Estimating the reliability function of Kumaraswamy distribution data

تقدير دالة المعولية لبيانات توزيع Kumaraswamy

أ.د. قتيبة نبيل نايف / كلية الادارة والاقتصاد/جامعة بغداد
الباحث / رقيه رعد حسين محمد

P - ISSN 2518 - 5764
E - ISSN 2227 - 703X

Received:2/6/2019
Accepted:3/7/2019

مستخلص البحث

يهدف هذا البحث الى تقدير معلمات ودالة المعولية لتوزيع (kumaraswamy) ذي المعلمتين الموجبتين (a,b>0) وهو من التوزيعات الاحتمالية المستمرة يملك العديد من اوجه التشابه ونفس خصائص توزيع (Beta) كما له نفس الفترة [0,1] لكنه يملك بعض المزايا من حيث قابلية التتبع .
ويتم توضيح شكل الدالة لهذا التوزيع واهم الخواص والصفات التي يملكها وتم تقدير معلمتي الشكل (a,b) للتوزيع ودالة المعولية باستعمال طريقة الامكان الاعظم (Maximum Likelihood Method) وطريقة بيز (Bayes Method) واشتقت هذه المقدرات وتم ايجاد افضل طريقة تقدير من خلال المقارنة بين نتائج الطريقتين وقد تمت المقارنة باستعمال المعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطأ (MSE) عن طريق تجارب المحاكاة بالاعتماد على برنامج لغة R باختيار احجام عينات مختلفة وقيم معلمات اولية مختلفة وقد تبين أن طريقة بيز هي الافضل لجميع احجام العينات وعرضت النتائج في جداول واشكال توضيحية خاصة .

المصطلحات الرئيسة للبحث/ توزيع Kw, طريقة (ML) , طريقة (Bayes) , متوسط مربعات الخطأ (MSE) .

***بحث مستل من رسالة ماجستير**

2- **المقدمة** :

ازداد الاهتمام بدراسة موضوع المعولية (Reliability) بعد الانتشار الواسع للصناعة فضلاً عن مارافقه من تطور كبير في مجال العلوم والتطور الكبير في مجال العلوم والتكنولوجيا ومن بعدها التحول من المكننه الى التحكم بالاجهزة والمعدات عن طريق الحواسيب وكمحاولة لحل مشكلة الفشل في المعدات ادى لظهور الحاجة الى المعولية في دراسة الظواهر وتحليلها ويتطلب ذلك الحصول على مقدرات جيدة وكفوءة لدالة المعولية وفقا لطبيعة البيانات الاحصائية يتم تحديد التوزيع الملائم للبيانات المطلوب دراسة معوليتها ومن ثم الحصول على مقدرات بخصائص جيدة لدالة المعولية اذ أن ومعرفة المعولية لكل ماكنة في اي منشأة يجعل بالامكان التنبؤ بالعدد الكلي الامثل للمكائن العاملة والعاطلة في اي وقت وعليه سوف يكون اجراء الصيانة الدورية للمحافظة على الاجهزة لئلا تتعرض للتلف السريع وانتهاء عمرها الافتراضي مبكرا والتوصل الى طرق تخفيض كلف الانتاج والصيانة (Maintenance) في مجال المعولية ونظرية البقاء

وان تحليل ظاهرة معينة في احد المجالات ينطوي على معرفة التوزيع الاحصائي الملائم الذي يصف تلك الظاهرة وهذا الجزء يعد مهما في عملية تحليل البيانات والتي قد تكون مشكلة في بعض الاحيان لصعوبة العثور على توزيع احتمالي يلائم البيانات لتمثيلها وتحليلها والاستدلال عليها من خلال ابعاد الظاهرة المدروسة بشكل دقيق, الا ان ظهور عدد من التوزيعات اصبح لدينا الحل لكثير من المشاكل في مختلف التطبيقات وقد تم في هذا البحث اختيار توزيع (Kumaraswamy) وسيتم عرض بعض المفاهيم الاساسية التي تساعد في فهم هذا التوزيع وخصائصه وقدير معالمه بطريقتين وتقدير دالة المعولية لكل طريقة والمقارنه بين الطريقتين لايجاد الافضل بينهما.

وتعرف المعولية على انها "احتمال عدم فشل المركبة خلال فترة زمنية معينة (0,t)" ويرمز لها بالرمز R(t) حيث يمكن تعريفها رياضيا: [8:pp. 17]

$$R(t) = pr(T > t)$$
$$= 1 - pr(T \leq t)$$
$$= 1 - F(t) \quad \ldots \ (1)$$

إذ تشير F(t) الى الدالة التراكمية CDF (cumulative distribution function)

3- **توزيع** Kumaraswamy (Kumaraswamy distribution)

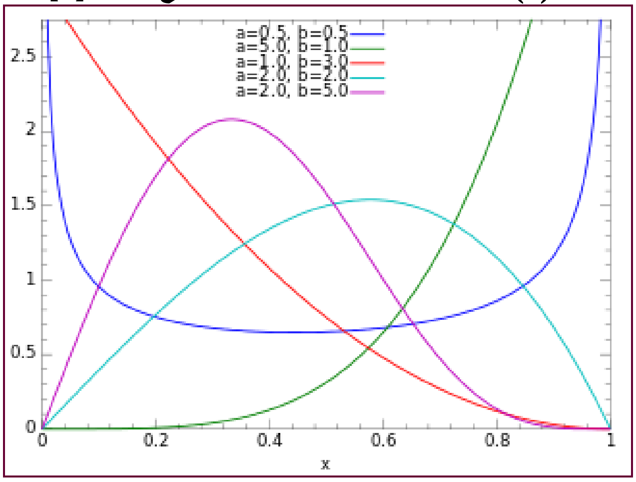
وهو توزيع احتمالي مستمر تم تقديمه سنة (1980) من العالم (poondi kumaraswamy) له معلمتي شكل موجبتين ومحدد بفترة زمنية (0,1) يملك نفس خصائص توزيع (Beta) ويتشابه معه لكن دالة التوزيع التراكمية لهذا التوزيع تأخذ شكلا مغلقا وهذا ما يجعل منه مناسبا للانشطة الكثيفة الحوسبة مثل المحاكاة وتقدير النماذج من الاساليب القائمة مع المحاكاة ويمكن توضيح دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع كما يلي:[6]

$$f(x; a, b) = abx^{a-1}(1 - x^a)^{b-1}, \ 0<x<1; \ \ a,b>0 \qquad \ldots \ (2)$$

أذ إن

a, b: **معلمات الشكل (shape parameters).**

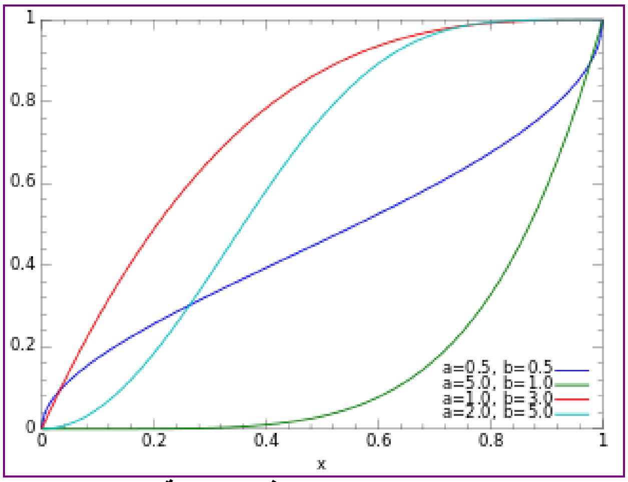
شكل (1) يمثل دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع KW [4]



الدالة التراكمية للتوزيع (Cumulative Distribution Function)
دالة التوزيع التجميعية تمتلك شكلا مغلقا وتعرف وفق الصيغة الآتية:[3]

$$F(x;a,b) = 1-(1-x^{a})^{b}\ ,0 < x < 1\ ;a,b > 0 \qquad \dots \quad (3)$$

شكل (2) يمثل الدالة التجميعية لتوزيع KW [4]



