) + \alpha_2 \bar{T}^{(1)}(t) - c\bar{V}(t) + \Delta(t) \dots \dots (10)$$

حيث $\Delta(t)$ يتضمن كل أخطاء التعويض نلاحظ ان خطأ التعويض ليس بمتوسط صفر وتباين ثابت كما في

أخطاء القياس المعيارية حيث لو كان متوسطة صفر سوف تكون المقدرات $\bar{X}_3(t)$

غير متحيزة وتكون هذه الأخطاء ليست مستقلة وفي حالتنا هذه قدرت هذه

المقدرات بطريقة لامعلمية فان هذه المقدرات متحيزة [8:pp1571].

حيث تم الاستعاضة عن متغيرات الحالة بمقدراتها وهذه الفكرة مشابهة لاسلوب

Calibration

حيث يتم استبدال المتغير الذي يكون عرضة للخطأ بالمقدر الذي حصلنا عليه في بطريقة الشرائح الجزائية

ونعني بفكرة **Regression Calibration** هو استبدال المتغيرات غير المشاهدة (التي تقاس مع وجود

الخطأ) بقيمتها المقدره بالطرائق اللامعلمية فتكون أخطاء القياس معدلة وذلك لتأخذ بعين الاعتبار تقدير هذه

المتغيرات [4:PP2]

حيث يصبح النموذج نموذج انحدار قياسي ومن الممكن إيجاد مقدرات المعلمات الثابتة سوف نستخدم

المربعات الصغرى الزائفة **Pesdo-least squares estimation** لتقدير $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, c$ ويمكن استنتاج :

بهذا نستطيع إيجاد المقدرات $\hat{\rho}, \hat{\lambda}, \hat{c}$ من النموذج (10) حيث ان موجه المعلمات

المراد تقديرها هو $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, c)$ اما مصفوفة المعلومات فتعطي كما يلي:

$$\Omega = \text{diag}(1, \bar{T}, \bar{T}^{(1)}, -\bar{V}_3) \quad [7:PP 466]$$

رابعا: نقوم للمرة الثانية بأجراء العمليات الحسابية والتعويضية على نموذج المعادلات التفاضلية لتكوين

نموذج انحدار شبه معلمي بمعاملات وقت متغيرة **Sime Parametric Time -Varying Coefficient Models**

وحسب الاتي :



مقارنة بين الطريقة الكلاسيكية وطرائق الامثلية لتقدير المعلمات في نماذج المعادلات التفاضلية العادية الخطية

من المعادلة (5) نحصل على:

$$\frac{d}{dt}I(t) = \eta(t)\{T(t) - I(t)\}V(t) - \delta I(t) \dots \dots \dots (11)$$

وبإيجاد المشتقة الثانية للمعادلة (6) نحصل على

$$\begin{aligned} V^{(2)}(t) &= N\delta I^{(1)}(t) - cV^{(1)}(t) \\ I^{(1)}(t) &= \frac{V^{(2)}(t) + cV^{(1)}(t)}{N\delta} \dots \dots \dots (12) \end{aligned}$$

وبالرجوع الى المعادلة (5) نحصل على :

$$I = \frac{V^{(1)} + cV}{N\delta} \dots \dots \dots (13)$$

نعوض المعادلة (5) والمعادلة (13) في المعادلة (12) نحصل على المعادلة الآتية :

$$V^{(2)}(t) + cV^{(1)}(t) = \eta(t)N\delta U(t)X_3(t) - \eta(t)[V^{(1)}(t)V(t) + cV(t)^2] - \delta[V^{(1)}(t) + cV(t)] \dots (14)$$

خامسا : في هذه المرحلة نعوض متغيرات الحالة والمعلمات الثابتة التي قدرت في المرحلتين الأولى والثانية والثالثة من المعادلة (14) يمكن صياغة نموذج انحدار شبه معلمي للمعاملات المتغيرة الزمن كالآتي [7:PP467]:

$$Z(t) = X_1(t)\delta + X_2(t)\eta(t) + X_3(t)N\delta\eta(t) + \Delta^*(t) \dots \dots \dots (15)$$

حيث ان :

$$\begin{aligned} Z(t) &= \bar{V}^{(2)}(t) + c\bar{V}^{(1)}(t) \quad , \quad X_1(t) = -[\bar{V}^{(1)}(t)\bar{V}(t) + c\bar{V}(t)^2] \quad , \\ X_2(t) &= [\bar{V}^{(1)}(t) + c\bar{V}(t)] \quad , \quad X_3(t) = [\bar{T}(t)\bar{V}(t)] \end{aligned}$$

نلاحظ ان النموذج (15) هو نموذج شبه معلمي لنموذج معاملات متغيرة الزمن (Sime Parametric) Time-Varying Coefficient Models حيث $Z(t)$ متغير قيم الاستجابة عند الزمن t وان $X_3(t)$, المتغيرات التوضيحية المراد تقدير تأثيرها على متغير الاستجابة $Z(t)$ وان $X_1(t), X_2(t)$ تمثل معاملات المتغيرات التوضيحية في معادلة الانحدار والتي تكون عبارة عن دالة في المتغير t وكما هو معلوم ان المتغير t يؤثر في هذه المعاملات مما يجعلها متغيرة زمنيا اما $\Delta^*(t)$ يضم جميع أخطاء التعويض عند الزمن t بمتوسط صفر وتباين ثابت σ^2 . [9:PP466]

سادسا : تقرب المعلمة المتغيرة زمنيا ياية طريقة ممهدة لامعلمية مثل انحدار الشرائح Regression Splines او أساس الشرائح Basis Splines(B Splines) او غيرها من الطرق الممهدة اللامعلمية سيتم استعمال الطريقة الممهدة اللامعلمية أساس الشريحة Basis Splines(B Splines) وذلك لمميزات هذه الطريقة من حيث السهولة والدقة في حسابها وكما يلي :

$$\eta(t) = \sum_{j=1}^m b_j N_{j,k}(t) = N^T b \dots \dots (16)$$

حيث ان :

b_j : معاملات B-spline الثابتة ، $N_{j,k}(t)$: دوال الأساس للترتبة k

اما اختيار الرتبة وعدد العقد سوف نجدها من خلال المعيار AICc وكالآتي :

$$AICc = AIC + \frac{2K(K+1)}{n-K-1} \dots \dots \dots (17)$$

حيث AICc هو معيار تصحيح التحيز لحجم العينة الصغيرة

وان L تمثل دالة الإمكان و K عدد المعلمات المجهولة اما n فتمثل عدد المشاهدات .

