Properties of Kumaraswamy binary Distribution and compare methods of estimating parameters

خصائص توزيع كوماراسوامي الثنائي والمقارنة بين بعض طرائق تقدير معلماته

م. م. احمد رزاق عبد/ كلية الإدارة والاقتصاد/ جامعة واسط/ العراق (1)

م. م. اياد حبيب شمال/ كلية الإدارة والاقتصاد/ جامعة ديالى/ العراق (2)

[1]ahmedrazzaq@uowasit.edu.iq [2] ayad@ecomang.uodiyala.edu.iq

P - ISSN 2518 - 5764
E - ISSN 2227 - 703X

Received:17/6/2019
Accepted: 28/10/2019

مستخلص البحث:

ان التطور الحديث في علم الإحصاء جعل من التوزيعات الإحصائية محل انظار الباحثين خاصتاً في عملية التعويض عن بعض معلمات التوزيعات بقيم ثابتة والحصول على توزيع جديد، ففي هذا البحث تم دراسة توزيع كوماراسوامي وهو من التوزيعات المستمرة ثنائي المعلمات المحددة اذ تم التطرق الى خواص التوزيع من خلال عرض (دالة الكثافة الاحتمالية p.d.f، ودالة التوزيع التراكمية c.d.f.، والعزوم من الرتبة r، ودالة المعولية Reliability ودالة المخاطرة hazard).

اضافة الى ذلك تم تقدير معلمات توزيع كوماراسوامي بطراق التقدير (MLE, ME, LSDE) من خلال استعمال أسلوب المحاكاة لأحجام عينات مختلفة وباستعمال قيم أولية للمعلمات وتم المقارنة بين طراق تقدير المعلمات على أساس متوسط مربعات الخطأ للمعلمات وكانت النتائج تدل على ان تقدير المعلمات بطريقة الإمكان الأعظم MLE أفضل من مقدرات العزوم ME ومقدرات المربعات الصغرى المطورة LSDE.

المصطلحات الرئيسة للبحث/ توزيع كوماراسوامي، مقدرات الإمكان الأعظم، مقدرات العزوم، مقدرات المربعات الصغر المطورة.

Journal of Economics and Administrative Sciences
2020; Vol. 26 , No.117
Pages: 507- 520

1- المقدمة Introduction

تزايد الاهتمام في الآونة الاخيرة في نمذجة بعض البيانات وايجاد نماذج وتوزيعات مناسبة لمجموعات البيانات حيث هناك العديد من البيانات لعديد من الظواهر لا يمكن التعرف على نوع التوزيع الذي تتبعه.

وان توزيع بيتا وهو من التوزيعات المستمرة (Continuous distributions) ومتعدد الاستخدام في الكثير من الدراسات وخاصة توزيعات بيتا المعممة (Generalized Beta Distribution) وقام العديد من الباحثين بتطوير هذه النماذج من التوزيعات حيث قدم Eugene واخرون (2002) فئة عامة من التوزيعات وعرفوا توزيع بيتا الطبيعي، كما وقدم كل من Nadarajaha وKots (2004) توزيع بيتا ودمجه مع التوزيع الاسي وغيرهم الكثير من المحاولات لإيجاد النماذج المناسبة لظواهر معينة ومع ذلك فان كل هذه الاعمال تؤدي الى بعض الصعوبات الرياضية لان توزيع بيتا ليس من التوزيعات الاحتمالية القابلة للتتبع الى حد ما حيث ان دالته التراكمية غير محدودة. لذا من هنا جاء Poondi Kumaraswamy 1980 باقتراح توزيعا احتماليا جديدا للمتغيرات ذات الحدود الدنيا والعليا المحددة وهو مشابه لتوزيع بيتا هو توزيع كوماراسوامي Kumaraswamy Distribution. [Ghosh, (2017)]وله خصائص مماثلة لتلك الخاصة بتوزيع بيتا .

- If $X \sim Beta(1,b)$ then $X \sim k(1,b)$
- If $X \sim Beta(a,1)$ then $X \sim k(a,1)$
- If $X \sim K(a,b)$, then $X \sim GB1(a,1,1,b)$

و GB1 تعني توزيع بيتا المعمم من النوع الأول.

وقام الباحث (Eldin) واخرون في عام (2014)م اقتراح طريقة تقدير معلمات توزيع كوماراسوامي باستعمال الطريقة الهجينة وكذلك قام الباحث (Ghosh Indranil) في عام (2017) بدراسة توزيع كوماراسوامي في حالة عدم توفر دقة المعلومات.

