مقارنة بين طريقتي المربعات الصغرى غير الخطية المتسلسلة وطريقة M الحصينة المتسلسلة لتقدير معلمات نموذج الأشارة الجيبية ذي البعدين

أ. د. ظافر حسين رشيد / كلية الادارة والاقتصاد / جامعة بغداد
م. اوات سردار وادي / كلية الادارة والاقتصاد / جامعة صلاح الدين

تاريخ التقديم:2016/12/28
تاريخ القبول:2017/2/21

المستخلص :

يعد تقدير المعلمات غير المعلومة في نموذج الاشارة الجيبية ذي البعدين **2-D Sinusoidal Signal Model** من المسائل المهمة والصعبة . ولصعوبة ايجاد تقدير كافة معلمات هذا النوع من النماذج في ان واحد تم في هذا البحث اقتراح توظيف طريقتي المربعات الصغرى غير الخطية وطريقة **M** الحصينة بعد تطويرهما من خلال استخدام النهج المتسلسل في التقدير الذي اقترح من قبل **Prasad et al** لغرض تقدير الترددات غير المعلومة والسعة للمركبات الجيبية ذات البعدين ولكن بالاعتماد على خوارزمية **Downhill Simplex** في حل المعادلات غير الخطية لغرض الحصول على تقدير المعلمات غير الخطية التي تمثل الترددات ومن ثم استخدام صيغة المربعات الصغرى لغرض تقدير المعلمات الخطية التي تمثل السعة ، ولكننا سوف نقوم بحل المعادلات غير الخطية باستخام طريقة نيوتن – رافسن في طريقة المربعات الصغرى غير الخطية المتسلسلة والحصول على المعلمات التي تمثل الترددات والمعلمات الخطية التي تمثل السعة في ان واحد ، ومقارنة هذه الطريقة مع طريقة **M** الحصينة المتسلسلة عندما تتأثر الاشارة بأنواع مختلفة من الضوضاء ومنها التوزيع الطبيعي للخطأ وتوزيعات الخطأ ثقيلة الذيل ، وتم استخدام اسلوب المحاكاة العددية لمعرفة افضلية طرائق التقدير وذلك باستخدام حجوم عينات ومستويات تباين مختلفة والمقارنة بين طرائق التقدير باستخدام المقياس الاحصائي متوسط مربعات الخطأ ، وتم التوصل بشكل عام الى أن طريقة المربعات الصغرى غير الخطية المتسلسلة قد اثبتت كفائتها مقارنة بالطريقتين الاخريين في حالة اتباع الضوضاء التوزيع الطبيعي والتوزيع اللوجستي، اما في حالة كون الضوضاء يتبع توزيع كوشي فقد كانت طريقة **M** الحصينة المتسلسلة بالاعتماد على دالة وزن **bisquare** هي الأفضل في التقدير .

المصطلحات الرئيسة للبحث / نموذج الأشارة الجيبية ذو البعدين – طريقة المربعات الصغرى غير الخطية المتسلسلة – طريقة **M** الحصينة المتسلسلة .

* البحث مستل من اطروحة دكتوراه

1- المقدمة وهدف البحث :

تتمثل المشكلة في تقدير المعلمات لأنموذج الاشارة الجيبية ذي البعدين **2-D Sinusoidal Signal-Mode** المعطى وفق الصيغة الاتية [15]:

$$y(m,n)=\sum_{k=1}^{p}[A_k\cos(m\lambda_k+n\mu_k)+B_k\sin(m\lambda_k+n\mu_k)]+X(m,n) \qquad ...(1)$$

$$m=1,2...M., \qquad n=1,2...N.$$

إذ أن :

A_k, B_k : تمثل المعلمات الحقيقية غير المعلومة وتعرف بالسعة **amplitudes** .

λ_k, μ_k : تمثل الترددات غير المعلومة ، وأن $\lambda_k, \mu_k \in (0,\pi)$.

p : عدد مركبات الاشارة قد تكون معلومة او غير معلومة .

علما أن الحد الأول من الطرف الايمن في المعادلة (1) يمثل مركبة الاشارة **Signal component**، اما الحد الثاني فيمثل مركبة الضوضاء **noise component**.