وعندما يكون الخطأ العشوائي مستقلا ويتوزع توزيعا طبيعيا يمكن كتابة المعيار كالآتي:

$$AICc = N \ln\left(\frac{SSR}{N}\right) + \frac{2NK}{N-K-1} \dots \dots \dots (18)$$

حيث SSR هي مجموع مربعات الأخطاء وللحصول على مجموع مربعات الأخطاء SSR نقوم بحل نموذج ODE عددياً بأحد الطرق العددية وكذلك يمكن الحصول على دالة الإمكان استناداً الى SSR في ظل افتراض استقلاليه الأخطاء العشوائية وتوزيعها الطبيعي [9:PP7]

ولقد وجد الباحث (Xue,H.) وآخرون [13:PP21] والباحث (Liang,H.) وآخرون [7:pp473] ان أفضل تحويل للمعلمة المتغيرة بواسطة B -spline يكون للترتبة الثالثة مع خمسة نقاط سيطرة (Control Points) وذلك باستعمال معيار $AICc$ بالنسبة لنموذج المعادلات التفاضلية المعمول به في هذا البحث . يمكن إعادة كتابة النموذج (15) بالشكل التقريبي الآتي :

$$Z(t) = X_1(t)\delta + \sum_{j=1}^l \{N_{j,k}(t)X_2(t)\}b_j + \sum_{j=1}^l \{N_{j,k}(t)X_3(t)\}N\delta mb_j + \Delta^*(t) \dots \dots (19)$$

حيث سيصبح النموذج نموذج انحدار قياسي يحتوي على معالم ثابتة فقط وهي : $N\delta b_j, b_j, \delta$ ($j = 1, 2, \dots, m$) حيث يكون من السهولة تقديرها بطريقة المربعات الصغرى وبهذا يتم تقدير جميع معالم النموذج .

يمكننا استعمال الطريقة المباشرة لايجاد مقدرات جميع المعلمات الديناميكية في نموذج ديناميكي لفايروس الوبائي ويمكن اعتبار هذه الطريقة طريقة عامة لتقدير المعلمات في نماذج ODE اللاخطية المختلفة حيث ان هذه الطريقة في التقدير تحتوي على انحدار معلمي ولا معلمي وشبه معلمي وتتجنب الحل العددي لنماذج ODE اللاخطية وبهذا فهي لا تتطلب قيم ابتدائية لمتغيرات الحالة كذلك وعلى الرغم من ان المقدرات على أساس هذه الطريقة لديها بعض الصفات المميزة في الخصائص التقريبية والسرعة والكفاءة الحسابية الا انه توجد بعض القيود على هذه الطريقة على وجه الخصوص عند تقدير مشتقات متغيرات الحالة التي تتأثر بقياس التشويش (الضوضاء) عندما تكون البيانات مبعثرة وهذا ينتج مقدرات متحيزة للمعلمات . [7:PP467]

ومن اجل تحسين هذه التقديرات سوف نستعمل طرق التقدير التي تستند على الامثلية Optimization والتي سيتم التطرق في الأجزاء القادمة حيث سنعتبر مقدرات هذه الطريقة كقيم أولية للطريقة القادمة .

(3-2) طريقة والمربعات الصغرى اللاخطية المعززة بالشرائح The Spline- Enhanced Nonlinear Squares(SNLS) Least

في هذه الطريقة سيتم استعمال المربعات الصغرى اللاخطية مع تحويل المعلمة المتغيرة الزمن بالطريقة اللامعلمية أساس الشريحة (B Spline) لصفق تقدير المعلمات للنموذج (ODE) اللاخطي الوارد في المعادلات (4)(5)(6)

والفكرة الأساسية لهذه الطريقة هي تحويل المعلمات المتغيرة الزمن بالطريقة الممهدة اللامعلمية أساس الشريحة (B-Spline) حيث يصبح النموذج يحتوي على المعلمات الثابتة فقط ويمكننا استعمال طريقة المربعات الصغرى اللاخطية القياسية لتقدير المعلمات الثابتة ومعاملات B - spline بواسطة الحل العددي لنماذج ODE بصورة تكرارية يمكن بناء أنواع مختلفة من الشرائح مستنده على دوال أساس مختلفة حيث نلاحظ بانه لأي دالة عشوائية للشرائح من درجة معينة وتمهيد على قسم مجال معين يمكن دائما العثور على مجموعه خطية من دوال الأساس ذات الدرجة والنعومة على نفس القسم لتمثل دالة الشريحة لذلك يمكن دون فقدان التعميم استعمال الطريقة الممهدة اللامعلمية أساس الشريحة (B-Spline) لتقريب المعلمة متغيرة الزمن وعلى غرار التقريب في المعادلة (16) لنموذج المعادلات التفاضلية الوارد في المعادلات (4)(5)(6) سوف يقرب كالاتي: [6:pp468]

$$\frac{dU(t)}{dt} = \lambda - \rho U(t) - \left\{ \sum_{j=1}^s a_j b_{j,k}(t) \right\} U(t) V(t) \dots \dots (20)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \left\{ \sum_{j=1}^s a_j b_{j,k}(t) \right\} U(t) V(t) - \delta I(t) \dots \dots (21)$$



مقارنة بين الطريقة الكلاسيكية وطرائق الامثلية لتقدير المعلمات في نماذج المعادلات التفاضلية العادية الخطية

$$\frac{dV(t)}{dt} = N\delta I(t) - cV(t) \dots \dots \dots (22)$$

حيث

$$\theta = (\lambda, \rho, N, \delta, c, a_1, \dots, a_s)^T$$

نلاحظ مجموع قياسات خلايا $CD_4 + T$ وكالاتي $T(t_i) = U(t_i) + I(t_i)$ والحمل الفيروسي $V(t_i)$. حيث نموذج القياس يمكن كتابته كالاتي :

$$Y_{1i} = T(t_i) + \varepsilon_{1i} \quad i=1,2,\dots,n_1 \dots \dots \dots (23)$$

$$Y_{2j} = V(t_j) + \varepsilon_{2j} \quad j=1,2,\dots,n_2 \dots \dots \dots (24)$$

حيث ان $\varepsilon_{2j}, \varepsilon_{1i}$ يفترض ان تكون مستقلة بمتوسط صفر وتباين ثابت اما Y_{1i}, Y_{2j} هي القياسات المقابلة الى $V(t_i)$ و $T(t_i)$ على التوالي سيتم تطبيق طريقة المربعات الصغرى اللاخطية Nonlinear Least Square (NLS) لتصغير دالة الهدف:

$$RSS(\theta) = \sum_{i=1}^{n_1} W_1 \{Y_{1i} - T(t_i, \theta)\}^2 + \sum_{j=1}^{n_2} W_2 \{Y_{2j} - V(t_j, \theta)\}^2 \dots \dots \dots (25)$$