ولإجراء مسح تفصيلي لخصائص توزيع كوماراسوامي، ان هذا التوزيع له علاقة وثيقة مع بيتا وبيتا معممة (النوع الأول) المدرجة أدناه:[Jones M.S. (2009)]

يعد توزيع كوماراسوامي مجموعة من توزيع الاحتمالات المستمرة المعرفة على الفترة [c,b] ولديه ميزة وهي ان دالته التراكمية مغلقة الشكل وبالتالي يكون هذا الانموذج مناسبا للحالات التي يستخدم فيها توزيعات الاحتمال التي لها حدود اقل ولا نهائية لتناسب البيانات عندما تكون الحدود محددة في الواقع كما في بعض الظواهر الطبيعية التي لها حدود دنيا وعليا غير معلومة كدرجات حرارة الغلاف الجوي او معرفة معدل البقاء على قيد الحياة لمرضى السرطان بعد اخذهم اول جرعة من الدواء الكيميائي. [Mitnik , (2013)]

ومن هنا جاءت أهمية البحث بعرض توزيع كوماراسوامي المعمم Generalized Kumaraswamy Distribution وكيفية تحويلة الى توزيع كوماراسوامي القياسي (توزيع كوماراسوامي بمعلمتين) وعرض اهم خصائص هذا التوزيع ومن ثم المقارنة بين طرائق تقدير معلماته بأسلوب المحاكاة للوصول الى أفضل طريقة لتقدير معلمات التوزيع.

2- **توزيع كوماراسوامي** Kumaraswamy Distribution :

توزيع كوماراسوامي هو توزيع مستمر مع حدود مزدوجة مغلقة يشبه الى حد كبير توزيع بيتا لذا يمكن استعماله لنمذجة العديد من العمليات العشوائية، ان أحد الاختلافات بين توزيع كوماراسوامي وتوزيع بيتا ان دالة التوزيع التراكمي لتوزيع كوماراسوامي مغلقة على عكس توزيع بيتا هذا يجعل توزيع كوماراسوامي أكثر ملائم من توزيع بيتا للأنشطة كثيرة مثل درجات الحرارة وحساب معدل البقاء على قيد الحياة ونمذجة المحاكاة وتقدير المعلمات.[Mitnik, (2013)]

. [Eldin, Khalil, Amein, (2014)]

في السنوات الاخيرة الماضية أصبح توزيع كوماراسوامي ذات أهمية متزايدة بدلا من توزيع بيتا وذلك لأنه أكثر كفاءة وأسهل في التنفيذ من واجهة نظر حسابية اذ له أهمية في التحليل والاعدادات الحسابية ضمن قيود وطاقة الحاسبة الالكترونية، بالإضافة الى ذلك يمكن استعمال التوزيع بشكل جيد في سياق نهج النماذج الكمية وخاصتاً نماذج الكميات الشرطية المحددة اذ ان الاكتشافات العديدة من خصائص هذا التوزيع جعل استعماله بشكل مكثف في سوق العمل الاحصائي.

ان الشكل العام الى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع كوماراسوامي قدمه العالم كوماراسوامي عام 1980م بالشكل الاتي:[Mitnik, (2013)]

$$f(z) = \frac{1}{b-c} pq(\frac{z-c}{b-c})^{p-1}[1-\left(\frac{z-c}{b-c}\right)^{p-1}]^{q-1} \quad c < z < b \ \dots (1)$$

اذ ان

p, q**: معلمات الشكل عندما** $p > 0\ , q > 0$.

b, c**: المعلمات الحدودية.**

يرمز الى الشكل العام للتوزيع $z \sim k(p, q, c, b)$ **وعند اجراء تحويل ا المتغير Z الى X بالشكل الاتي**

$$X = \frac{z-c}{b-c} \dots\dots(2)$$

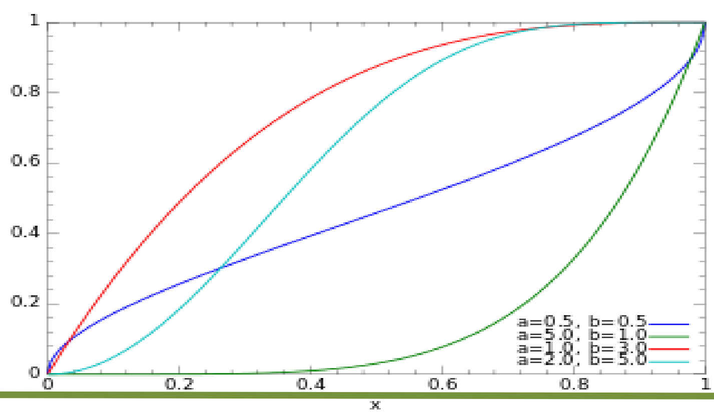
عند افتراض $b = 1, c = 0$ **نحصل دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع كوماراسوامي الثنائي كلاتي:**

$$f(x) = pqX^{p-1}(1-X^{p})^{q-1} \quad 0 < X < 1 \ \dots.(3)$$

الشكل رقم (1) دالة الكثافة الاحتمالية بمعلمات شكل مختلفة.[Jones M.S. (2009)]