يعد الكشف عن مركبات الاشارة في وجود الضوضاء من المسائل المهمة في معالجة الاشارات الاحصائية والتي تتلقى اهتماما كبيرا في ادبيات عمليات الاشارات وذلك لأن نماذج الاشارة الجيبية لها تطبيق واسع في تحليل النسجة **texture analysis** ، وأن اول من لاحظ أن هذه النماذج كفوءة جدا لنمذجة الصور النسيجية ثنائية البعد **2-D texture images** هو **Francos et al** [4] وقام بتقدير الترددات غير المعلومة عن طريق اختيار اشد القمم (اعلى القمم) في دالة **Periodogram** للاشارات المشاهدة $y(m,n)$، اذ أن دالة **periodogram** ذات البعدين التي يرمز لها $I(\lambda,\mu)$ تعطى بالشكل الاتي :

$$I(\lambda,\mu)=\frac{1}{MN}\left|\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}y(m,n)e^{-i(m\lambda+n\mu)}\right|^2 \qquad ...(2)$$

ولبعض التطورات النظرية لأنموذج الاشارة الجيبية ذي البعدين يمكن الرجوع الى المصادر الاتية :

Kundu & Nandi [6] [7] [8]**,Kundu, & Gupta**[9]**, Miao, Wu, & Zhao**[10]**, Nandi**[13]**, Nandi & Kundu**[14]**,Prasad , kundu & Mitra**[17]**,Nguelifack, Kwessi & Abebe**[16]**, Zhang, & Mandrekar**[20] **.**

اما فيما يخص أنموذج الاشارة الجيبية ذو البعد الواحد الذي يعد من النماذج بالغة الاهمية في معالجة الاشارات الاحصائية وفي تطبيقات السلاسل الزمنية . فقد ظهرت العديد من الدراسات التي تهتم بتطوير التقديرات وتطوير بعض الخوارزميات الكفوءة لتقدير معلمات نموذج الاشارة الجيبية ذي البعد الواحد انظر كمثال الى المصادر:

Mitra & Kundu[11]**,Mitr, Mitra & Kundu**[12]**, Prasad , Kundu, & Mitra.** [18]**. & et al.**

تظهر مشكلة تقدير معلمات نموذج الاشارة الجيبية ذي البعدين عندما تكون $p \geq 2$ ، وذلك لأن ايجاد التقديرات باستخدام الطرائق العددية صعبة جدا ، وكذلك عندما تكون $p=2$ ولكن المسافة بين ازواج الترددات (λ_1,μ_1) و (λ_2,μ_2) صغيرة جدا ، لذلك تعاني اغلب طرائق التقدير من عدم امكانية الفصل بين ازواج الترددات .

ومن المعروف أن مقدرات المربعات الصغرى عندما يكون عدد مركبات الاشارة p عدد معلوم هي اكثر كفاءة من طرائق التقدير غير الحصينة الاخرى [17]، ولكن يكون هناك صعوبة في ايجاد مقدرات المربعات الصغرى عندما $p \geq 2$ وذلك لأن سطح المربعات الصغرى لديها العديد من النقاط المحلية فيكون من الصعوبة الحصول على تخمينات بدائية لأن ذلك قد يؤدي الى الوصول الى نقطة نهاية محلية **local minimum** بدلا من نقطة نهاية عالمية **global minimum** وفي اغلب البحوث يتم استخدام طريقة تعظيم دالة **periogram** للحصول على التخمينات الاولية [17] ، وذلك لأن دالة **periodogram** لديها **local-maxima** عند الترددات الحقيقية ، ولكن هناك مشكلة اخرى وهي عدم امكانية استخدام هذه الطريقة عندما يكون هناك زوجين من الترددات مغلقة جدا ، وبذلك لا تعمل هذه الطريقة ، وكذلك تكون هناك مشكلة في ايجاد مقدرات المربعات الصغرى عندما يكون عدد مركبات الاشارة كبير جدا كما يظهر ذلك في بيانات **texture** ، فقد تكون p اكبر من 20 ، ولذلك تكون التخمينات الاولية حاسمة للغاية .