احيث ان n_1 هي مجموع قياسات عدد خلايا $CD_4 + T$.
 n_2 :مجموع اعداد مشاهدات الحمل الفيروسي

$T(t_i, \theta)$ و $V(t_j, \theta)$: الحل العددي باستعمال الطريقة العددية رونج كوتا Rung Kuta للمعادلات (20)

(21) (22). اذ سيتم وزن المتغيرين المقاسين بواسطة W_1, W_2 باستعمال استراتيجية الوزن المتساوي 1

$W_T = W_V = 1$ بدلا من ذلك ممكن ان نزن أيضا المتغيرين من خلال النظر الى اخطاء القياس $\varepsilon_{2j}, \varepsilon_{1i}$

اذا كانت البيانات مرتبطة سوف نستخدم طريقة المربعات الصغرى اللاخطية الموزونة Generalized Least Squares (GLS) Method وبشكل عام طريقة المربعات الصغرى الموزونة اكثر كفاءة اذا كانت الاوزان معروفة في دالة الهدف [9:PP5]

ان الخطوة المهمة في هذه الطريقة هي تقليل دالة الهدف (25) عبر مجال معلمة عالية الابعاد وفي التطبيقات العملية يكون من الصعب الحصول على الحل الأمثل لحل هذه المشكلة اذا كان فضاء المعلمة عالي الابعاد او قيم المعلمة مختلفة الرتب كذلك دالة الهدف ذات نماذج متعددة فمن الأهمية تطوير كفاءة واستقراره طرق الامثلية .

هناك فئتين رئيسيتين من طرق الامثلية وهي طرق (Global Optimization) وطرق التدرج (Gradient Methods) مثل طريقة جاوس-نيوتن Newton Gauss- هذا الأسلوب يتطلب نقطة بداية أولية في مجال المعلمة القريبة من نقطة الحل الحقيقية ثم يحسب الاتجاه الأكثر انحدارا بالاستناد على الدرجة الأولى او الثانية للتدرج المكاني لدالة الهدف في مجال المعلمة لتحديد اتجاه البحث في الخطوة التالية وهكذا . طرق التدرج يمكن عدها كفاءة حسابيا ومع ذلك اذا كانت دالة الهدف ليست على نحو سلس بما فيه الكفاية هذه الطرق قد لا تصلح بالإضافة للنماذج المتعددة لدالة الهدف فان اتجاه البحث المحسوب من التدرج المكاني Locally Gradient من المرجح جدا ان يكون مضللا وفي ظل هذه الحالات تكون طرق التدرج حساسة جدا للقيم الابتدائية للمعالم المجهولة وقد تكون محصورة بالحد الأدنى المكاني ومع ذلك فان طرق التدرج تكون محددة بـ Local Minima [10 p1759]

وبالتالي طرق Global Optimization هي اكثر ملائمة لتقدير المعلمة في نماذج ODE اللاخطية . ولقد قارن العالم Moles (2004) [11] سبعة طرق Global Optimization بما في ذلك طريقة التطور التفاضلي Differential Evolution Method المقترحة من قبل Storn(1997) [12] وبينت النتائج ان طريقة Differential Evolution Method هي الأفضل على الستة طرق الأخرى وتعتبر طرائق الامثلية العالمية الحالية هي مكثفة حسابيا مقارنة بطرائق التدرج الا ان طرق Global Optimization تكون اكثر مرونة من حيث القدرة على التعامل مع الدوال غير الممهدة والدوال المتعددة وحتى المنفصلة بالإضافة الى ذلك فان طرق Global Optimization لا تتطلب نقطة انطلاق ابتدائية بدلا من ذلك فقط نحتاج تحديد مجال المعلمة في البحث. [9:PP5]



مقارنة بين الطريقة الكلاسيكية وطرائق الامثلية لتقدير المعلمات في نماذج المعادلات التفاضلية العادية الخطية

لهذا سيتم استعمال خوارزمية Differential Evolution لتقدير المعلمات في نموذج ODE اللاخطي الوارد في هذا البحث (Liang (2010)^[7].

3-2-1) خوارزمية التطور التفاضلي Differential Evolution Algorithm

قدمت خوارزمية Differential Evolution (DE) في عام 1996 من قبل (Storn & Price)^[12] حيث استعملت لتحسين المعلمات الحقيقية وتعتمد هذه الخوارزمية على إيجاد الحل الأمثل على المجتمع ويعزى سبب استعمال هذه الخوارزمية لإيجاد (Global Optimization) وتعتبر طريقة بحث عشوائية وقد استخدمت في مجالات مختلفة مثل حقول الإحصاء والهندسة كما انها تعتبر طريقة إيجاد حل تقريبي للمشاكل اللاخطية المعقدة التي يكون من الصعب إيجاد حل تحليلي لها وتمتاز هذه الخوارزمية بالقدرة على البحث وسهولة الاستعمال وسهولة الفهم وتمتاز بخصائص التقارب العالية^[5:pp2] ويمكن تلخيص خطواتها على النحو التالي:

1. تعريف المتجهات التي تمثل الحد الأدنى والحد الأعلى لكل معلمة $[x_j, \bar{x}_j]$ حيث $j = 1, 2, \dots, w$ وان $w=5$ المعلمات المطلوب تقديرها $(\lambda, \rho, C, \delta, N, a_1, a_2, \dots, a_5)$ حيث يتم الحصول على هذه المتجهات من الطريقة المتعددة المراحل (MSSB) التي ورد ذكرها (مع تثبيت قيم المعلمات (a_1, a_2, \dots, a_5))
 2. عدد التوليدات (التكرارات)
 3. حجم المجتمع NP هنا نختار NP=100
 4. عامل التحويل F وتتراوح قيمته $0 < F \leq 2$ ويختار عشوائيا
 5. تعيين CR وهو احتمال يقع في الفترة [0,1] يختار عشوائيا
- الخطوة الثانية: Initialization:
نعرف الحد الأعلى والحد الأدنى لكل معلمة $x_j \leq x_{j,i,G} \leq \bar{x}_j$ حيث يتم تهيئة المجتمع الابتدائي لمتجه المعلمات المراد تقديرها .

$$x_{i,G} = \begin{bmatrix} \lambda_{1,i,G} \\ \rho_{2,i,G} \\ \delta_{3,i,G} \\ c_{4,i,G} \\ N_{5,i,G} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, NP \dots \dots \dots (26)$$