وان دالة المعولية لتوزيع Kumaraswamy بالتعويض في المعادلة (1)

$$R(t) = 1 - F(t)$$
$$R(t) = (1-t^{a})^{b} \qquad \dots \quad (4)$$

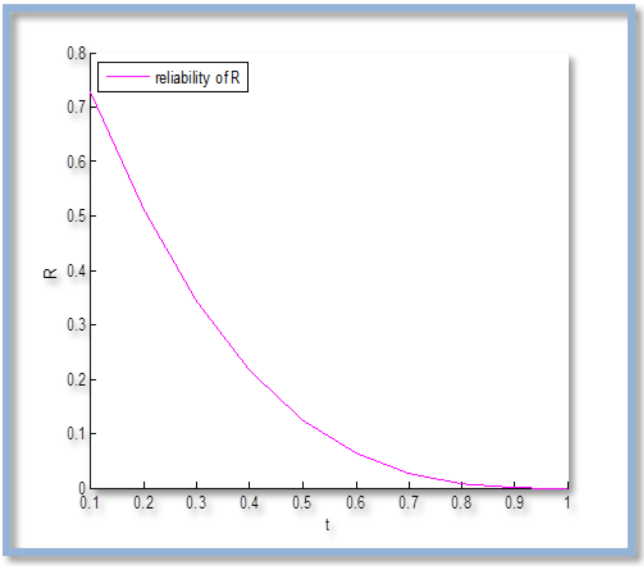
إذ أنَّ $F(t)$: تمثل دالة التوزيع التجميعية Cumulative Distribution Function)cdf)

$R(t)$: تمثل دالة المعولية (Reliability Function)

وهي دالة موجبة مستمرة ومتناقصة لقيم (t) جميعها خلال المدة (0 , t) وان قيمتها بين الصفر والواحد [8]

R(0)=1,R(∞)=0

الشكل *(3)* يمثل دالة المعولية لتوزيع kumaraswamy



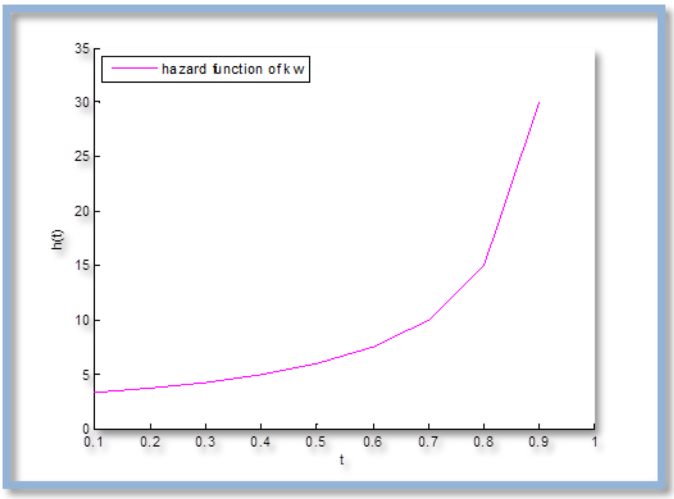
وان دالة الخطورة التجميعية للتوزيع هي: *[9:pp:204]*

$$h(t) = \frac{f(t;a,b)}{R(t)} \quad \ldots \quad (5)$$

$$h(t) = \frac{abt^{a-1}(1-t^a)^{b-1}}{(1-t^a)^b}$$

$$h(t) = \frac{abt^{a-1}}{1-t^a} \quad \ldots \quad (6)$$

شكل(4) يمثل دالة الخطورة لتوزيع Kumaraswamy



4-طرائق التقدير Estimation Methods

4-1 طريقة الامكان الاعظم (Maximum Likelhood Method)

تُعد طريقة الإمكان الأعظم واحدة من الطرائق شائعة الاستعمال والمهمة في التقدير كونها تتضمن خصائص جيدة منها الثبات والكفاءة العالية والإتساق أحياناً.

و بصورة أساسية يتم الافتراض بأن العينة تمثل كل المجتمع ونحن نختار قيمة المُقدَّر الذي يُعظّم دالة الكثافة الإحتمالية *(Probability density function)* إذ يمكن تعريف دالة الإمكان بما يأتي:

إذا كانت $x_1, x_2, \dots x_n$ هي مفردات عينة عشوائية بحجم *n* مسحوبة من مجتمع له دالة كثافة إحتمالية لتوزيع *(kumaraswamy)* ذي المعلمتين *(a,b)* فإن دالة الإمكان الأعظم *Maximum Likelihood (function)*

والتي يرمز لها بالرمز *(L)* هي الدالة الإحتمالية المشتركة لها أي أن:[9-pp:310-311]

$$L = f(x_1, a, b).f(x_2, a, b) \dots f(x_n, a, b) \quad \dots \quad (7)$$

$$L = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, a, b) \quad \dots \quad (8)$$

وعليه فإن دالة الإمكان الأعظم لتوزيع *kumaraswamy* تكون بالشكل الآتي:

$$L(x_1, x_2 \dots x_n, a, b) = a^n b^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{a-1} \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i^a)^{b-1} \quad \dots (9)$$

ولغرض تقدير دالة الإمكان يجب تحويلها إلى الشكل الخطي وذلك من خلال أخذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي المعادلة

$$Ln\, L = n \ln a + n \ln b + (a-1) \sum_{i=1}^{n} \ln x_i + (b-1) \sum_{i=1}^{n} \ln(1 - x_i^a) \quad \dots (10)$$

ولإيجاد القيمة التقديرية للمعلمتين *a* و *b* نجد المشتقة للدالة نسبة إلى المعلمتان *a* و *b*

$$\frac{\partial \ln L}{\partial a} = \frac{n}{a} + 0 + \sum_{i=0}^{n} \ln x_i - (b-1) \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^a \ln x_i}{1 - x_i^a} \quad (11)$$

بجعل المعادلة (11) مساوية للصفر

$$\frac{n}{\hat{a}} + 0 + \sum_{i=0}^{n} \ln x_i - (\hat{b} - 1) \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{\hat{a}} \ln x_i}{1 - x_i^{\hat{a}}} = 0$$

$$\frac{n}{\hat{a}} = - \sum_{i=0}^{n} \ln x_i + (\hat{b} - 1) \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{\hat{a}} \ln x_i}{1 - x_i^{\hat{a}}}$$

$$\hat{a} = \frac{n}{- \sum_{i=0}^{n} \ln x_i + (\hat{b} - 1) \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{\hat{a}} \ln x_i}{1 - x_i^{\hat{a}}}} \quad (12)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial b} = \frac{n}{b} + \sum_{i=1}^{n} \ln(1 - x_i^a) \quad (13)$$

وجعل المعادلة (13) مساوية الى الصفر ايضا

$$\frac{n}{b} + \sum_{i=1}^{n} \ln(1 - x_i^a) = 0$$

$$\hat{b} = \frac{-n}{\sum_{i=1}^{n} \ln(1 - x_i^{\hat{a}})} \quad \dots \quad (14)$$

تبين أن تقدير كل من المعلمتين a و b في المعادلتين (12) (14) لا يمكن الحصول عليه بالطرائق الاعتيادية في التقدير لكونها معادلات لا خطية لذلك سيتم استعمال طريقة نيوتن رافسون التكرارية لحل المعادلتين بالنسبة الى a,b عموديا ويتم الحصول على مقدر الامكان الأعظم لكل معلمة من خلال منظومة المعادلات التكرارية التالية:

يفترض أن كل من المعادلة (11) مساوية الى :

$$l_1(a, b) = \frac{\partial \ln L}{\partial a}$$

والمعادلة (13)

$$l_2(a,b) = \frac{\partial \ln L}{\partial b}$$

لذا فان

$$g(a,b) = \begin{pmatrix} l_1(a,b) \\ l_2(a,b) \end{pmatrix} \quad \dots (15)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix}^{i+1} = \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix}^{i} - g(a,b)\left(J(a,b)\right)^{-1} \quad \dots (16)$$

إذ أن

$$J(a,b) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 l_1(a,b)}{\partial a} & \frac{\partial^2 l_1(a,b)}{\partial b} \\ \frac{\partial^2 l_2(a,b)}{\partial a} & \frac{\partial^2 l_2(a,b)}{\partial b} \end{bmatrix}$$

وبالاعتماد على قيم ابتدائية للمعلمات .... $i=1,2,3$ وبتكرار المعادلة الى عدد من المرات الى ان تستقر النتائج ويتم الحصول على المقدرات فاذا كانت ($\hat{a}_{MLE}$)و($\hat{b}_{MLE}$) هي مقدرات طريقة الامكان الاعظم فان مقدر دالة المعولية

$$R(t) = \left(1 - x^{\hat{a}_{MLE}}\right)^{\hat{b}_{MLE}} \quad \dots (17)$$

<u>4-2 **طريقة بيز** (Bayes Method) [7:pp:31-32]</u>

ان الاهتمام بنظرية بيز يرجع إلى أواسط القرن الثامن عشر , ومن مؤيدي مدرسة بيز والذين يعتبرون من كبار الإحصائيين الذين كتبوا بحوثاً ونشروا مؤلفات عديدة مستعملين أسلوب بيز .