3- **خواص توزيع كوماراسوامي الثنائي** properties Kumaraswamy binary Distribution

يتم التعبير عن اهم خواص هذا التوزيع كلاتي:[Mitnik, (2013)] ، [Eldin, Khalil, Amein, (2014)]،[Neamah, Mohsin, (2018)]



1- الدالة التراكمية لتوزيع كوماراسوامي يمكن الحصول عيلها كالاتي:

$$F(X)=\int_0^X f(u)du=\int_0^X pqu^{P-1}(1-u^P)^{q-1}du$$

$$F(X)=-q\int_0^X -p\,u^{P-1}(1-u^P)^{q-1}du$$

$$F(X)=-q\left\{\frac{[1-u^p]^q}{q}\right\}_0^X$$

$$F(X)=1-[1-X^p]^q \quad \ldots\ldots(4)$$

2- العزم حول نقطة الأصل لتوزي كوماراسوامي الثنائي يكون بالشكل الاتي:

$$\mu_r'=E(X^r)=\int_0^1 X^r pqX^{P-1}(1-X^P)^{q-1}dX \ldots.(5)$$

$$\mu_r'=pq\int_0^1 X^{r+p-1}(1-X^p)^{q-1}dx$$

لنفرض

$$1-X^p=\mathrm{Z} \quad \Rightarrow \quad X^p=1-Z \quad \Rightarrow \quad X=(1-Z)^{\frac{1}{P}}$$

وبالتالي فان اشتقاق المتغير X يكون كالاتي:

$$d(x)=\frac{1}{p}(1-z)^{\frac{1}{p}-1}dz$$

اذن

$$\mu_r'=pq\int_0^1 \{(1-z)^{\frac{1}{p}}\}^{r+p-1}z^{q-1}\frac{1}{p}(1-z)^{\frac{1}{p}-1}dz$$

$$\mu_r'=q\int_0^1 z^{q-1}(1-z)^{\frac{r}{p}}dz$$

$$\mu_r'=q\beta\left(q,\frac{r}{p}+1\right)=q*\frac{\Gamma_q\,\Gamma_{\frac{r}{p}+1}}{\Gamma_{q+\frac{r}{p}+1}} \qquad \ldots\ \ldots.(6)$$

3- يمكن إيجاد التوقع لتوزيع كوما رسومي من خلال العزم حول نقطة الأصل كالاتي:

$$E(X)=\mu_1'=\ q\beta\left(q,\frac{1}{p}+1\right)=q*\frac{\Gamma_q\,\Gamma_{\frac{1}{p}+1}}{\Gamma_{q+\frac{1}{p}+1}} \qquad \ldots\ \ldots.(7)$$

4- التباين الى توزيع كوما رسومي يكون وفق الصيغة التالية:

$$var(X) = \mu_2' - (\mu_1')^2 = q\beta\left(q, \frac{2}{p}+1\right) - \left\{q\beta\left(q, \frac{2}{p}+1\right)\right\}^2 \quad \dots\dots(8)$$

5- دالة المعولية لتوزيع كوماراسوامي:

$$R(X) = 1 - F(X)$$

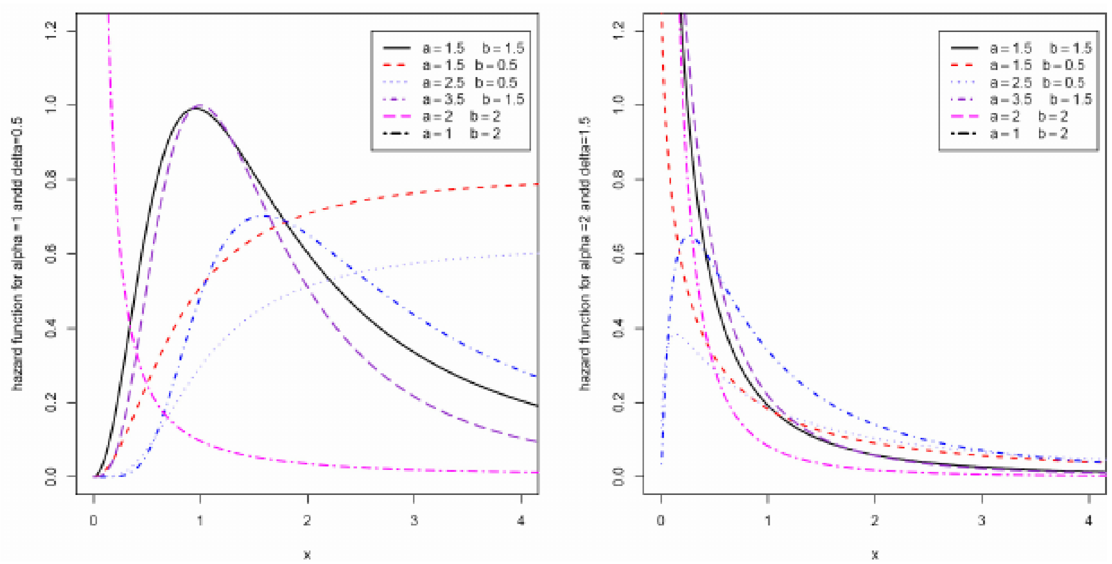
$$R(X) = [1 - X^p]^q \qquad \dots\dots(9)$$