نولد بالتوزيع المنتظم حجم المجتمع NP من المتجهات وضمن الفترة $[x_j, \bar{x}_j]$ كل متجه بمجال w ولكل معلمة علما ان G تمثل الأجيال والمتجه الناتج $x_{i,G}$ يسمى متجه الهدف (Target Vector) فيكون المجتمع الابتدائي كالآتي:

Individual 1	Individual 2	Individual NP
	$x_{2,G}$		$x_{NP,G} x_{1,G}$
	$\lambda_{1,2,G}$		$\lambda_{1,NP,G} \lambda_{1,1,G}$
	$\rho_{2,2,G}$		$\rho_{2,NP,G} \rho_{2,1,G}$
	$\delta_{3,2,G}$		$\delta_{3,NP,G} \delta_{3,1,G}$
	$c_{4,2,G}$		$c_{4,NP,G} c_{4,1,G}$
	$N_{5,2,G}$		$N_{5,NP,G} N_{5,1,G}$
	$f(x_{2,G})$	$f(x_{NP,G}) f(x_{1,G})$

شكل (1) يمثل توليد المجتمع الابتدائي (متجهات الهدف) في خوارزمية Differential Evolution
يتم حساب دالة الهدف (25) لكل فرد (Individual) في المجتمع والتي تم الإشارة لها بـ $f(x_{2,G})$.
ولتكوين الجيل اللاحق من الافراد (المتجهات) فإن كل متجه في المجتمع السابق والتي عددها NP يخضع الى استراتيجيات التطوير والتي هي الطفرة (Mutation) وإعادة التركيب (Recombination) والاختيار (Selection) وكما يأتي:

الخطوة الثالثة الطفرة (Mutation)

وتتم وفق الخطوات الآتية :

1. نختار عشوائيا من المتجهات NP ثلاث متجهات مختلفة من متجهات الهدف بشكل عشوائي باستبعاد المتجه المراد إيجاد قيمه في المجتمع اللاحق حيث يرمز الى هذه المتجهات الثلاثة :
حيث $x_{r1,G}, x_{r2,G}, x_{r3,G}$ تكون محددة مسبقا
2. نولد متجه جديد يسمى المتجه المانح Donor Vector يتكون من إضافة الفرق المرجح من اثنين من المتجهات الى الثالث [12:pp344]

$$V_{i,G+1} = x_{r1,G} + F * (x_{r2,G} - x_{r3,G}) \quad i = 1, 2, \dots, NP \quad \dots \dots \dots (27)$$

الخطوة الرابعة إعادة التركيب (Recombination)

وهي خطوة إعادة الدمج وتتضمن الحلول الناجحة من الجيل السابق حيث يتم تطوير متجه جديد يسمى بمتجه التجربة Trial Vector $U_{i,G+1}$ وذلك من عناصر متجه الهدف $x_{i,G}$ والمتجه المانح $V_{i,G+1}$ حيث ان عناصر المتجه المانح تدخل متجه التجربة باحتمال CR (احتمال يحدد من قبل الباحث) وذلك من اجل زيادة التنوع في المعلمة المضطربة وكالاتي [13:PP345] :

$$U_{i,G+1} = \begin{cases} V_{j,i,G+1} & \text{if } rand j, i \leq CR \text{ or } j = Irand \\ x_{j,i,G} & \text{if } rand j, i > CR \text{ and } j \neq Irand \end{cases} \quad \dots \dots \dots (28)$$

$i = 1, 2, \dots, NP$
 $j = 1, 2, \dots, w$

حيث ان :

$$rand j, i \sim U[0, 1]$$

$Irand$ هو عدد عشوائي صحيح يقع ما بين 1 و w (حيث $w=10$ عدد المعلمات في النموذج)

وان $Irand$ يؤكد $V_{i,G+1} \neq x_{i,G}$

الخطوة الخامسة الاختيار (Selection)

يقارن متجه الهدف $x_{i,G}$ مع متجه التجربة $U_{i,G+1}$ والذي يعطي اقل دالة هدف سوف يسلم به الى التوليد القادم ولذي سيمثل (Individual1) في المجتمع اللاحق وكما في المعادلة الآتية [52:PP345]

$$x_{i,G+1} = \begin{cases} U_{i,G+1} & \text{iff } f(U_{i,G+1}) \leq f(x_{i,G}) \\ x_{i,G} & \text{O.W} \end{cases} \quad \dots \dots \dots (29)$$

$i = 1, 2, \dots, NP$

وتكرر هذه الخطوات لكل فرد او متجه (Individual) في المجتمع فيتم تكوين أعضاء الجيل اللاحق $G+1$ وتستمر عمليات الطفرة (Mutation) واعادة التركيب (Recombination) والاختيار (Selection) الى الوصول وتحقق معيار التوقف وبذلك نكون قد حصلنا على مقدرات المعلمات والتي سنرمز لها $\hat{\theta}_{DE} = (\hat{\lambda}, \hat{\rho}, \hat{c}, \hat{\delta}, \hat{N})$ تجعل الدالة $RSS(\theta)$ في الصيغة (25) اقل ما يمكن .

4 - الجانب التجريبي

لغرض تطبيق الطرائق التي تم التطرائق لها في الجانب النظري من هذا البحث لابد من وضع بعض الافتراضات المهمة للحصول على تحليل اكثر شموليه من خلال استعمال احجام عينات مختلفة واختيار قيم مختلفة لتباين الأخطاء وحيث انه من الصعوبة تطبيق هذه الافتراضات والحصول على احجام العينات في الواقع العملي يتم استعمال الأسلوب التجريبي من خلال تطبيق المحاكاة (Simulation).

ويمكن توضيح مراحل بناء تجربة المحاكاة Stages of Building Simulation Experiment بثلاثة مراحل مهمة وكالاتي :



مقارنة بين الطريقة الكلاسيكية وطرائق الامثلية لتقدير المعلمات في نماذج المعادلات التفاضلية العادية اللاحقة

المرحلة الأولى : توليد متغيرات الحالة [7] [8] [13]

تحل المعادلات التفاضلية الواردة في الجانب النظري من البحث (4)(5)(6) عدديا بطريقة رونج-كوتا (4-stage Runge-Kutta) وبقيم معلمات أولية استنبطت من البحوث السابقة.

$$U(0) = 600, I(0) = 30, V(0) = 10^5, \lambda = 36, \rho = 0.108$$

$$N = 1000, \delta = 0.5, c = 3, \gamma(t) = 9 * 10^{-5} * \left\{ 1 - 0.9 \cos\left(\frac{\pi t}{1000}\right) \right\}$$