ومن هنا ظهرت الحاجة لايجاد طريقة لتقدير معلمات نموذج الاشارة الجيبية ذي البعدين عندما يكون عدد مركبات الاشارة كبيرا وقد اقترح **Prasad et al** [17] طريقة متسلسلة لتقدير معلمات نموذج الاشارة الجيبية ذي البعدين والتي اعتمد فيها على خوارزمية **Downhill Simplex** في حل المعادلات غير الخطية لغرض تقدير المعلمات غير الخطية التي تمثل الترددات واستخدام صيغة المربعات الصغرى في تقدير المعلمات الخطية التي تمثل السعة ، فكانت هذه الطريقة كفوءة لتقدير معلمات نموذج الاشارة الجيبية ذو البعدين عندما يكون توزيع الخطأ من حقل عشوائي مستقر ويتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط صفر وتباين محدد، ولكن هذه الطريقة غير حصينة في حالة وجود الشواذ او عندما يتبع توزيع الخطأ احد التوزيعات ثقيلة الذيل ، ومن هنا جاءت فكرة هذا البحث، والهدف منه هو تقدير المعلمات غير المعلومة في نموذج الاشارة الجيبية ذي البعدين باستخدام طريقة حصينة، والطريقة التي تم اقتراح توظيفها من قبلنا هي طريقة **M** الحصينة ومقارنتها مع طريقة المربعات الصغرى غير الخطية بعد القيام بتطويرها وذلك باستخدام النهج المتسلسل في التقدير الذي اقترح من قبل **Prasad et al** [17] ، وبذلك نحصل على طريقة المربعات الصغرى غير الخطية المتسلسلة و طريقة **M** الحصينة المتسلسلة، وتكمن اهمية طريقة **M** الحصينة المتسلسلة في اعطائها مقدرات حصينة، وفي الوقت نفسه تختزل مسائل الامثلية ذات البعد $4p$ الى p من مسائل الامثلية ذات البعد **4**. ولتوضيح الطرائق المطورة وبيان افضليتها تم استخدام اسلوب المحاكاة وتم استخدام معيار المقارنة متوسط مربع الخطأ.

2- فرضيات النموذج : Model Assumptions:

سوف يتم في هذا المبحث ذكر الفرضيات الاساسية للضوضاء **noise sequence** ومعلمات النموذج من خلال افتراض أن البيانات المشاهدة هي [8] [15] [17] :

$$\{y(m,n) : m = 1,\ldots,M,\, n = 1,\ldots,N\}$$

التي يعبر عنها وفق النموذج المعطى في الصيغة (1) ، والخطأ التجميعي **Additive noise** $\{X(m,n)\}$ هو من حقل عشوائي مستقر ، ويحقق الفرضية (1) الاتية [8] [15] [17] :

1- يتم افتراض أن $\{X(m,n) : m,n \in Z\}$ يعبر عنها بالشكل :

$$X(m,n) = \sum_{j1=-\infty}^{\infty} \sum_{j2=-\infty}^{\infty} a(j_1, j_2) e(m - j_1, n - j_2)$$

$a(j_1, j_2)$ ثوابت حقيقية تحقق مايأتي :

$$\sum_{j_1=-\infty}^{\infty} \sum_{j_2=-\infty}^{\infty} |a(j_1, j_2)| < \infty$$

$\{e(m,n); m,n \in Z\}$: هي مصفوفة من متغيرات عشوائية مستقلة لها

التوزيع نفسها (i.i.d) بمتوسط صفر وتباين محدد σ^2 قد يكون هذا التوزيع هو التوزيع الطبيعي او توزيعات اخرى وبحسب الطرائق المستخدمة في التقدير .

2- مجموعة الترددات $\{\lambda_i^\circ, \mu_i^\circ\}$ محددة مسبقا ، وعندما $i \neq j$ فأن $(\lambda_i^\circ, \mu_i^\circ) \neq (\lambda_j^\circ, \mu_j^\circ)$ ، وأن:

$$(\lambda_i^\circ, \mu_i^\circ) \in (0,\pi)\times(0,\pi), i = 1,\ldots, p$$

3- السعة amplitudes تحقق القيد الاتي :

$$0 < A_p^{\circ 2} + B_p^{\circ 2} < \ldots < A_1^{\circ 2} + B_1^{\circ 2} < K^2 < \infty$$

لبعض قيم $K > 0$.