6- دالة المخاطرة لتوزيع كوماراسوامي الثنائي: هناك أكثر من أسلوب لحساب دالة المخاطرة ومنها قسمة دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع كوماراسوامي الثنائي على دالة المعولية ويمكن الحصول عليها كالاتي:

$$h(X) = \frac{f(x)}{R(X)}$$

$$h(X) = \frac{pqX^{p-1}(1 - X^p)^{q-1}}{[1 - X^p]^q}$$

$$h(X) = \frac{pqX^{p-1}}{1 - X^p} \quad \dots\dots(10)$$



الشكل رقم (2) يمثل دالة المخاطرة للتوزيع بقيم معلمات مختلفة

7- المنوال الى توزيع كوماراسوامي يمكن الحصول عليه من خلال مشتقة لوغاريتم دالـة الكثافة الاحتماليـة للمتغير X عند مساواتها الى الصفر.[Eldin, Khalil, Amein, (2014)] ، [Neamah, Mohsin, (2018)]

$$lnf(x) = \ln(p) + \ln(q) + (p-1)\ln(x) + (q-1)\ln(1 - x^p)$$

$$\frac{\partial lnf(x)}{\partial X} = 0 + 0 + \frac{(p-1)}{x} - \frac{(q-1)}{(1-x^p)} px^{p-1}$$

$$mod(x) = \sqrt[p]{\frac{1-p}{1-qp}} \dots \dots (11)$$

8- الوسيط لتوزيع كوماراسوامي يمكن التعبير عنه من خلال الصيغة الاتية [Eldin, Khalil, Amein, (2014)]،[Neamah, Mohsin, (2018)]

$$med(x) = (1 - 2^{\frac{-1}{q}})^p \dots \dots (12)$$

4- **تقدير معلمات توزيع كوماراسوامي القياسي** Estimate parameters of Kumaraswamy Distribution

1-4 **مقدرات الإمكان الأعظم** Maximum Likelihood Estimator:

تعتمد هذه الطريقة على تعظيم دالة الإمكان للحصول على المقدرات ($\hat{q}$ ، $\hat{p}$). [Neamah, Mohsin, (2018)]

f(x) = p q $x^{p-1}(1-x^p)^{q-1}$

L (x1,x2,..xn,p,q) = $p^n\, q^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{p-1} \prod_{i=1}^{n}(1-x_i^p)^{q-1} \quad \dots \dots (13)$

Log L(x1,x2,..xn,p,q) = n ln (p) + n ln (q) + (p-1) $\sum_{i=1}^{n} \ln x_i$ **+ (q-1)** $\sum_{i=1}^{n} \ln(1-x_i^p)$

$$\partial\, \frac{\log\ L(\,x1,x2,..xn,p,q)\,)}{\partial\ q} = \frac{n}{q} + \sum_{i=1}^{n} \ln(1-x_i^p) \quad ..(14)$$

$$\partial\, \frac{\log L(\,x1,x2,..xn,p,q)}{\partial\ p} = \frac{n}{p} + 0 + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i + (q-1)\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(1-x_i^p)} \{- x_i^p \ln(x_i)\} \dots (15)$$

بمساواة المشتقات أعلاه الى الصفر في المعادلة 15, 14

$$\hat{q} = \frac{-n}{\sum_{i=1}^{n} \ln(1-x_i^p)} \quad \dots..(16)$$

$$\frac{n}{p} + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i + (q-1) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(1-x^p)} [-x_i^p \ln(x_i)] = 0$$

$$\hat{p} = \frac{n}{(q-1)\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^p \ln x_i}{(1-x_i^p)} - \sum_{i=1}^{n} \ln x_i} \quad \dots..(17)$$

2-4 **مقدرات العزوم**: Moment Estimator

طريقة مقدرات العزوم تعتمد في التقدير على مساواة عزم المجتمع بعزم العينة. [Salman, (2017)]
كما هو معروف أعلاه ان العزم يعبر هنه بالصيغة الاتية:

$$M'_r = E\,X^r = q * \frac{\Gamma_q\,\Gamma_{\frac{r}{p}+1}}{\Gamma_{q+\frac{r}{p}+1}}$$

لذلك فان العزم من الدرجة الأولى لكل من المجتمع والعينة يكون بالصيغة الاتية:
عزم المجتمع:

$$M'_1 = E\,X^1 = q * \frac{\Gamma_q\,\Gamma_{\frac{1}{p}+1}}{\Gamma_{q+\frac{1}{p}+1}}$$