بعد حل نموذج المعادلات التفاضلية بالطريقة العددية سوف نحصل على متغيرات الحالة

$$T(t) = I(t) + V(t) \text{ فحصل على المتغير } U(t), I(t), V(t) \text{ حيث يتم دمج المتغيرين}$$

المرحلة الثانية : توليد الاخطاء العشوائية

يتم في هذه المرحلة توليد الاخطاء العشوائية التي تتوزع طبيعيا بمتوسط صفر وتباين معين σ^2 أي :

$$\epsilon i1 \sim N(0, \sigma_1^2), \epsilon i2 \sim N(0, \sigma_2^2)$$

وسوف يتم استعمال ثلاث مستويات من التباين تضاف لكل متغير وهي مستوى التباين العالي والمتوسط والمنخفض والتي ستم التطرق لها لاحقا

المرحلة الثالثة : يتم حساب المتغير المعتمد $Y(t_i)$ من خلال دمج كل متغير من المتغيرات التي حصلنا عليها في المرحلة الاولى مع الخطأ العشوائي المولد طبيعيا لينتج:

$$Y_2(t_i) = V(t) + \epsilon i2, Y_1(t_i) = T(t) + \epsilon i1$$

لقد تضمنت تجارب المحاكاة المراحل والخطوات الاتية لتقدير متغير الحالة في نموذج المعادلات التفاضلية ODE اللاحقة وتطبيق طرائق التقدير المستعملة في هذا البحث والتي يتم من خلالها تحقيق الهدف ولقد تم الاعتماد على برنامج (R-3.3.3-pit64) للحصول على النتائج .

حيث يتم اختيار القيم الافتراضية وهي من المراحل المهمة والتي تعتمد المراحل اللاحقة عليها من اجل تقدير المتغير المعتمد أي ان كل تجربة من التجارب الأربعة وضعت عند ثلاث مستويات من التباين وحسب حجوم العينات حيث تم اعتماد التباينات الاتية لحجوم العينات الصغيرة $n=30$ و $n=50$ حيث كان مستويات التباين للمتغير $T(t)$ هي $(40^2, 30^2, 20^2)$ ومستويات التباين للمتغير $V(t)$ هي $(100^2, 75^2, 50^2)$. اما لحجوم العينات الكبيرة $n=100$ و $n=200$ فإن التباين للمتغير $T(t)$ هو $(40, 30, 20)$ والتباين للمتغير $V(t)$ هو $(200, 150, 100)$.

وبعدها تطبق الطرائق الواردة في الجانب النظري ولكافة حجوم العينات ومستويات التباين وهذه الطرائق :

1. الطريقة المباشرة طريقة الشرائح الجزئية (P spline) لتقدير متغيرات الحالة ومشتقاتها في انموذج المعادلات التفاضلية حيث سميت هذه الطريقة بـ (DM)

2. طريقة المربعات الصغرى اللاحقة المعاملة بالشرائح حيث سميت هذه الطريقة بـ (SNLS).

المرحلة الرابعة ولتقييم أداء الطرائق وللمقارنة بينها تم استعمال معيار المقارنة متوسط خطأ التقدير النسبي Average relative estimation error (ARE) للمعلمة وكالاتي :

$$ARE = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \frac{|\hat{\beta} - \beta_0|}{\beta_0} \times \%100 \dots \dots \dots (30)$$

حيث β_0 هي المعلمة الحقيقية و $\hat{\beta}$ هي المقدرة اما M فتمثل عدد التكرارات

جدول رقم (1): معدل الخطأ النسبي (ARE) وفق طرائق التقدير المختلفة لحجم عينة $n=30$ ومستويات تباين مرتفعة مع تقريب المعلمة المتغيرة الزمن $\eta(t)$ بـ 5 عقد شريحة للترتبة 3

σ_1^2	σ_2^2	METHOD	$\hat{\lambda}$	$\hat{\rho}$	\hat{c}	$\hat{\delta}$	\hat{N}
400	25000	DM	31.2478	41.6346	95.2313	22.5810	82.9635
		SNLS	3.1775	11.4154	1.8956	3.4186	2.7985
900	5625	DM	30.6681	52.7689	95.3658	23.3130	83.865



مقارنة بين الطريقة الكلاسيكية وطرائق الامثلية لتقدير المعلمات في نماذج المعادلات التفاضلية العادية الخطية

		SNLS	3.5190	11.9929	3.0393	3.9222	4.0116
1600	10000	DM	68.9973	68.8076	88.4956	23.57543	81.9908
		SNLS	4.0201	12.0110	2.8320	3.9820	3.9187

جدول رقم (2): معدل الخطا النسبي (ARE) وفق طرائق التقدير المختلفة لحجم عينة $n=50$ ومستويات تباين مرتفعة مع تقريب المعلمة المتغيرة الزمن $\eta(t)$ بـ 5 عقد شريحة للرتبة 3

σ_1^2	σ_2^2	METHOD	$\hat{\lambda}$	$\hat{\rho}$	\hat{c}	$\hat{\delta}$	\bar{N}
400	25000	DM	72.4682	94.845	488.211	63.4700	25.1083
		SNLS	2.5878	9.9569	1.0397	2.5869	2.5869
900	5625	DM	34.69044	51.0709	35.0758	5.09700	67.25080
		SNLS	3.0215	9.9901	2.0312	2.6060	4.0517
1600	10000	DM	53.421	64.892	38.089	6.2534	68.981
		SNLS	3.9950	10.820	2.5120	3.5210	3.4108

جدول رقم (3): معدل الخطا النسبي (ARE) وفق طرائق التقدير المختلفة لحجم عينة $n=100$ ومستويات تباين منخفضة مع تقريب المعلمة المتغيرة الزمن $\eta(t)$ بـ 5 عقد شريحة للرتبة 3

σ_1^2	σ_2^2	METHOD	$\hat{\lambda}$	$\hat{\rho}$	\hat{c}	$\hat{\delta}$	\bar{N}
20	100	DM	8.03935	13.9214	86.1883	17.8705	81.9830
		SNLS	1.92904	5.4203	1.8614	0.6755	1.4072
30	50	DM	8.9012	15.0981	84.7730	18.0926	79.5045
		SNLS	2.3393	5.0879	1.087	0.8623	1.890
40	200	DM	10.1016	17.3137	83.7619	18.6664	71.1651
		SNLS	3.0872	7.0674	7.71543	1.4933	2.2343

جدول رقم (4): معدل الخطا النسبي (ARE) وفق طرائق التقدير المختلفة لحجم عينة $n=200$ ومستويات تباين منخفضة مع تقريب المعلمة المتغيرة الزمن $\eta(t)$ بـ 5 عقد شريحة للرتبة 3