3- طرائق التقدير:Methods of Estimation:

3-1 : طريقة المربعات الصغرى غير الخطية المتسلسلة: Sequential nonlinear least square method:

اقترح Prasad et al [17] طريقة متسلسلة لتقدير معلمات نموذج الاشارة الجيبية ذي البعدين ، والتي تقوم على مبدأ التقدير المتسلسل اذ يقوم بتقدير 4 معلمات في كل مرحلة من مراحل التقدير بدلا من تقدير كافة معلمات النموذج البالغ عددها 4p في ان واحد وذلك لصعوبة تقدير كافة معلمات النموذج مرة واحدة لكثرة عدد هذه المعلمات ، وقد استخدم خوارزمية Downhill Simplex في حل المعادلات غير الخطية لغرض الحصول على تقدير المعلمات غير الخطية التي تمثل الترددات واستخدام صيغة المربعات الصغرى لتقدير المعلمات الخطية التي تمثل السعة في كل مرحلة من مراحل التقدير . وبالاعتماد على فكرته في استخدام النهج المتسلسل في تقدير معلمات نموذج الاشارة الجيبية ذو البعدين المعطى في الصيغة (1) ، فقد قمنا باقتراح توظيف طريقة المربعات الصغرى غير الخطية التي تعتمد على طريقة نيوتن-رافسن في حل المعادلات غير الخطية وتقدير المعلمات الخطية وغير الخطية التي تمثل السعة والترددات في ان واحد وذلك بعد توظيف النهج المتسلسل في التقدير فبذلك تكون الطريقة هي طريقة المربعات الصغرى غير الخطية المتسلسلة والتي يمكن توضيحها من خلال توضيح هذه الطريقة في تقدير معلمات نموذج الانحدار غير الخطي ذي البعد الواحد ومن ثم توضيح كيفية استخدامها في تقدير معلمات نموذج الاشارة الجيبية ذي البعدين وكالاتي:

أن صيغة نموذج الانحدار غير الخطي ذا البعد الواحد هو [19][3][2]:

$$y_t = f(x_t, \theta) + e_t \qquad , t = 1,2,\ldots, N \cdots (3)$$

والذي يمكن أن نرمز لبيانات المتغير المستقل والمعتمد فيه على التوالي بالشكل الاتي :

$\{y_1, y_2, \ldots, y_N\}, \{x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(N)}\}$.

وبذلك يمكن كتابة النموذج اعلاه من خلال N من المعادلات بعد تعويض قيم $t = 1,2,\ldots, N$ في المعادلة (3) اعلاه فتكون دالة الهدف لطريقة المربعات الصغرى غير الخطية التي يرمز لها ϕ كالاتي :

$$\underset{\theta}{Min}\left\{\sum_{t=1}^{N} e_t^2\right\} \rightarrow \phi$$

والشرط الضروري للامثلية هو :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta_i} = 0 \quad , i = 1,2,\ldots, m$$

ولحل المعادلات ϕ نحاول تحويل نموذج الانحدار غير الخطي (3) الى نموذج انحدار خطي ،وذلك من خلال ما يأتي:

لتكن $\bar{\theta}$ هي حل بدائي guess solution وبذلك فأن :

$$y_t = f(x_t, \bar{\theta}) + (\frac{\partial f}{\partial \theta_1})_{\theta=\bar{\theta}} \Delta\theta_1 + \ldots + (\frac{\partial f}{\partial \theta_m})_{\theta=\bar{\theta}} \Delta\theta_m + \varepsilon_t$$

اذ أن :

$$\Delta\theta_i = \theta_i - \bar{\theta}_i , i = 1,2,\dots,m$$

ثم يتم تحويل النموذج الى نموذج خطي في المعلمات وكتابته بشكل N من المعادلات، ومن ثم يتم ايجاد ΔY كالاتي :

$$\overbrace{\begin{bmatrix} y_1 - f(x^{(1)},\bar{\theta}) \\ y_2 - f(x^{(2)},\bar{\theta}) \\ \vdots \\ y_N - f(x^{N},\bar{\theta}) \end{bmatrix}}^{\Delta Y} = \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^{(1)},\bar{\theta})}{\partial\theta_1} & \cdots & \frac{\partial f(x^{(1)},\bar{\theta})}{\partial\theta_m} \\ \frac{\partial f(x^{(2)},\bar{\theta})}{\partial\theta_1} & \cdots & \frac{\partial f(x^{(2)},\bar{\theta})}{\partial\theta_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f(x^{(N)},\bar{\theta})}{\partial\theta_1} & \cdots & \frac{\partial f(x^{(N)},\bar{\theta})}{\partial\theta_m} \end{bmatrix}}^{A(\bar{\theta})} \overbrace{\begin{bmatrix} \Delta\theta_1 \\ \Delta\theta_2 \\ \vdots \\ \Delta\theta_m \end{bmatrix}}^{\Delta\theta} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{bmatrix}$$