عزم العينة:

$$\hat{M}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} x_i = \bar{x} \qquad .....(18)$$

وعند مساواة عزم العينة بعزم المجتمع:

$$\bar{x} = \hat{q} * \frac{\Gamma_q\,\Gamma_{\frac{1}{p}+1}}{\Gamma_{q+\frac{1}{p}+1}} \qquad .....(19)$$

$$\bar{x}\,\Gamma_{q+\frac{1}{p}+1} = \hat{q}\,\Gamma_q\,\Gamma_{\frac{1}{p}+1}$$

$$\hat{q} = \frac{\bar{x}\,\Gamma_{q+\frac{1}{p}+1}}{\Gamma_q\,\Gamma_{\frac{1}{p}+1}} \qquad .....(20)$$

اما العزم من الدرجة الثانية يكون بالصيغة الاتية:

$$M'_2 = E\,X^2 = q * \frac{\Gamma_q\,\Gamma_{\frac{2}{p}+1}}{\Gamma_{q+\frac{2}{p}+1}} \qquad ...\ (21)$$

$$\hat{M}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} x_i^2$$

وعند مساواة عزم العينة بالمجتمع:

$$\frac{\sum_{i=0}^{n} x_i^2}{n} = \hat{q} * \frac{\Gamma_q\,\Gamma_{\frac{2}{p}+1}}{\Gamma_{q+\frac{2}{p}+1}} \qquad ...\ (22)$$

$$\hat{p} = \frac{2\,n\,\hat{q}\,\Gamma_{\hat{q}}\Gamma_{\frac{2}{p}}}{\sum_{i=0}^{n} x_i^2\,\Gamma_{\hat{q}+\frac{2}{p}+1}} \qquad .....(23)$$

3-4 مقدرات المربعات الصغرى المطورة *least square develop estimator*

تستعمل هذه الطريقة لتقدير المعلمات من خلال الاعتماد على دالة التوزيع التراكمي (cumulative distribution function) اذ استعملت هذه الطريقة لتقدير معلمات توزيع بيتا من قبل الباحثين (swain Venkatraman) و (Wilson) عام 1988م.[Abody& Nuimai(2016)].

لنفرض ان لدينا $(x_1,x_2,x_3,\dots x_n)$ تمثل عينة عشوائية تتبع توزيع معين وان توقع القيم x_i في الإحصاء المرتب يكون بالشكل الاتي:

$$E\big(g(x_i)\big)=\frac{i}{n+i} \qquad \dots\dots(24)$$

لذلك فان مجموع مربعات الانحرافات حسب هذه الطريقة يكون بالصيغة الاتية:

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2=\sum_{i=1}^{n}[F(X_i)-Eg(x_i)]^2 \dots\dots (25)$$

اذ ان $F(X_i)$ دالة توزيع كوماراسوامي التراكمية:

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2=\sum_{i=1}^{n}[(1-\left(1-x_i^p\right)^q)-(\tfrac{i}{n+i})]^2 \dots\dots (26)$$

عند اشتقاق المعادلة اعلاه الى المعلمات q , p تكون بالصيغة التالية:

$$\frac{\partial\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{\partial q}=-2\sum_{i=1}^{n}\left[\left(1-\left(1-x_i^p\right)^q\right)-\left(\frac{i}{n+i}\right)\right]\left(1-x_i^p\right)^q\ln\left(1-x_i^p\right)$$

$$\frac{\partial\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{\partial p}=2\sum_{i=1}^{n}\left[\left(1-\left(1-x_i^p\right)^q\right)-\left(\frac{i}{n+i}\right)\right]q\left(1-x_i^p\right)^{q-1}x_i^p\, lnx_i$$

بعد ذلك يتم مساوات المشتقات أعلاه الى الصفر نحصل

$$\frac{\partial\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{\partial q}=0$$

$$-2\sum_{i=1}^{n}\left[\left(1-\left(1-x_i^p\right)^{\hat q}\right)-\left(\frac{i}{n+i}\right)\right]\left(1-x_i^p\right)^{\hat q}\ln\left(1-x_i^p\right)=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(1-x_i^p\right)^{\hat q}\ln\left(1-x_i^p\right)-\sum_{i=1}^{n}\left(1-x_i^p\right)^{2\hat q}\ln\left(1-x_i^p\right)-\frac{\sum_{i=1}^{n} i\left(1-x_i^p\right)^{\hat q}\ln\left(1-x_i^p\right)}{n+1}=0$$

$$\frac{\partial\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{\partial p}=0$$

$$2\sum_{i=1}^{n}\left[\left(1-\left(1-x_i^{\hat p}\right)^q\right)-\left(\frac{i}{n+i}\right)\right]q\left(1-x_i^{\hat p}\right)^{q-1}x_i^{\hat p}\, lnx_i=0$$

$$\sum_{i=1}^{n} q\left(1-x_i^{\hat{p}}\right)^{q-1} x_i^{\hat{p}} \ln x_i - \sum_{i=1}^{n} q\left(1-x_i^{\hat{p}}\right)^{2q-1} x_i^{\hat{p}} \ln x_i - \frac{\sum_{i=1}^{n} iq\left(1-x_i^{\hat{p}}\right)^{q-1} x_i^{\hat{p}} \ln x_i}{n+1} = 0$$