ان طريقة بيز في التقدير تفترض أن المعلمة المراد تقديرها هي متغير عشوائي لذلك ولغرض تقديرها لابد من توفر معلومات أولية مسبقة عنها بصيغة التوزيع الأولي (Prior Distribution) لهذه المعلمة وفي اسلوب بيز في التقدير يتم دمج الدالة الاحتمالية لهذا التوزيع مع دالة الإمكان للمشاهدات باستعمال قاعدة بيز العكسية وبهذا سيتم الحصول على الدالة الكثافة الاحتمالية اللاحقة (Posterior p.d.f) للمعلمة العشوائية.

سيتم ايجاد مقدر بيز لمعلمات الشكل a,b باستعمال اسلوب بيز باعتبار انها متغيرات عشوائية تتبع توزيع كاما بالمعلمات d,c حيث أن توزيع المشاهدات x هو توزيع kumaraswamy وكما معرف في المعادلة (2)

$$\pi_1(a) = \frac{d_1^{\,c_1}}{\Gamma c_1} a^{c_1-1} e^{-d_1 a} \quad \dots (18)$$

$$\pi_2(b) = \frac{d_2^{\,c_2}}{\Gamma c_2} b^{c_2-1} e^{-d_2 b} \quad \dots (19)$$

عندما $a,b > 0$ وكل من $c_1 c_2 > 0$, $d_1 d_2 > 0$

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i, a, b)\ \pi(a)\pi(b) = k_1\, a^{n+c_1-1}\, b^{n+c_2-1}\, e^{-d_1 a}\, e^{-d_2 b} \prod_{k=1}^{n} x_k^{a-1} \prod_{k=1}^{n} (1 - x_k^{a})^{b-1} \quad \dots (20)$$

$$= k_1 \Psi \quad \dots (21)$$

$$\Psi = a^{n+c_1-1}\, b^{n+c_2-1} e^{-d_1 a - d_2 b + (a-1)\sum_{k=1}^{n} \log[x_k] + (b-1)\sum_{k=1}^{n} \log(1 - x_k^{a})} \quad \dots (22)$$

لذلك فان joint posterior density ل (data, a,b) يعطي البيانات التي يمكن الحصول عليها كما في الشكل التالي

$$\pi_s(a,b\backslash data) = \frac{\prod_{i=1}^{n} f(x_i,a,b)\,\pi(a)\pi(b)}{\int_0^\infty\int_0^\infty \prod_{i=1}^{n} f(x_i,a,b)\,\pi(a)\pi(b)\,da\,db} = \frac{\Psi}{\int_0^\infty\int_0^\infty \Psi\,da\,db} \quad \dots(23)$$

وفقا لذلك , pdf posterior ل *a,b* هي

$$\pi_{a,s}(a/data) = \frac{\int_0^\infty \Psi db}{\int_0^\infty\int_0^\infty \Psi\,da\,db} \quad \dots(24)$$

$$\pi_{b,s}(b/data) = \frac{\int_0^\infty \Psi da}{\int_0^\infty\int_0^\infty \Psi\,da\,db} \quad \dots(25)$$

تقدير بيز للمعلمات a,b يشار اليه ب $\hat{a}_{Bs,s}$ و $\hat{b}_{Bs,s}$ نسبة الى دالة الخسارة لمربعات الخطا وتعرف كما يلي

$$\hat{a}_{Bs} = E(a;data) = \frac{\int_0^\infty\int_0^\infty a\Psi db\,da}{\int_0^\infty\int_0^\infty \Psi\,da\,db} \quad \dots(26)$$

و ان

$$\hat{b}_{Bs} = E(b;data) = \frac{\int_0^\infty\int_0^\infty b\Psi da\,db}{\int_0^\infty\int_0^\infty \Psi\,da\,db} \quad \dots(27)$$

ومقدر المعولية يمكن ايجاده من المعادلة التالية

$$\hat{R}_{bayes}(t) = \iint R(t)\,\pi_s(a,b\backslash data)\,da\,dy \quad \dots \quad (28)$$

ويتم استعمال الطرائق العددية عن طريق برنامج *Matlab* في حساب التكامل لايجاد مقدر المعولية بالاعتماد على اسلوب *Bayes* .

5- مراحل تجربة المحاكاة

تم كتابة برنامج المحاكاة بإستعمال برنامج R وتتضمن صياغة إنموذج المحاكاة أربعة مراحل أساسية ومهمة لتقدير معالم التوزيع ودالة المُعولية لتوزيع kumaraswamy وهي على التوالي:

<u>المرحلة الأولى - مرحلة تحديد القيم الإفتراضية:</u>

تعد مرحلة اختيار القيم الافتراضية من المراحل الاساسية التي تعتمد عليها خطوات البرنامج وقد تم اختيار القيم الافتراضية كالاتي:-

1-تم اختيار قيم افتراضية مختلفة لمعالم التوزيع وجرى تشكيل ستة نماذج وكما مبين في الجدول الآتي:

جدول (1) يمثل القيم الافتراضية لمعالم توزيع kumaraswamy

Cases	A	b
A	2	4
B	2	5
C	2	6
D	3	4
E	3	5
F	3	6

2- تم اختيار أربعة أحجام مختلفة للعينة وكانت :

n=10,20,30,50,70

3-تم اختيار ستة اوقات لتقدير دالة المعولية وكالاتي:

t=0,0.2,0.4,0.6,0.8,1

4- كان تكرار كل تجربة مساويا الى (1000)

المرحلة الثانية- مرحلة توليد البيانات:

وهي مرحلة إختيار القيم الإفتراضية، إذ تُعَّد من المراحل المهمة التي تعتمد المراحل الأخرى عليها، وفي هذه المرحلة يتم توليد المتغير العشوائي الذي يتبع توزيع kumaraswamy ذو المعلمتين وفق طريقة مونت كارلو بتطبيق طريقة التحويل المعكوس من خلال مساواة الدالة التجميعية للتوزيع المقترح بقيمة مشاهدة مولدة من قبل الحاسبة تتبع التوزيع المنتظم على الفترة [0,1] باستعمال الصيغة (3):

$$u = 1 - (1 - x^a)^b \quad \ldots \quad (29)$$

$$1 - u = (1 - x^a)^b$$

بأخذ الجذر للطرفين نسبة الى b

$$\sqrt[b]{1 - u} = 1 - x^a$$

$$x^a = 1 - \sqrt[b]{1 - u}$$

باخذ الجذر للطرفين نسبة الى a

$$x = \sqrt[a]{1 - \sqrt[b]{1 - u}}$$

$$x = \left(1 - (1 - u)^{\frac{1}{b}}\right)^{\frac{1}{a}} \quad \ldots (30)$$

المرحلة الثالثة – مرحلة التقدير

في هذه المرحلة يتم اجراء عملية التقدير لمعلمات ودالة المعولية لتوزيع kumaraswamy باستعمال طرائق التقدير المذكورة انفا وسيتم ايجاد مقدرات لمعلمات ومعولية التوزيع .

المرحلة الرابعة- مرحلة المقارنة بين الطرائق

لغرض المقارنة بين طرائق التقدير المختلفة للمعلمات وإيجاد أفضل المقدرات لابد من استعمال معايير إحصائية عن طريقها يمكن معرفة مقدار ابتعاد القيمة أو الدالة المقدرة عن قيمتها الحقيقية , هنالك العديد من المقاييس الإحصائية المستعملة لهذا الغرض وسيتم استعمال متوسط مربعات الخطأ (MSE) في هذه الدراسة , إذ كلما كانت قيمته صغيرة كلما كان المقدر هو الأفضل وذلك وفق الصيغة الاتية :

$$MSEr = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(R(t_i) - \hat{R}(t_i)\right)^2 \quad \ldots (31)$$

مناقشة نتائج تجربة المحاكاة

سنتناول في هذا القسم عرض وتحليل نتائج المحاكاة التي توصلنا الى افضل مقدر لتقدير دالة المعولية للتوزيع المفترض وذلك بالاعتماد على المقياس الاحصائي متوسط مربعات الخطأ(MSE) وفيما يلي النتائج الموضحة في الجداول :-