وعليه يمكن كتابة النموذج بالشكل الاتي :

$$\Delta Y = A(\bar{\theta})\Delta\theta + \varepsilon \qquad \cdots(4)$$

ولايجاد تقدير المعلمات $\Delta\theta$ يكون ذلك من خلال :

$$\underset{\Delta\theta}{Min}(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \cdots + \varepsilon_N^2)$$

فنحصل على :

$$\Delta\theta_{LS} = \left[A(\bar{\theta})^T A(\bar{\theta})\right]^{-1} A(\bar{\theta})^T \Delta Y$$

وبذلك فأن :

$$\theta_{New} = \bar{\theta} + \Delta\theta_{LS}$$

ويمكن تقدير متجه المعلمات θ في نموذج الانحدار غير الخطي بعد أن قمنا بتحويله الى نموذج انحدار خطي باستخدام خوارزمية نيوتن- رافسن التكرارية وهي :

$$\theta^{(k+1)} = \theta^{k} + \Delta\theta^{(k)} \qquad \cdots(5)$$

اذ أن :

$\Delta\theta^{(k)}$: تمثل حل المعادلة الاتية :

$$A(\theta^{(k)})^T A(\theta^{(k)})\Delta\theta^{(k)} = A(\theta^{(k)})^T \Delta Y^{(k)}$$

وباستخدام هذه الطريقة التكرارية فأن $\hat{\theta}_{NLS}$ يتم الحصول عليها عندما يتحقق معيار التقارب .

اما لتقدير المعلمات لنموذج الاشارة الجيبية ذو الصيغة (1) فيتم استخدام طريقة المربعات الصغرى غير الخطية المتسلسلة التي تم اقتراحها من قبلنا وباتباع النهج المتسلسل الذي اقترح من قبل **Prasad et al** [17] نفترض أن النموذج يحتوي اربع معلمات وهو كما في الصيغة الاتية:

$$y(m,n) = [A\cos(m\lambda + n\mu) + B\sin(m\lambda + n\mu)] + X(m,n) \qquad \dots(6)$$

$$m = 1,2,\dots,M \quad , n = 1,2,\dots,N$$

وبالاعتماد على طريقة المربعات غير الخطية المذكورة انفا يمكن اعادة كتابة النموذج بشكل MN من المعادلات وكالاتي :

$$\begin{bmatrix} y(1,1) \\ \vdots \\ y(1,N) \\ y(2,1) \\ \vdots \\ y(2,N) \\ \vdots \\ y(M,1) \\ \vdots \\ y(M,N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\cos(1\lambda+1\mu)+B\sin(1\lambda+1\mu) \\ \vdots \\ A\cos(1\lambda+N\mu)+B\sin(1\lambda+N\mu) \\ A\cos(2\lambda+1\mu)+B\sin(2\lambda+1\mu) \\ \vdots \\ A\cos(2\lambda+N\mu)+B\sin(2\lambda+N\mu) \\ \vdots \\ A\cos(M\lambda+1\mu)+B\sin(M\lambda+1\mu) \\ \vdots \\ A\cos(M\lambda+N\mu)+B\sin(M\lambda+N\mu) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X(1.1) \\ \vdots \\ X(1,N) \\ X(2,1) \\ \vdots \\ X(2,N) \\ \vdots \\ X(M,1) \\ \vdots \\ X(M,N) \end{bmatrix}$$

وأن :