يتم الحصول على تقدير المعلمات بالشكل الاتي من خلال استعمال خوارزمية نيوتن رافسون:

$$\hat{q} = \frac{\ln(n)-\ln(n+1)}{\ln \sum_{i=1}^{n}(1-x_i{}^{p})} \ldots\ldots (27)$$

$$\hat{p} = \frac{\ln(n+1)+\ln \sum_{i=1}^{n}(1-x_i^{p})^{q-1} x_i{}^{p}}{\ln(\sum_{i=1}^{n} x_i} \ldots\ldots (28)$$

5- **مفهوم المحاكاة** The concept of Simulation:

يمكن تعريف المحاكات على انها تمثيل او تقليد الى الواقع الحقيقي للبيانات باستعمال النماذج الرياضية من خلال بناء انموذج مشابه للأنموذج الأصلي عندما يكون الانموذج الأصلي صعب الحصول علية فيتم إدراك وفهم النموذج بوصف هذه العملية بصورة مشابه الى الحقيقة.

اذ ان المحاكاة تعتبر من اهم الحلول التي يلجا اليها الباحثون في حل مشاكلهم في حالة عدم توفر البيانات او في حالة عدم توفر العينات المطلوبة لتمثيل ظاهرة معينة الامر الذي يشكل صعوبة بالغة في الوقت والجهد، ويمتاز أسلوب المحاكات القدرة على التجريب والاختبار عن طريق تكرار العملية عدة مرات لتفسير عملية التقدير من خلال توليد ارقام عشوائية التي تمتلك توزيع منتظم والتي تكون مستقلة في كل تجربة عن التجربة التي تليها.[Eldin, Khalil, Amein, (2014)]

5-1 **تجربة المحاكاة** Simulation Experiment:

تم توليد بيانات تتوزع توزيع كوماراسوامي الثنائي باستعمال برنامج Rمن خلال الايعاز الاتي:

dkumar(x, a = 1, b = 1, log = FALSE)

pkumar(q, a = 1, b = 1, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)

qkumar(p, a = 1, b = 1, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)

rkumar(n, a = 1, b = 1)

بمعلمات واحجام عينات مختلفة ثم بعد ذلك تم تقدير المعلمات وفق طرائق التقدير من خلال المعادلات (16, 17, 20, 23 , 27 , 28) ومن ثم احساب المتوسط العام الى متوسط مربعات الخطأ للمعلمات الذي يمثل مربع الفرق بين القيم الأولية لمعلمات والقيم التقديرية مقسوما على حجم العينة (n-3) من خلال حلقة تكرارية (1000 تكرار من التجربة) للمقارنة بين طرائق التقدير كما موضح نتائج التجربة المبينة في الجداول ادناه.

جدول رقم (1) مقدرات المعلمات بالطرق الثلاث (الإمكان الأعظم، العزوم، المربعات الصغرى المطورة) ومتوسط مربعات الخطأ للمعلمات المقدرة

عندما p=1 , q=1				
N=20	**MLE**	**ME**	**LSDE**	**BEST**
$\hat{q}$	**1.6074**	**0.8240**	**0.2218**	
$\hat{p}$	**0.9509**	**1.1990**	**1.8910**	
MSE($\hat{q}$)	**0.0945**	**0.0307**	**1.0442**	**ME**
MSE($\hat{p}$)	**0.00244**	**0.0397**	**0.9868**	**MLE**
N=50	**MLE**	**ME**	**LSDE**	
$\hat{q}$	**1.2546**	**0.8896**	**0.1630**	
$\hat{p}$	**0.8538**	**1.1369**	**2.1009**	
MSE($\hat{q}$)	**0.0648**	**0.0133**	**1.0122**	**ME**
MSE($\hat{p}$)	**0.0213**	**0.0187**	**1.8925**	**ME**
N=100	**MLE**	**ME**	**LSDE**	
$\hat{q}$	**1.2584**	**1.1193**	**0.0925**	
$\hat{p}$	**0.9621**	**1.0920**	**1.5173**	
MSE($\hat{q}$)	**0.0034**	**0.0065**	**1.0051**	**MLE**
MSE($\hat{p}$)	**0.00142**	**0.0084**	**2.2541**	**MLE**
N=200	**MLE**	**ME**	**LSDE**	
$\hat{q}$	**0.9941**	**1.2600**	**0.089108**	
$\hat{p}$	**1.0017**	**1.0260**	**3.2191**	
MSE($\hat{q}$)	**0.003**	**0.0158**	**1.02168**	**MLE**
MSE($\hat{p}$)	**0.006**	**0. 069**	**6.225**	**MLE**

من خلال الجدول رقم (1) وعندما تكون قيم المعلمات (q=1 , p=1) نجد ان الأفضلية لطريقة ME لتقدير المعلمات في احجام العينات الصغيرة (20،50) اما عند احجام العينات الكبيرة (100،200) تكون الأفضلية لطريقة MLE لتقدير المعلمات كما هو مبين من خلال قيم متوسط مربعات الخطأ (MSE).