σ_1^2	σ_2^2	METHOD	$\hat{\lambda}$	$\hat{\rho}$	\hat{c}	$\hat{\delta}$	\bar{N}
400	25000	DM	6.7892	11.7092	89.3286	15.5519	76.1149
		SNLS	1.2236	1.0022	0.88943	0.02123	0.09086
900	5625	DM	7.4041	12.7832	87.9732	15.8876	81.0149
		SNLS	1.3915	1.0133	0.2481	0.02477	0.1702
1600	10000	DM	7.74954	13.8987	89.1953	15.6724	80.81149
		SNLS	1.8456	1.0314	0.5482	0.0378	0.2385



مقارنة بين الطريقة الكلاسيكية وطرائق الامثلية لتقدير المعلمات في نماذج المعادلات التفاضلية العادية الخطية

جدول رقم (5): معدل القيم التقديرية للمعلمات
 $(\lambda = 36, \rho = 0.108, \delta = 0.5, c = 3, N = 10^3)$ وفق طرائق التقدير المختلفة لحجم عينة $n=30$ ومستويات تباين مرتفعة.

σ_1^2	σ_2^2	METHOD	$\hat{\lambda}$	$\hat{\rho}$	\hat{c}	$\hat{\delta}$	\hat{N}
400	25000	DM	32.13657	0.006900	0.9425	2.32867	217.6759
		SNLS	37.0429	0.0955	0.5001	3.0015	1007.1
900	5625	DM	29.3055	0.0059	0.92577	2.3008	276.515
		SNLS	32.921	0.1472	0.37032	3.3002	909.55
1600	10000	DM	39.2087	0.00400	0.84599	2.29500	374.0227
		SNLS	33.012	0.1078	0.5603	3.0019	1027.9

جدول رقم (6): معدل القيم التقديرية للمعلمات
 $(\lambda = 36, \rho = 0.108, \delta = 0.5, c = 3, N = 10^3)$ وفق طرائق التقدير المختلفة لحجم عينة $n=50$ ومستويات تباين مرتفعة.

σ_1^2	σ_2^2	METHOD	$\hat{\lambda}$	$\hat{\rho}$	\hat{c}	$\hat{\delta}$	\hat{N}
400	25000	DM	32.1244	0.00806	0.5739	3.0429	466.64
		SNLS	35.1175	0.0953	0.4999	3.0051	1020.2
900	5625	DM	30.195	0.02159	0.55038	3.0469	475.33
		SNLS	35.495	0.0852	0.5077	3.0059	1027.2
1600	10000	DM	32.784	0.0043	0.5370	3.0127	566.76
		SNLS	35.227	0.09251	0.5040	3.0069	1010.98

جدول رقم (7): معدل القيم التقديرية للمعلمات
 $(\lambda = 36, \rho = 0.108, \delta = 0.5, c = 3, N = 10^3)$ وفق طرائق التقدير المختلفة لحجم عينة $n=100$ ومستويات تباين منخفضة.

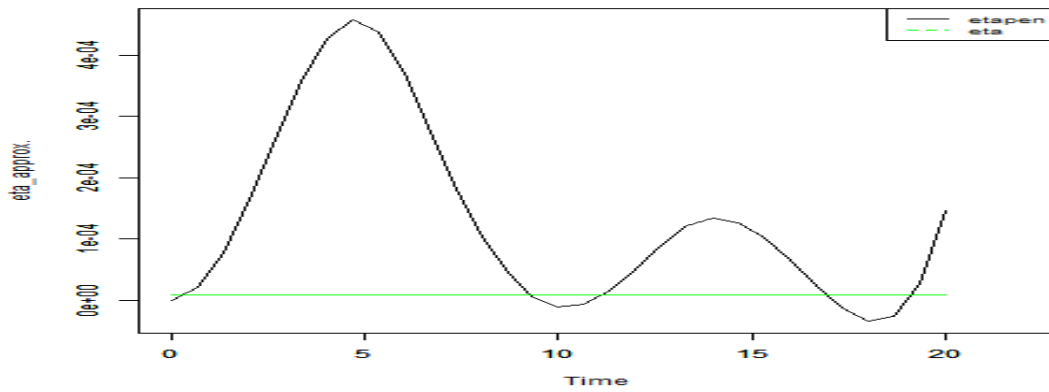
σ_1^2	σ_2^2	METHOD	$\hat{\lambda}$	$\hat{\rho}$	\hat{c}	$\hat{\delta}$	\hat{N}
20	50	DM	33.2383	0.09358	0.0705	3.52706	1098.78
		SNLS	35.0159	0.1036	0.4970	3.0044	997.34
30	100	DM	32.9834	0.09172	0.076058	3.5346	1127.98
		SNLS	35.3904	0.1092	0.5081	3.0021	990.538
40	200	DM	32.3795	0.0887	0.08302	3.5642	1071.90
		SNLS	35.3219	0.1101	0.5092	3.0051	995.56



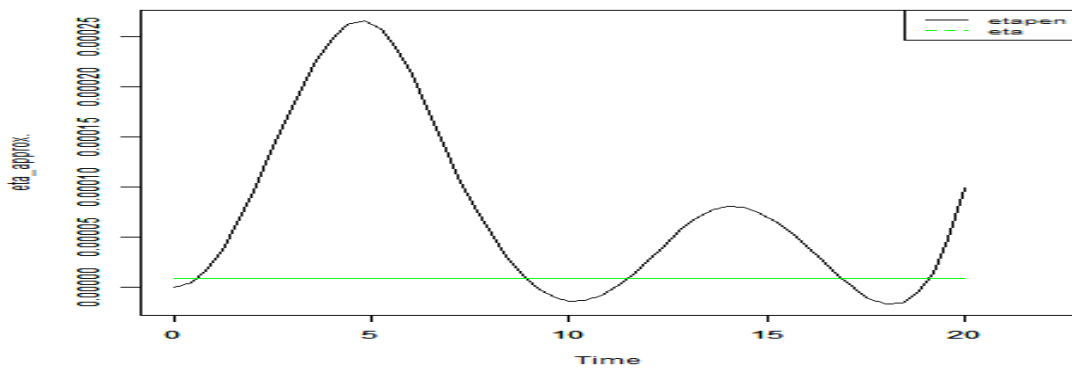
مقارنة بين الطريقة الكلاسيكية وطرائق الامثلية لتقدير المعلمات في نماذج المعادلات التفاضلية العادية الخطية

جدول رقم (8): معدل القيم التقديرية للمعلمات للعلماء $(\lambda = 36, \rho = 0.108, \delta = 0.5, c = 3, N = 10^3)$ وفق طرائق التقدير المختلفة لحجم عينة $n=200$ ومستويات تباين مرتفعة.