$$A(\theta)=\begin{bmatrix} \cos(1\lambda+1\mu) & \sin(1\lambda+1\mu) & (1)[B\cos(1\lambda+1\mu)-A\sin(1\lambda+1\mu)] & (1)[B\cos(1\lambda+1\mu)-A\sin(1\lambda+1\mu)] \\ \cos(1\lambda+2\mu) & \sin(1\lambda+2\mu) & (1)[B\cos(1\lambda+2\mu)-A\sin(1\lambda+2\mu)] & (2)[B\cos(1\lambda+2\mu)-A\sin(1\lambda+2\mu)] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos(1\lambda+N\mu) & \sin(1\lambda+N\mu) & (1)[B\cos(1\lambda+N\mu)-A\sin(1\lambda+N\mu)] & (N)[B\cos(1\lambda+N\mu)-A\sin(1\lambda+N\mu)] \\ \cos(2\lambda+1\mu) & \sin(2\lambda+1\mu) & (2)[B\cos(2\lambda+1\mu)-A\sin(2\lambda+1\mu)] & (1)[B\cos(2\lambda+1\mu)-A\sin(2\lambda+1\mu)] \\ \cos(2\lambda+2\mu) & \sin(2\lambda+2\mu) & (2)[B\cos(2\lambda+2\mu)-A\sin(2\lambda+2\mu)] & (2)[B\cos(2\lambda+2\mu)-A\sin(2\lambda+2\mu)] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos(2\lambda+N\mu) & \sin(2\lambda+N\mu) & (2)[B\cos(2\lambda+N\mu)-A\sin(2\lambda+N\mu)] & (N)[B\cos(2\lambda+N\mu)-A\sin(2\lambda+N\mu)] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos(M\lambda+1\mu) & \sin(M\lambda+1\mu) & (M)[B\cos(M\lambda+1\mu)-A\sin(M\lambda+1\mu)] & (1)[B\cos(M\lambda+1\mu)-A\sin(M\lambda+1\mu)] \\ \cos(M\lambda+2\mu) & \sin(M\lambda+2\mu) & (M)[B\cos(M\lambda+2\mu)-A\sin(M\lambda+2\mu)] & (2)[B\cos(M\lambda+2\mu)-A\sin(M\lambda+2\mu)] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos(M\lambda+N\mu) & \sin(M\lambda+N\mu) & (M)[B\cos(M\lambda+N\mu)-A\sin(M\lambda+N\mu)] & (N)[B\cos(M\lambda+N\mu)-A\sin(M\lambda+N\mu)] \end{bmatrix}$$

وبعد تطبيق المعادلة (5) لطريقة نيوتن- رافسن التكرارية وعندما يتحقق معيار التقارب نحصل على مقدرات المربعات الصغرى غير الخطية لمتجه المعلمات $\theta=(A,B,\lambda,\mu)$ للمرحلة الأولى والتي يرمز لها $\hat{A}_{1NLS},\hat{B}_{1NLS},\hat{\lambda}_{1NLS},\hat{\mu}_{1NLS}$ ومن ثم يتم تصحيح البيانات من خلال المعادلة الاتية :

$$y^{(1)}_{NLS}(m,n)=y(m,n)-\hat{A}_{1NLS}\cos(m\hat{\lambda}_{1NLS}+n\hat{\mu}_{1NLS})-\hat{B}_{1NLS}\sin(m\hat{\lambda}_{1NLS}+n\hat{\mu}_{1NLS}) \quad \ldots(7)$$

بعد ذلك يتم الحصول على تقدير المعلمات A_2,B_2,λ_2,μ_2 باستخدام نفس خطوات المربعات الصغرى غير الخطية التي تم استخدامها في ايجاد مقدرات معلمات المرحلة الأولى ولكن بعد التعويض عن $y(m,n)$ بقيم $y^{(1)}_{NLS}(m,n)$ على التوالي، فنحصل على مقدرات المرحلة الثانية للمعلمات A_2,B_2,λ_2,μ_2 والتي يرمز لها $\hat{A}_{2NLS},\hat{B}_{2NLS},\hat{\lambda}_{2NLS},\hat{\mu}_{2NLS}$

وبالاستمرار على هذا الخط ، يتم ايجاد :

$$y_{NLS}^{(2)}(m,n),\ldots,y_{NLS}^{(k-1)}(m,n),$$
$$m=1,\ldots M \quad ,n=1,\ldots,N$$

وذلك من خلال :

$$y_{NLS}^{(2)}(m,n)=y_{NLS}^{(1)}(m,n)-\hat{A}_{2NLS}\cos(m\hat{\lambda}_{2NLS}+n\hat{\mu}_{2NLS})-\hat{B}_{2NLS}\sin(m\hat{\lambda}_{2NLS}+n\hat{\mu}_{2NLS})$$
$$\vdots$$
$$y_{NLS}^{(k)}(m,n)=y_{NLS}^{(k-2)}(m,n)-\hat{A}_{(k-1)NLS}\cos(m\hat{\lambda}_{(k-1)NLS}+n\hat{\mu}_{(k-1)NLS})-$$
$$\hat{B}_{(k-1)NLS}\sin(m\hat{\lambda}_{(k-1)NLS}+n\hat{\mu}_{(k-1)NLS})$$