جدول رقم (2) مقدرات المعلمات بالطرق الثلاث (الإمكان الأعظم، العزوم، المربعات الصغرى المطورة) ومتوسط مربعات الخطأ للمعلمات المقدرة

عندما p=0.5 , q=0.7				
N=20	MLE	ME	LSDE	BEST
$\hat{q}$	0.2958	0.5903	0.02866	
$\hat{p}$	0.7021	2.1822	1.99717	
MSE($\hat{q}$)	0.1633	0.0121	0.5309	ME
MSE($\hat{p}$)	0.0408	2.8299	1.6689	MLE
N=50	MLE	ME	LSDE	
$\hat{q}$	0.4533	0.3217	0.0069	
$\hat{p}$	0.7889	0..9599	1.9000	
MSE($\hat{q}$)	0.0369	0.1435	0.4998	MLE
MSE($\hat{p}$)	0.0834	0.2115	1.2117	MLE
N=100	MLE	ME	LSDE	
$\hat{q}$	0.4533	0.3222	0.0035	
$\hat{p}$	0.7311	0.9575	2.5893	
MSE($\hat{q}$)	0.0608	0.1425	2.6182	MLE
MSE($\hat{p}$)	0.0534	0.2093	0.4942	MLE
N=200	MLE	ME	LSDE	
$\hat{q}$	0.3935	0.2980	0.00121	
$\hat{p}$	0.7858	1.0534	2.80798	
MSE($\hat{q}$)	0.0242	0.1610	0.4916	MLE
MSE($\hat{p}$)	0.0116	0.3063	4.4139	MLE

من خلال الجدول رقم (2) وعندما تكون قيم المعلمات (q=0.7 , p=0.5) نجد ان الأفضلية لطريقة ME لتقدير المعلمات فقط عندما يكون حجم العينة (20) اما عند احجام العينات الكبيرة (50،100،200) تكون الأفضلية لطريقة MLE لتقدير المعلمات كما هو مبين من خلال قيم متوسط مربعات الخطأ (MSE).

جدول رقم (3) مقدرات المعلمات بالطرق الثلاث (الإمكان الأعظم، العزوم، المربعات الصغرى المطورة) ومتوسط مربعات الخطأ للمعلمات المقدرة

p=1.5 , q=2 عندما				
N=20	MLE	ME	LSDE	BEST
$\hat{q}$	2.5410	1.5324	0.51815	
$\hat{p}$	1.2530	1.3680	2.5618	
MSE($\hat{q}$)	0.2853	0.02885	1.6642	ME
MSE($\hat{p}$)	0.2989	0.1864	0.2598	ME
N=50	MLE	ME	LSDE	
$\hat{q}$	1.6222	1.1478	0.0573	
$\hat{p}$	1.9118	1.4690	3.0716	
MSE($\hat{q}$)	0.0422	0.6261	1.2299	MLE
MSE($\hat{p}$)	0.0125	0.1095	1.5079	MLE
N=100	MLE	ME	LSDE	
$\hat{q}$	1.5904	1.3333	0.02429	
$\hat{p}$	2.0520	1.1544	3.5656	
MSE($\hat{q}$)	0.0814	0.4444	2.00097	MLE
MSE($\hat{p}$)	0.0637	0.5166	4.4390	MLE
N=200	MLE	ME	LSDE	
$\hat{q}$	1.7172	1.2292	0.01828	
$\hat{p}$	1.6260	1.3285	3.8528	
MSE($\hat{q}$)	0.0799	0.5940	2.41333	MLE
MSE($\hat{p}$)	0.0276	0.2222	4.4942	MLE

من خلال الجدول رقم (3) وعندما تكون قيم المعلمات (q=2 , p=1.5) نجد ان الأفضلية واضحة لطريقة MLE لتقدير المعلمات عند احجام العينات كافة (20،50،100،200) على كل من الطريقتين (ME,LSD) كما هو مبين من خلال قيم متوسط مربعات الخطأ (MSE).