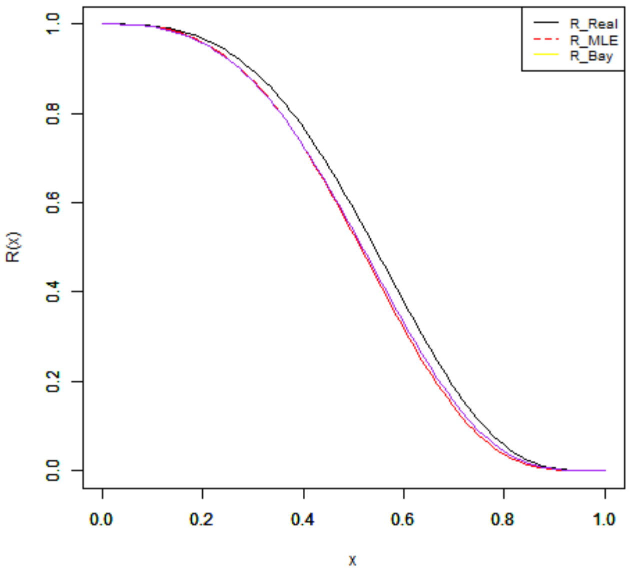
الجدول (2) يبين قيم متوسط مربعات الخطأ Mse للتوزيع المستعمل ولحجوم عينات مختلفة وقيمة المعلمتين (a=2,b=4)(a=2,b=5)(a=2,b=6)(a=3,b=4)(a=3,b=5)(a=3,b=6) وافضل طريقة مستعملة

Size of n	a	b	Mse_{mle}	Mse_B	best
10	2	4	0.0096749	0.0046209	bayes
	2	5	0.0108083	0.0054400	bayes
	2	6	0.0109522	0.0054035	bayes
	3	4	0.008717425	0.00493191	bayes
	3	5	0.01175011	0.00801562	bayes
	3	6	0.01172677	0.00892451	bayes
20	2	4	0.0055455	0.0029919	bayes
	2	5	0.0079258	0.0046823	bayes
	2	6	0.0058424	0.0031901	bayes
	3	4	0.00587803	0.00406021	bayes
	3	5	0.005529868	0.00401910	bayes
	3	6	0.004827199	0.00387677	bayes

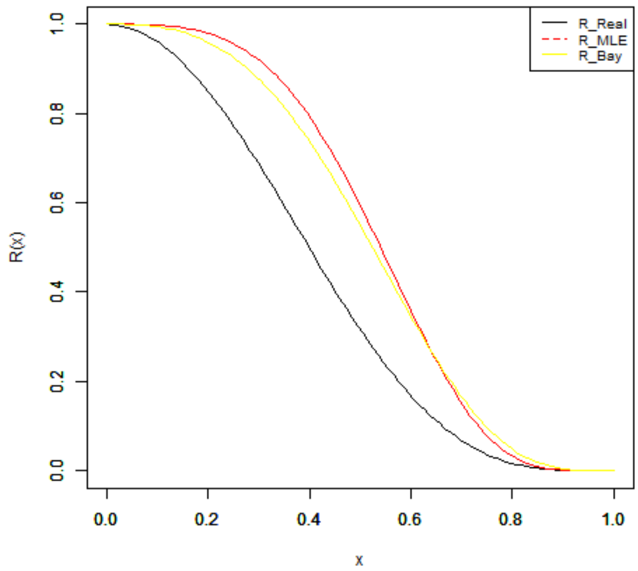
30	2	4	0.0035379	0.0019394	bayes
	2	5	0.0039835	0.0026839	bayes
	2	6	0.0041157	0.0025418	bayes
	3	4	0.004457727	0.00340976	bayes
	3	5	0.004422352	0.00355917	bayes
	3	6	0.004087745	0.00345204	bayes
50	2	4	0.0018758	0.0011494	bayes
	2	5	0.0022534	0.0014821	bayes
	2	6	0.0020531	0.0012699	bayes
	3	4	0.002013051	0.00160672	bayes
	3	5	0.001698227	0.00132929	bayes
	3	6	0.002431222	0.00194625	bayes
70	2	4	0.0018312	0.0012579	bayes
	2	5	0.0014377	0.0010531	bayes
	2	6	0.0016649	0.0012651	bayes
	3	4	0.001545155	0.00131739	bayes
	3	5	0.001465174	0.00108435	bayes
	3	6	0.001877996	0.00147541	bayes

من خلال النتائج المبينة في الجدول (2) واختيار قيم مختلفة للمعلمات (a=2 b=4 ,a=2 b=5 ,a=2 b=6 ,a=3 b=4 , a=3 b=5 , a=3 b=6) وبعد المقارنه من خلال المعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطأ (MSE) للتوزيع لكل من الطريقتين التقديريتين نلاحظ ان طريقة بيز Bayes هي الافضل في تقدير المعلمتين للحالات ولجميع حجوم العينات (n=10,20,30,50,70) وذلك لكون قيمة MSE كانت اقل مقارنه مع طريقة الامكان الاعظم MLE.

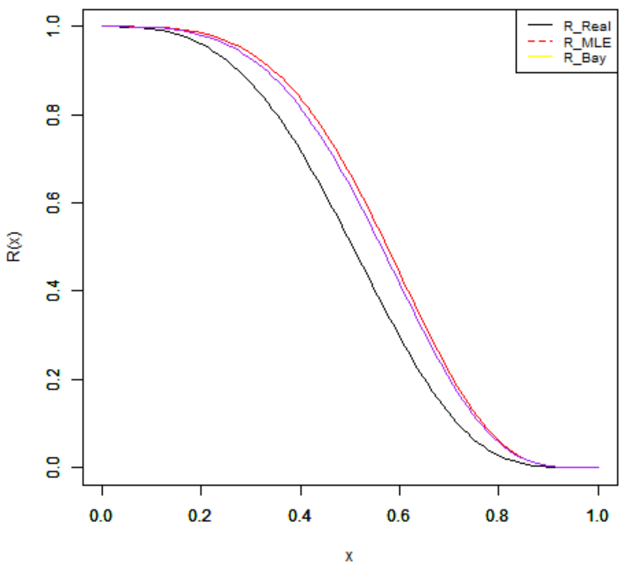
فمثلا في الحالة الاولى عند حجم عينة (n=10) وعند اختيار قيمة (a=2 ,b=4) وباستعمال برنامج المحاكاة ستكون قيمة متوسط مربعات الخطأ (MSE_B=0.0046209) و قيمة (MSE_{MLE}=0.0096749) وقيمته عند استعمال طريقة بيز اقل من قيمته باستعمال طريقة الامكان الاعظم وهكذا لبقية القيم.



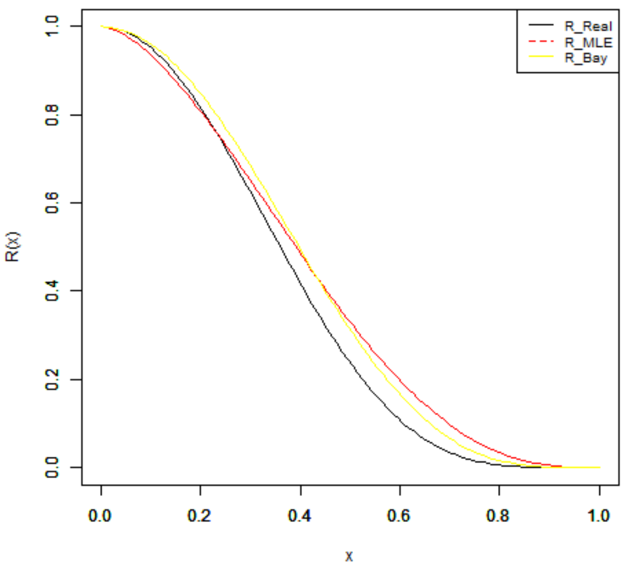
(a=3,b=4)