من خلال استخدام نفس خطوات طريقة **k** للمرحلة $A_k, B_k, \lambda_k, \mu_k$ ويتم الحصول على تقدير المعلمات المربعات الصغرى غير الخطية التي تم استخدامها في ايجاد تقديرات المرحلة الأولى والثانية بالتعويض عن $y(m,n)$ بقيم $y_{NLS}^{(k-1)}(m,n)$ والتي يرمز للمعلمات $A_k, B_k, \lambda_k, \mu_k$ ، فنحصل على مقدرات المرحلة k لها $(\hat{A}_{kNLS}, \hat{B}_{kNLS}, \hat{\lambda}_{kNLS}, \hat{\mu}_{kNLS})$ ، وبذلك نكون قد حصلنا على تقدير معلمات نموذج الاشارة الجيبية ذو البعدين المعطى وفق الصيغة (1) والبالغ عددها $4p$ وهي $(A_1, B_1, \lambda_1, \mu_1, \ldots, A_P, B_P, \lambda_P, \mu_P)$ ، والتي يرمز لها $(\hat{A}_{1NLS}, \hat{B}_{1NLS}, \hat{\lambda}_{1NLS}, \hat{\mu}_{1NLS}, \ldots, \hat{A}_{pNLS}, \hat{B}_{pNLS}, \hat{\lambda}_{PNLS}, \hat{\mu}_{pNLS})$.

3-2 طريقة M الحصينة المتسلسلة لتقدير معلمات نموذج الاشارة الجيبية ذو البعدين:

تعد مقدرات المربعات الصغرى للمعلمات في نموذج الاشارة الجيبية ذي البعدين المعطى في الصيغة (1)اكثر كفاءة من غيرها ولكن يكون من الصعوبة استخدام هذه الطريقة في التقدير عندما يكون عدد مركبات الاشارة $P \geq 2$ لذا تم اقتراح تطوير هذه الطريقة من خلال اتباع النهج المتسلسل في التقدير فحصلنا على طريقة المربعات الصغرى غير الخطية المتسلسلة، وعلى الرغم من ذلك فأن المشكلة مازالت قائمة وذلك لأن افضلية هذه الطريقة تتدهور بشكل كبير عند وجود القيم الشاذة ، او عندما يكون توزيع الخطأ ثقيل الذيل **heavy taild** ، ومن الانسب في هذه الحالات استخدام نهج الحصانة في التقدير ، لذلك تم اقتراح استخدام طريقة **M** الحصينة المتسلسلة في هذا البحث لتقدير معلمات نموذج الاشارة الجيبية ذي البعدين المعطى وفق الصيغة (1) وبما أن هذا النموذج هو احد نماذج الانحدار غير الخطية المعقدة متعددة الابعاد، لذلك سوف تتم اولا دراسة طريقة **M** الحصينة بالنسبة لنموذج الانحدار غير الخطي متعدد الابعاد الذي صيغته هي [3] [5] [19]:

$$y_t = f(X_t, \theta) + \varepsilon_t, \quad t \leq n \quad \ldots(8)$$

اذ أن :

$\{(y_t, x_t), \quad t=1,2,...,n\}$: تمثل البيانات المشاهدة **Observed data**.

$y_t \in R$: متجه عشوائي **Random**.

$x_t \in R^m$: متجهات ثابتة **Constant vectors** .

$\Theta \subset R^p$: هي مجموعة المعلمات.

$\theta \in \Theta$: متجه المعلمات غير المعلومة .

ε_t : الأخطاء العشوائية غير الملحوظة .

f : دالة غير خطية معلومة .

يعرف مقدر M الحصين لمتجه المعلمات θ لنموذج الانحدار غير الخطي متعدد الابعاد المعطى وفق الصيغة (8) كالاتي [12]:

$$\hat{\theta}_n = \arg\min_{\underline{\theta}} Q(\underline{\theta});$$

$$Q(\underline{\theta}) = \sum_{t \le n} \rho(y_t - f(x_t,\theta)) \quad ...(9)$$

اذ أن :

$\rho(.)$ **:هي دالة محدبة ومتماثلة (Convex and Symmetric function).**

ولغرض ايجاد مقدرات M نقوم باشتقاق $Q(\theta)$ في المعادلة (9) اعلاه بالنسبة الى متجه المعلمات $\underline{\theta}$ فنحصل على :

$$Q'(\underline{\theta}) = \sum_{t \le n} \psi(y_t - f(x_t,\theta))\, f'(x_t,\theta)$$