جدول رقم (4) يمثل خلاصة الأفضلية الطرائق في تجربة المحاكاة

حجم العينات / الطرائق	N=20		N=50		N=100		N=200		عدد مرات الافضلية
	$\hat{q}$	$\hat{p}$	$\hat{q}$	$\hat{p}$	$\hat{q}$	$\hat{p}$	$\hat{q}$	$\hat{p}$	
MLE	0	3	2	3	3	3	3	3	17
ME	3	0	1	0	0	0	0	0	4
LSD	0	0	0	0	0	0	0	0	0

من خلال الجدول رقم (4) تبينت الأفضلية الواضحة لطريقة MLE على كل من الطريقتين لتقدير معلمات كوماراسوامي الثنائي.

6- الاستنتاجات

في هذ البحث عرضت اهم خواص التوزيع واهم طرائق تقدير معلمات توزيع كوماراسوامي الثنائي وتم استخدام متوسط مربعات الخطأ كمعيار للمقارنة بين تلك الطرائق

وتم تلخيص النتائج على النحو التالي:

1- عند المعلمات الأولية $q=1$, $p=1$ وباختلاف حجم العينة كانت الأفضلية لمقدرات العزوم عند يكون حجم العينة (20,50) والامكان الأعظم عند حجم العينة (100,200) لامتلاكهما اقل متوسط مربعات الخطأ من طريقة المربعات الصغرى المطورة.

2- عند المعلمات الأولية $q=0.7$, $p=0.5$ وباختلاف حجم العينة كانت الأفضلية لمقدرات الامكان الأعظم واضحة على كلتا الطريقتين وخاصة عند يكون حجم العينة كبير (50,100,200). لحصولها على اقل متوسط مربعات الخطأ.

3- عند المعلمات الأولية $q=2$, $p=1.5$ وباختلاف حجم العينة كانت الأفضلية لمقدرات الامكان الأعظم واضحة على كلتا الطريقتين.

4- من خلال ما تقدم يمكن القول بان طريقة الإمكان الأعظم أفضل من طريقة العزوم وطريقة المربعات الصغرى المطورة ويمكن اعتمادها

وبالتالي فان طريقة الإمكان الأعظم هي الطريقة الأفضل لتقدير معلمات توزيع كوماراسوامي الثنائي ولكن يمكن إيجاد طرائق تقدير أخرى كمقدرات بيز وغيرها. ومن الممكن دراسة التوزيع المعمم بدل الثنائي المتكون من أربعة معالم ولدية دالة كثافة احتمالية

المصادر

1. Abody.E.H, Nuimai. A. B(2016),"Comparison Between Two Approaches (MLE &DLS) to Estimate Frechet Poisson Lindley Distribution Compound by Using Simulation", Ibn Al-Haitham J. for Pure & Appl. Sci, Vol. 29 (3) 2016:P401-414.
2. Eldin M.E., Khalil N., Amein M. (2014)"Estimation of parameters of the Kumaraswamy distribution based on general progressive type II censoring", American Journal of Theoretical and Applied Statistics, 3(6): 217-222.
3. Ghosh Indranil, (2017) "Statistical Inference of Kumaraswamy Distribution under Imprecise Information" Journal of Biometrics & Biostatistics, DOI: 10.4172/2155-6180.1000378.
4. Jones M.S. (2009) '' A beta type distribution with some tractability Advantages''. Statistical Methodology 6: 70-81.
5. Mitnik P.A., (2013)" New Properties of the Kumaraswamy Distribution" Taylor & Francis Group, LLC, *Communications in Statistics—Theory and Methods*, 42: 741–755.
6. Neamah I.A. , Mohsin M.G. (2018)'' Hybrid Estimator of Kumaraswamy Distribution Parameter '', *International Journal of Engineering &* Technology, *7 (4.25) 330-332.*
7. Salman M. S., (2017)" Comparing Different Estimators of two Parameters Kumaraswamy Distribution" Journal of Babylon University/Pure and Applied Sciences/ No. (2)/ Vol. (25).

Properties of Kumaraswamy binary Distribution and compare methods of estimating parameters

Assistant Lecturer. Ahmed Razzaq Abed / Faculty of Management and Economics / University of Wasit / Iraq(1)
Assistant Lecturer. Iyad Habeb Shemal/ Faculty of Management and Economics / University of Diyala / Iraq(2)

Abstract:

The recent development in statistics has made statistical distributions the focus of researchers in the process of compensating for some distribution parameters with fixed values and obtaining a new distribution, in this study, the distribution of Kumaraswamy was studied from the constant distributions of the two parameters. The characteristics of the distribution were discussed through the presentation of the probability density function (p.d.f), the cumulative distribution function (c.d.f.), the ratio of r, the reliability function and the hazard function. The parameters of the Kumaraswamy distribution were estimated using MLE, ME, LSEE by using the simulation method for different sampling sizes and using preliminary values of the parameters. The parameter rating was compared based on the average error squares of the parameters. The results indicated that estimating the parameters as far as possible.

Keywords: **Kumaraswamy distribution, Maximum Likelihood Estimator, Moment Estimator, least square develop estimator.**