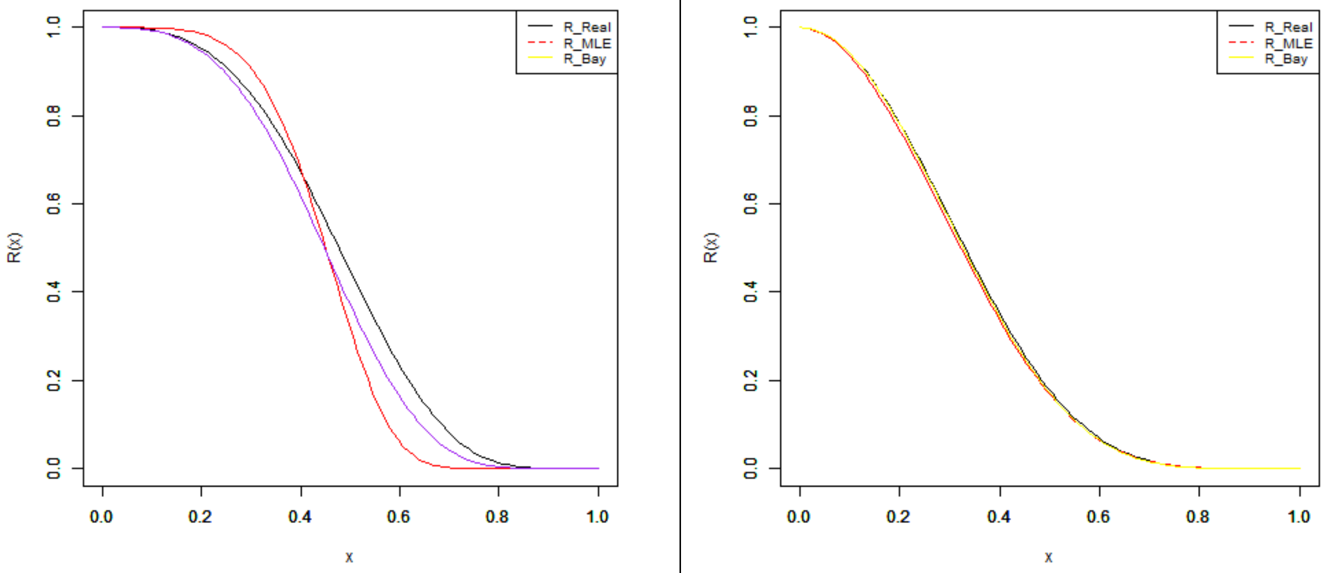
(a=2,b=4)



(a=3,b=5)

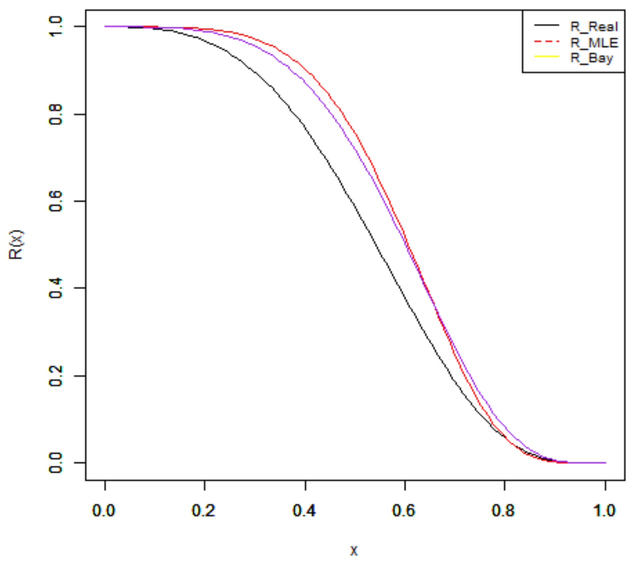


(a=2,b=5)

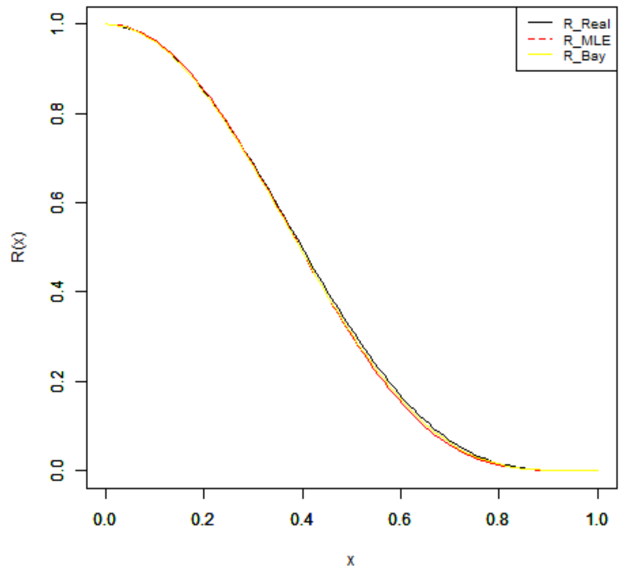


(a=2,b=6) (a=3,b=6)

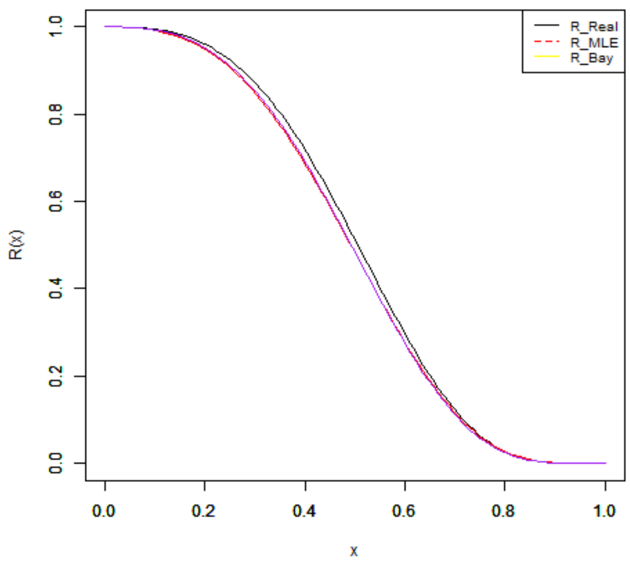
الشكل (5) يوضح تقدير دالة المعولية للطريقتين (الامكان الاعظم MLEو بيز Bayes) عند حجم عينة n=10



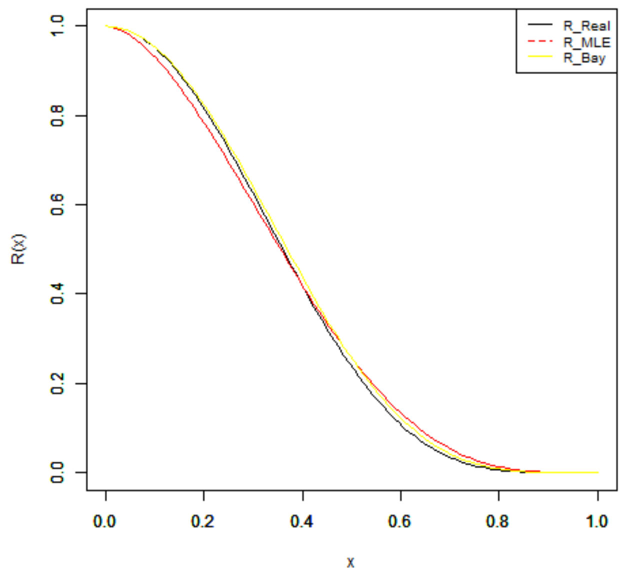
(a=3,b=4)



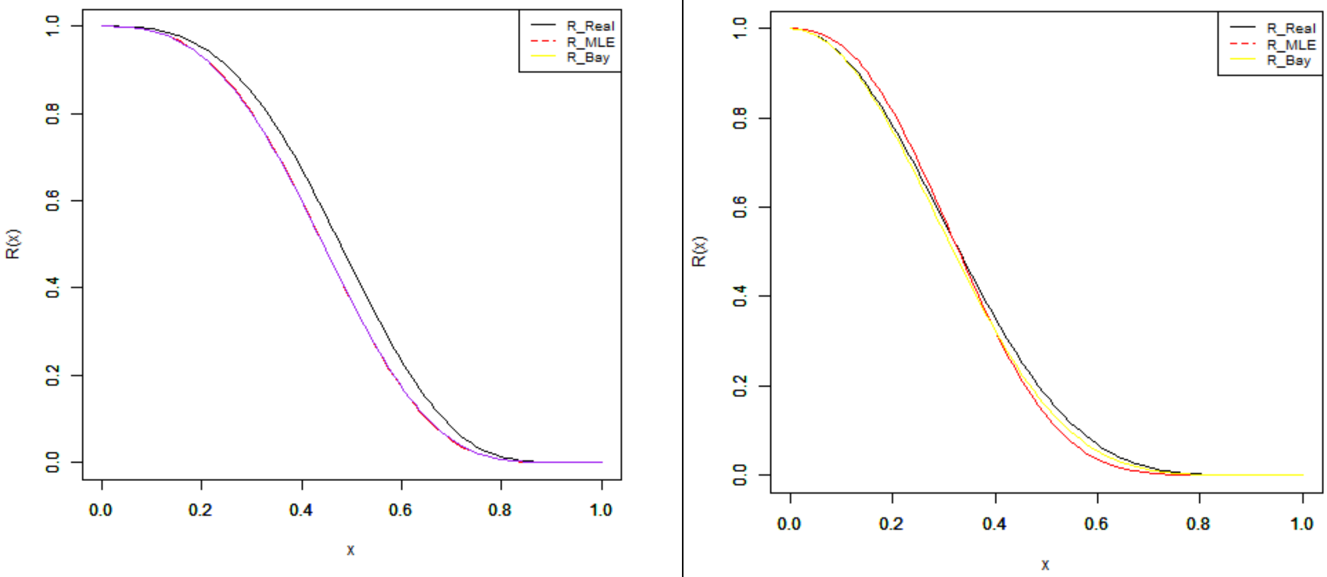
(a=2,b=4)