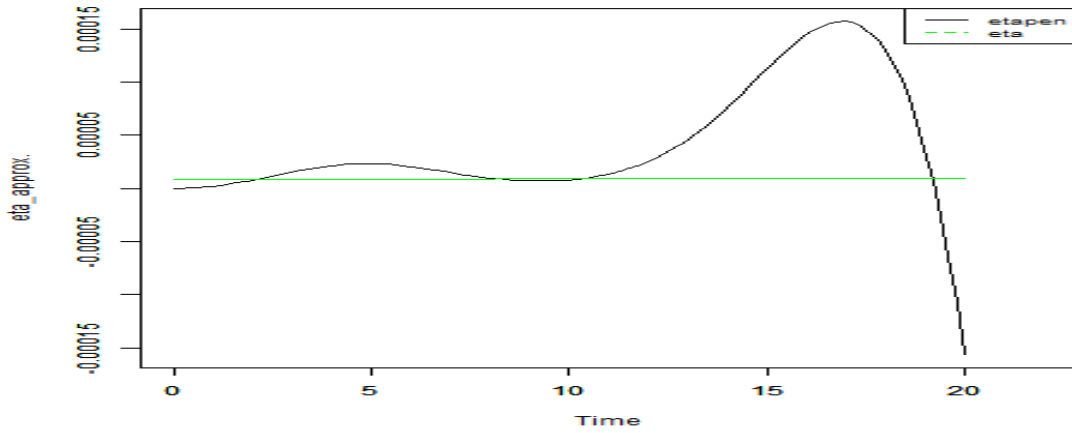
σ_1^2	σ_2^2	METHOD	$\hat{\lambda}$	$\hat{\rho}$	\hat{c}	$\hat{\delta}$	\hat{N}
20	50	DM	33.5216	0.09354	0.05338	3.60010	887.9831
		SNLS	36.0195	0.1065	0.50017	3.00012	1000.52
30	100	DM	33.31941	0.09444	0.05468	3.6051	993.874
		SNLS	36.0203	0.106149	0.50018	3.00015	1000.60
40	200	DM	33.2163	0.09323	0.05454	3.6720	2039.008
		SNLS	36.0987	0.1088	0.4954	3.00020	1000.77



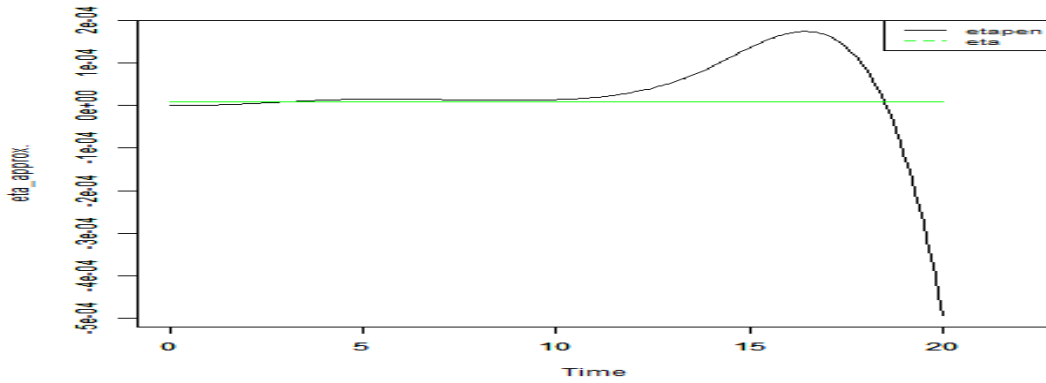
شكل رقم (1): تقدير المعلمة المتغيرة الزمن لحجم عينة 30 وتباين $\sigma_1^2 = 400, \sigma_2^2 = 2500$



شكل رقم (2): تقدير المعلمة المتغيرة الزمن لحجم عينة 50 وتباين $\sigma_1^2 = 400, \sigma_2^2 = 2500$



شكل رقم (3): تقدير المعلمة المتغيرة الزمن لحجم عينة 100 وتباين $\sigma_1^2 = 20$, $\sigma_2^2 = 100$



شكل رقم (4): تقدير المعلمة المتغيرة الزمن لحجم عينة 200 وتباين $\sigma_1^2 = 20$, $\sigma_2^2 = 100$

(4-1) تحليل نتائج المحاكاة

- من ملاحظة الجداول (1) و (2) و (3) و (4) ولاحجام العينات $n=30$ و $n=50$ على التوالي نلاحظ الاتي :
1. بصورة عامة نلاحظ في الجداول (1) و (2) و (3) و (4) انه كلما زاد مستوى التباين لكافة حجومات العينات سوف تزداد قيمة (ARE).
 2. نلاحظ ولكافة الجداول ان التقدير بالطريقة (DM) لا يعطي تقديرات جيدة للمعلمات (N, δ) .
 3. ومن كافة الجداول ولجميع احجام العينات ومستويات التباين نلاحظ تحسن تقدير جميع المعلمات عند استعمال طريقة (SNLS) على الرغم من الكلفة الحسابية العالية .
 4. كما نلاحظ في الجدولين (3) و(4) تحسن تقدير المعلمات وللطريقتين لامتلاكها اقل (ARE) ويعزى ذلك الى زيادة حجم العينة وهذا ما يتناسب مع النظرية الإحصائية .
 5. من ملاحظة الاشكال (1) و(2) و(3) و(4) يقل تذبذب المعلمة المتغيرة الزمن مع زيادة حجم العينة واستقرارها في العينات الكبيرة.
 6. وبصورة عامة نلاحظ ان طريقة (DM) لم تعطي تقديرات جيدة للمعلمات حتى عند حجومات العينات الكبيرة بالرغم من كفاءتها الحسابية ويعزى سبب ذلك لاستخدام مقدرات مشتقات متغيرات الحالة .