(a=3,b=5)



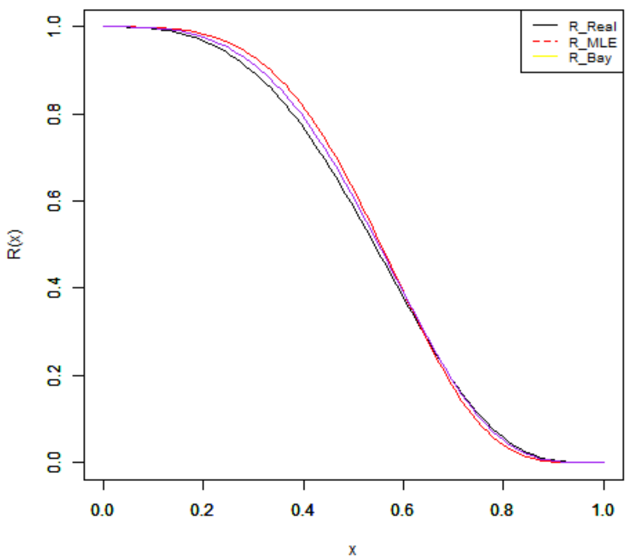
(a=2,b=5)



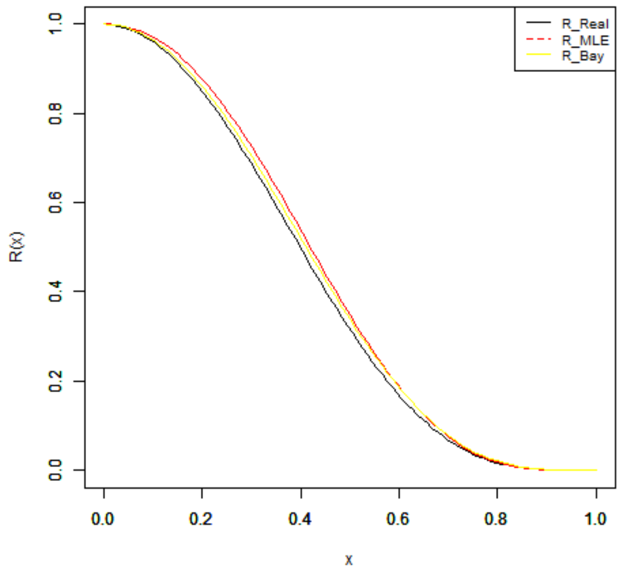
(a=3,b=6)

(a=2,b=6)

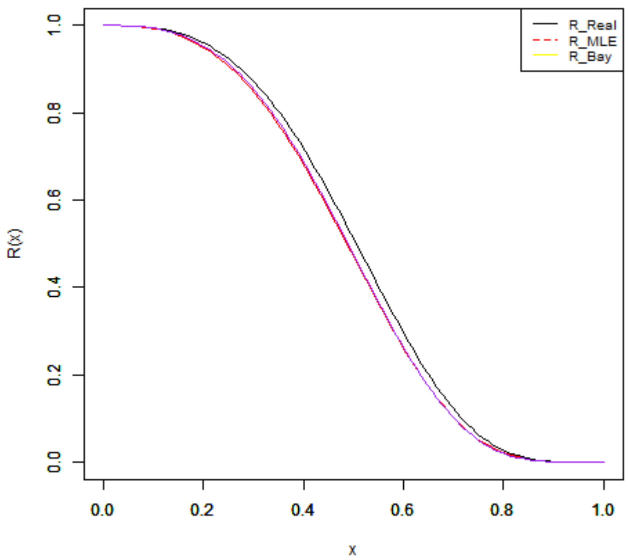
الشكل (6) يوضح تقدير دالة المعولية للطريقتين (الامكان الاعظم MLE وبيز Bayes) عند حجم عينة n=20



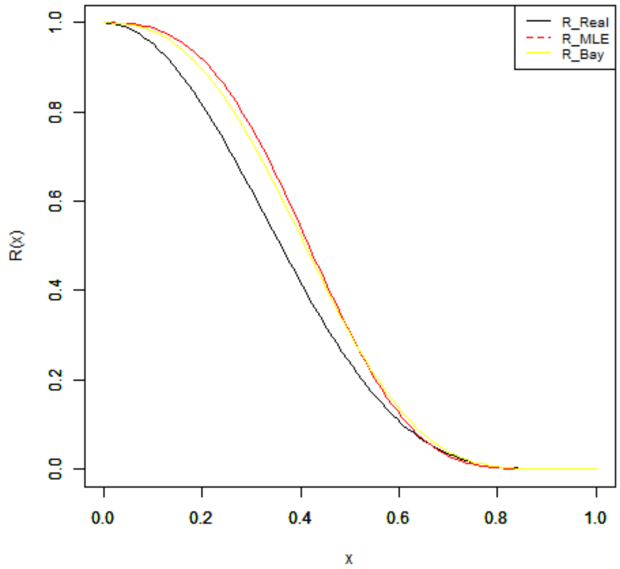
(a=3,b=4)



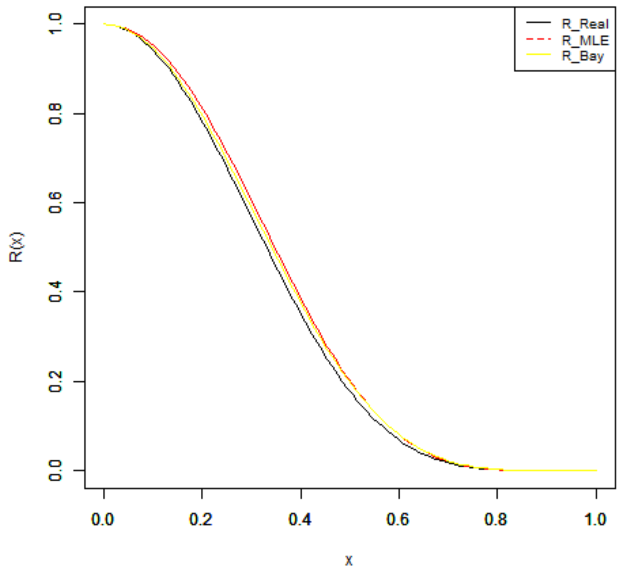
(a=2,b=4)



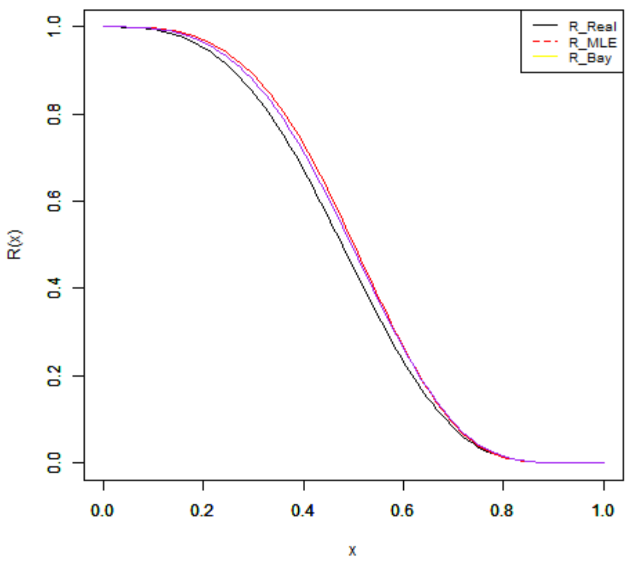
(a=3,b=5)



(a=2,b=5)

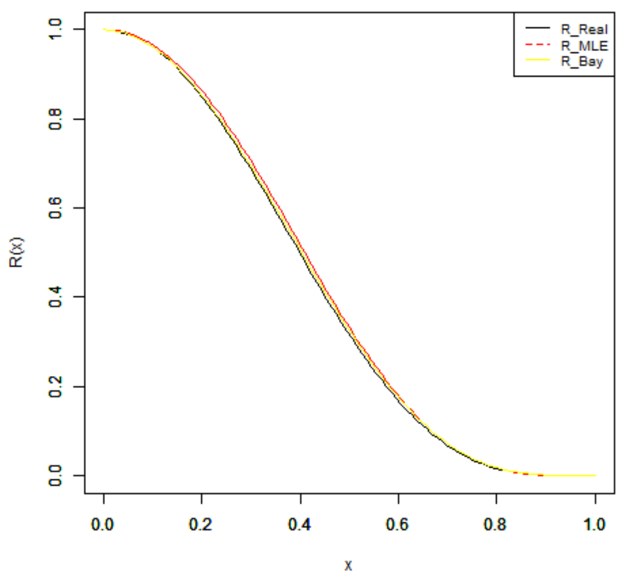


(a=2,b=6)

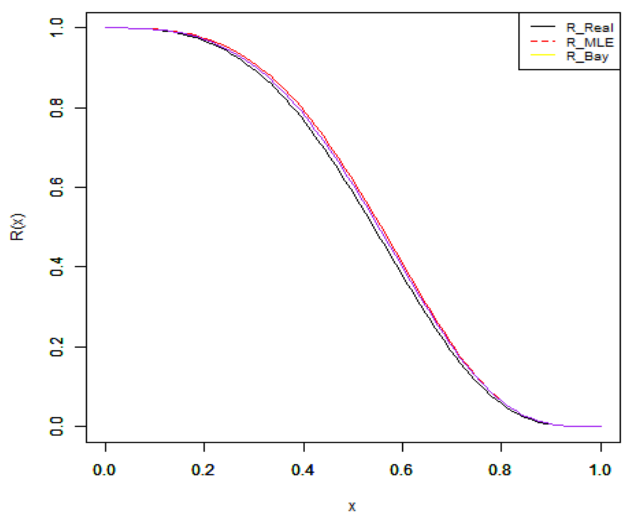


(a=3,b=6)

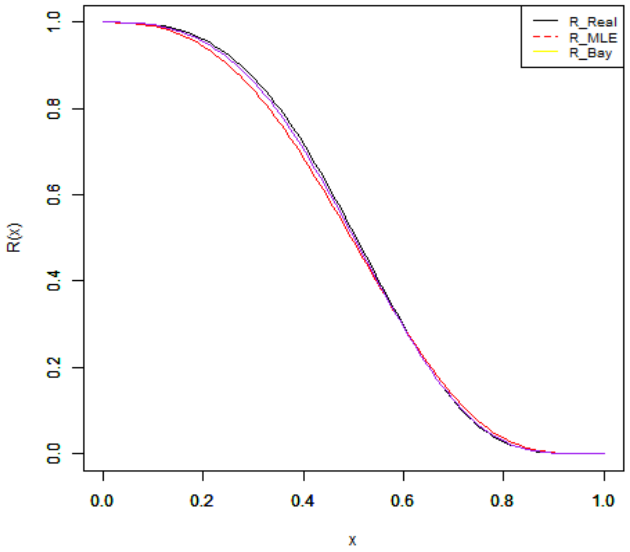
الشكل (7) يوضح تقدير دالة المعولية للطريقتين (الامكان الاعظم MLE وبيز Bayes) عند حجم عينة n=30



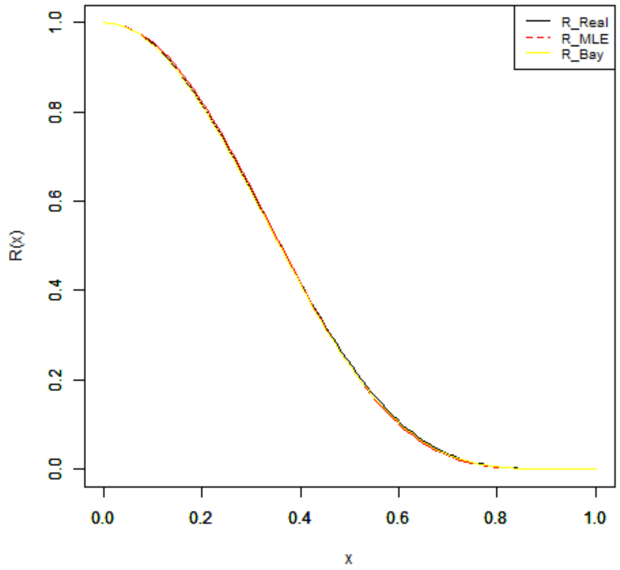
(a=2,b=4)



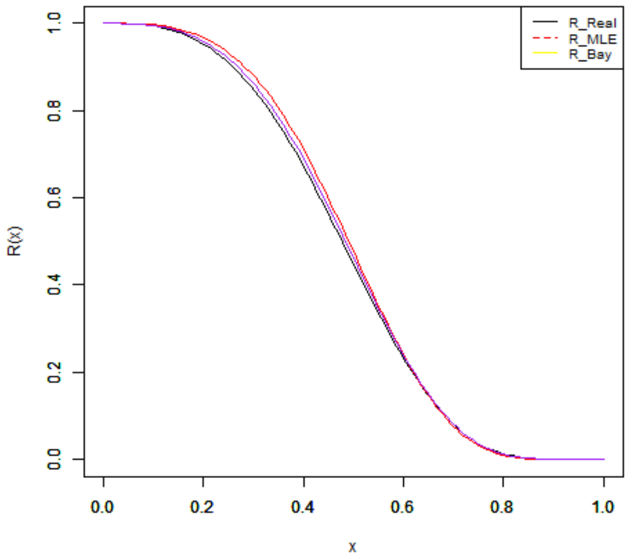
(a=3,b=4)



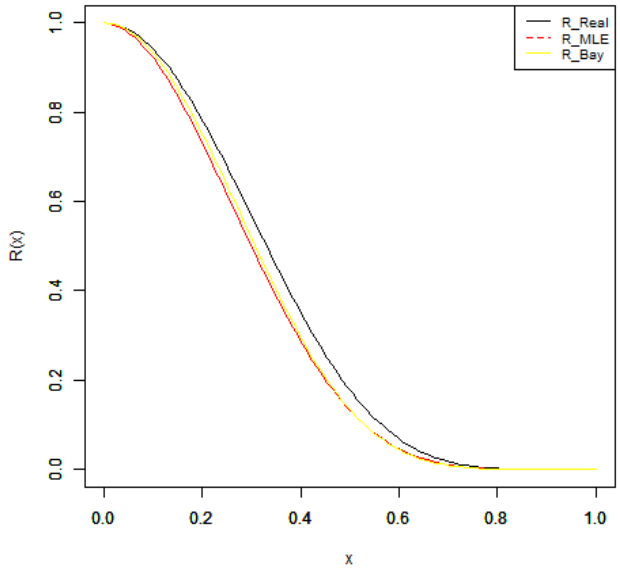
(a=3,b=5)



(a=2,b=5)

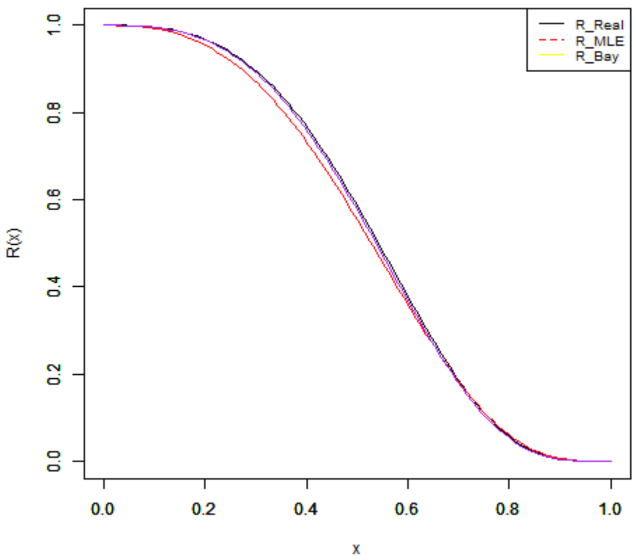


(a=3,b=6)

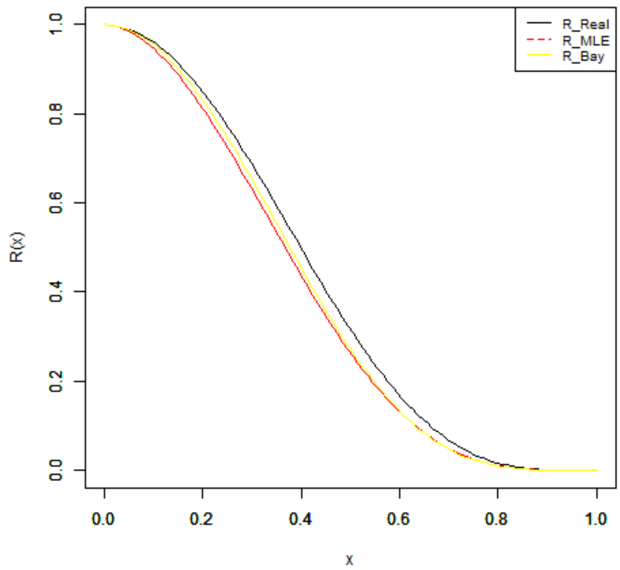


(a=2,b=6)