5- الاستنتاجات

1. كما نلاحظ ان الطريقة (DM) تكون كفاءة حسابيا ولا تحتاج الحل العددي المتكرر للمعادلات التفاضلية كذلك لا تحتاج القيم الابتدائية لمتغيرات الحالة الا انها لم تعطي مقدرات جيدة للمعلمات حتى عند اخذ حجوم عينات كبيرة وهذا بسبب ان هذه الطريقة تتطلب حساب مقدرات المشتقات لمتغيرات الحالة وغالبا ما تكون هذه المقدرات ليست دقيقة وخاصة في البيانات المتفرقة .
2. يمكن اعتماد مقدرات المعلمات بطريقة (DM) كقيم أولية لطريقة (SNLS) للحصول على مجال جيد للبحث في طرق التحسين.
3. على الرغم من الكلفة الحسابية العالية لطريقة (SNLS) بسبب الحل العددي المتكرر لنموذج المعادلات التفاضلية الا انها تعطي مقدرات جيدة جدا مقارنة مع طريقة (DM) وذلك بالاعتماد على خوارزمية التطور التفاضلي Differential Evolution Algorithm.
4. عند زيادة مستويات التباين في العينات نلاحظ زيادة (ARE) وخاصة في العينات الصغيرة اما في العينات الكبيرة فعند زيادة مستوى التباين نلاحظ ان قيم (ARE) تزداد بشكل اقل مما هو عليه في العينات الكبيرة

6- التوصيات

- على ضوء ما تم التوصل اليه من استنتاجات وفي ضوء الجانب النظري فيما يلي اهم التوصيات :
1. اوصي باستعمال طريقة المربعات الصغرى اللاخطية المعاملة بالشرائح (sNLS) مع استعمال خوارزمية (Deferential Evolution) حيث أعطت هذه الطريقة افضل المقدرات بالرغم من كلفتها الحسابية العالية وتفوقها بشكل كبير على الطريقة الكلاسيكية المباشرة (DM)
 2. اوصي باستعمال مقدرات الطريقة الكلاسيكية المباشرة (DM) كقيم أولية في طريقة المربعات الصغرى (SNLS) حيث يعتبر مجال المعالم المقدره مجالا جيدا لتحسين المعلمات في هذه الطريقة التي تعتمد الحل العددي وخوارزميات التحسين .
 3. من الممكن استعمال نماذج أخرى من المعادلات التفاضلية اللاخطية وتطبيق طرق التقدير عليها ومن الممكن احتواء هذه النماذج على اكثر من معلمة واحدة متغيرة الزمن .
 4. اوصي بتوسيع الدراسة المستقبلية في حالة وجود قيم مفقودة او قيم متطرفة في البيانات او في حالة عدم وجود الاستقلالية بين المتغيرات العشوائية او في حالة عدم وجود تجانس في الأخطاء العشوائية.
 5. يمكن استعمال طرق ممهدة لا معلمية أخرى مثل التمهيد بالشرائح Smoothing splines او انحدار الشرائح Regression spline او أي طريقة لا معلمية أخرى لتقدير متغير الحالة ومشتقاته .

المصادر

1. Audoly, S. and Bellu, G. (2011), "Global Identifiability of Nonlinear Models of Biological Systems". IEEE transection on biomedical engineering , vol.48, no1 .
2. Claeskens G, Krivobokova T, Opsomer J. (2009). "Asymptotic properties of penalized spline estimators. Biometrika"; printed in Great 96,3, pp:529–544.
3. De Boor, C. (1978). A Practical Guide to Splines. Springer, New York. MR0507062.
4. Hardin, J. W, Schmiediche, H. & Carroll, R. J. (2003). The regression-calibration method for fitting generalized linear models with additive measurement error. The Stata Journal pp. 361–372.
5. Ho, W. H. & Chan, L. F. (2011). Hybrid Taguchi-Differential Evolution Algorithm for Parameter Estimation of Differential Equation Models with Application to HIV Dynamics. Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engineering Volume , Article ID 514756, 14 pages doi:10.1155/514756.



6. Hu, T. & Qiu, Y. & Cui, H. & Chen, L. (2015). Numerical Discretization –Based Kernel Type Estimation Methods For Ordinary Differential Equation Models. *Acta Mathematica Sinica, English Series* 8, pp. 1233–1254.
7. Liang, H., Miao, H., and Wu, H. (2010). Estimation of Constant and Time-Varying Dynamic Parameters of HIV Infection in a Nonlinear Differential Equation Model., *Annals of Applied Statistics*, 4, 460–483.
8. Liang, H., and Wu, H. (2008). Parameter Estimation for Differential Equation Models Using a Framework of Measurement Error in Regression Models. *Journal of the American Statistical Association*, 103:484, 1570-158.3
9. Miao, H., Dykes, C, Demeter, L. M. and Wu, H. (2009). Differential Equation Modeling of HIV Viral Fitness Experiments Model Identification, Model Selection, And Multi-Model Inference. *Biometrics* 65 292-300.
10. Miao, H., Dykes, C., Demeter, L. M., Cavanaugh, J., Park, S. Y., Perelson, A. S., & Wu, H. (2008). Modeling And Estimation Of Kinetic Parameters and Replicative Fitness of HIV-1 From Flow-Cytometry-Based Growth Competition Experiments. *Bulletin of Mathematical Biology*, 70, 1749–1771.
11. Moles, C. G., Banga, J. R. and Keller, K. (2004). Solving Nonconvex Climate Control Problems: Pitfalls and algorithm performances. *Appi. Soft. Comput.* 5 35-44.
12. Storn, R. & Price, K. (1997). Differential Evolution-A Simple and Efficient Heuristic For Global Optimization Over Continuous Spaces. *Journal of Global Optimization* 11: 341–359.
13. Xue, H., Miao, H., and Wu, H. (2010). Sieve Estimation of Constant and Time-Varying Coefficients in Nonlinear Ordinary Differential Equation Models by Considering Both Numerical Error and Measurement Error. *The Annals of Statistics*, 38(4), 2351–2387.
14. Xue, H., and Kumar, A. (2012). Numerical Discretization-Based Estimation Methods for Ordinary Differential Equation Models Via Penalized Spline Smoothing with Applications in Biomedical Research, *Biometrics*, 68(2), 344–352.



Comparison of classical method and optimization methods for estimating parameters in nonlinear ordinary differential equation

ABSTRACT:

This study is concerned with the estimation of constant and time-varying parameters in non-linear ordinary differential equations, which do not have analytical solutions. The estimation is done in a multi-stage method where constant and time-varying parameters are estimated in a straight sequential way from several stages. In the first stage, the model of the differential equations is converted to a regression model that includes the state variables with their derivatives and then the estimation of the state variables and their derivatives in a penalized splines method and compensating the estimations in the regression model. In the second stage, the pseudo-least squares method was used to estimate the constant parameters. In the third stage, the remaining constant parameters and the time-varying parameters are estimated by using a semi-parametric regression model. This method is compared with the optimization method, which depends on the algorithm of differential evolution algorithm to estimate unknown parameters. The comparison was made using simulations. The results showed that the results were better to the method based on the differential evolution algorithm.

Keywords: Nonlinear Ordinary Differential Equations, penalized spline, Nonparametric Regression, Semi-Parametric Regression, differential evolution algorithm