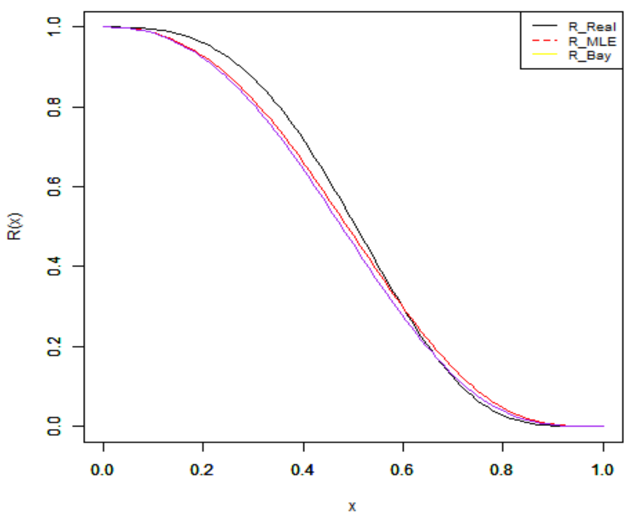
الشكل (8) يوضح تقدير دالة المعولية للطريقتين (الامكان الاعظم MLE وبيز Bayes) عند حجم عينة n=50



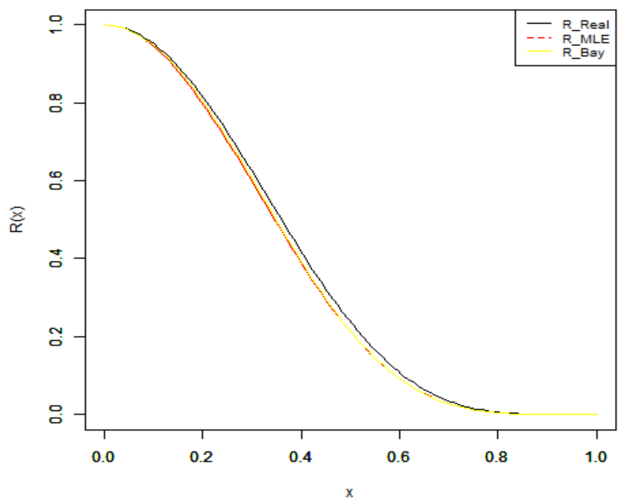
(a=3,b=4)



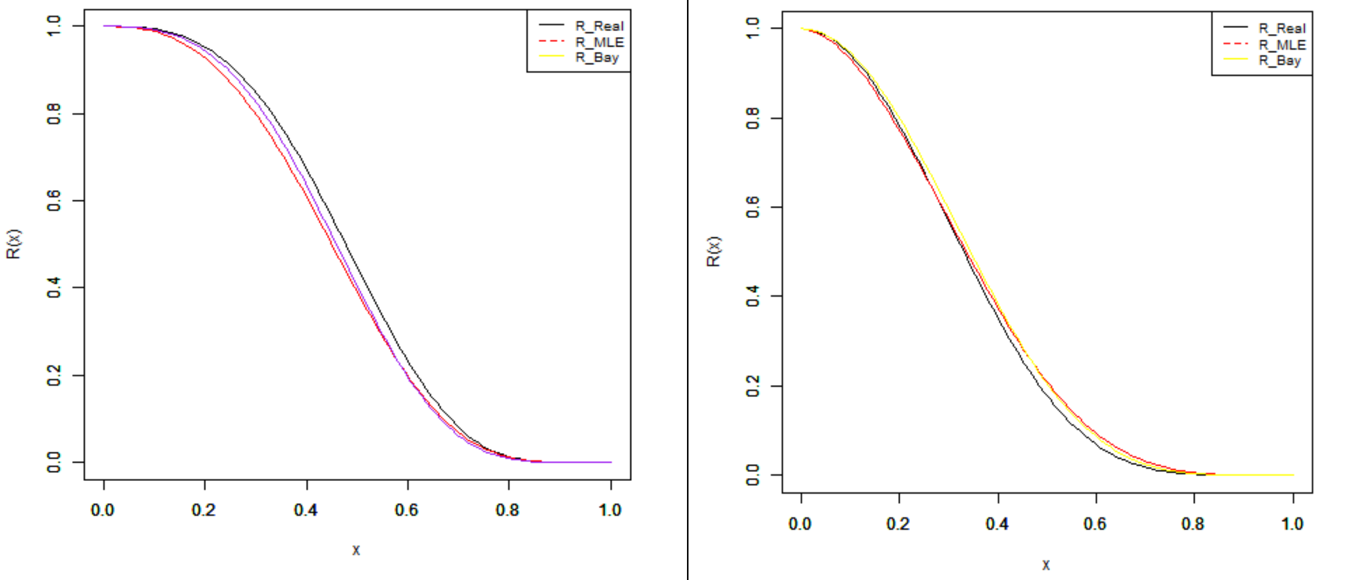
(a=2,b=4)



(a=3,b=5)



(a=2,b=5)



(a=3,b=6)

(a=2,b=6)

الشكل (8) يوضح تقدير دالة المعولية للطريقتين (الامكان الاعظم MLE وبيز Bayes) عند حجم عينة n=70

الاستنتاجات

- من خلال تنفيذ تجارب المحاكاة وبناءاً على ما تم تحليله من نتائج وبالمقارنة بين الطرائق المختارة تبين أن طريقة بيز هي الافضل بالنسبة لجميع الحالات ولجميع احجام العينات كما موضح في الجداول.
- نلاحظ من الجداول لكل الحالات ان قيم متوسط مربعات الخطأ يتناقص كلما ازداد حجم العينة .
- مقدرات طريقة الامكان الاعظم كانت جيدة الا انها ليست كما هو الحال في المقدرات البيزية وعليه نوصي باعتماد طريقة بيز في التقدير لانها توظف كل المعلومات السابقة حول المعلمة في التقدير اللاحق لها.

References

1 Bourguignon, M., Silva, R. B., Zea, L. M., & Cordeiro, G. M. (2013). "The kumaraswamy Pareto distribution". Journal of Statistical Theory and Applications, 12(2), 129-144.

2 Dey, S., Mazucheli, J., & Nadarajah, S.(2018). "Kumaraswamy distribution: different methods of estimation". Computational and Applied Mathematics, 37(2), 2094-2111.

3 Eldin, M. M., Khalil, N., & Amein, M. (2014)." Estimation of parameters of the Kumaraswamy distribution based on general progressive type II censoring". American Journal of Theoretical and Applied Statistics, 3(6), 217-222.

4 https://en.wikipedia.org/wiki/kumaraswamy_distribution

5 Jones, M. C. (2009). "Kumaraswamy's distribution: A beta-type distribution with some tractability advantages". Statistical Methodology, 6(1), 70-81
6 Kumaraswamy, P. (1980). "A generalized probability density function for double-bounded random processes". Journal of Hydrology, 46(1-2), 79-88.
7 Mohamed A.Hussian(2014),"Bayesian and Maximum Likelihood Estimation for Kumaraswamy Distribution Based on Ranked Set Sampling",American Journal of Mathematics and Statistics 2014,4(1):30-37
8 Rausand, M., & Høyland, A. (2004). "System reliability theory: models, statistical methods, and applications (Vol. 396). John Wiley & Sons.
9 Ronald E. W,Raymond H.M,Sharon L.M & Keying ye(2007)."Probability & Statistics for Engineers & Scientists".

Estimating the reliability function of Kumaraswamy distribution data

Abstract

The aim of this study is to estimate the parameters and reliability function for kumaraswamy distribution of this two positive parameter (a,b > 0), which is a continuous probability that has many characterstics with the beta distribution with extra advantages.

The shape of the function for this distribution and the most important characterstics are explained and estimated the two parameter (a,b) and the reliability function for this distribution by using the maximum likelihood method (MLE) and Bayes methods. simulation experiments are conducts to explain the behaviour of the estimation methods for different sizes depending on the mean squared error criterion the results show that the Bayes is better than the ML.