اذ تمثل ψ المشتقة الجزئية للدالة ρ بالنسبة للمعلمات $\underline{\theta}$ ،اي أن :

$$\psi(.) = \rho'(.)$$

$$f'(x_t,\theta) = \frac{\partial f(x_t,\theta)}{\partial \underline{\theta}}$$

ومن ثم يتم ايجاد مقدرات M لنموذج الانحدار غير الخطي متعدد الابعاد من خلال حل المعادلات غير الخطية:

$$Q'(\underline{\theta}) = 0 \quad ...(10)$$

باستخدام احد الطرائق العددية التكرارية مثل طريقة IWLs او طريقة IRLS وذلك باستخدام الاوزان التي يتم حسابها من خلال الصيغة الاتية :

$$W_t = \frac{\psi(y_t - f(x_t,\theta))}{(y_t - f(x_t,\theta))} \quad \cdots(11)$$

ولكن لجعل مقدرات M الحصينة تمتلك خاصية Scale Invariant فيتم اعادة كتابة الصيغة (9) بالشكل الاتي [1]:

$$Q(\underline{\theta}) = \sum_{t \le n} \rho\left(\frac{y_t - f(x_t,\theta)}{\sigma_t}\right) \quad \cdots(12)$$

وتكون الاوزان في المعادلة (11) كالاتي :

$$W_t = \frac{\psi((y_t - f(x_t,\theta))/\hat{\sigma}_t)}{((y_t - f(x_t,\theta))/\hat{\sigma}_t)} \quad \cdots(13)$$

اذ يمثل $\hat{\sigma}_t$ تقدير الانحراف المعياري للاخطاء ε_t الذي يتم حسابه باستخدام الصيغة الاتية [1]:

$$\hat{\sigma}_t = \frac{MAD}{0.6745} = \frac{med|\varepsilon_t - med(\varepsilon_t)|}{0.6745} \quad \cdots(14)$$

وذلك من خلال الاعتماد على المقدرات الاولية التي يتم الحصول عليها باستخدام طريقة المربعات الصغرى غير الخطية NLS .اما بالنسبة لنموذج الاشارة الجيبية ذي البعدين فقد تم اقتراح توظيف طريقة M الحصينة لغرض تقدير معلمات هذا النموذج وذلك بعد تطويرها من خلال استخدام النهج المتسلسل في تقدير معلمات النموذج البالغ عددها $4p$ وكالاتي:

كما في الطريقة المتسلسلة [17] ، يتم افتراض أن عدد معلمات النموذج هو اربعة معلمات فيكون النموذج كما معطى في الصيغة (6) ، وبعد ذلك يتم تعويض مركبة الاشارة لهذا النموذج في الصيغة (12) لنموذج الانحدار غير الخطي متعدد الابعاد فنحصل على :

$$Q(\theta)=\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\rho\left(\frac{y(m,n)-A\cos(m\lambda+n\mu)-B\sin(m\lambda+n\mu)}{\hat{\sigma}}\right)\quad\cdots(15)$$

وأن $\hat{\sigma}$ يتم ايجادها من خلال الصيغة (14) ولكن بعد التعويض بالقيم المقابلة لها في نموذج الاشارة الجيبية ذي البعدين فنحصل على :

$$\hat{\sigma}=\frac{1}{0.6745}[med\left|(X(m,n)-med(X(m,n)))\right|]\quad\cdots(16)$$

اذ أن :

$$X(m,n)=[X(1,1),\cdots,X(1,N),X(2,1),\cdots,X(2,N),\cdots,X(M,1),\cdots,X(M,N)]^{T}$$

وتكون ψ و $\frac{\partial f(x_t,\theta)}{\partial \underline{\theta}}$ كما يلي :

$$\psi\left(\frac{y_t-f(x_t,\theta)}{\hat{\sigma}_t}\right)=\psi\left(\frac{y(m,n)-A\cos(m\lambda+n\mu)-B\sin(m\lambda+n\mu)}{\hat{\sigma}}\right)$$

$$\frac{\partial f(x_t,\theta)}{\partial \underline{\theta}}=\begin{bmatrix}\cos(\lambda+\mu)\\ \sin(\lambda+\mu)\\ B\cos(\lambda+\mu)-A\sin(\lambda+\mu)\\ B\cos(\lambda+\mu)-A\sin(\lambda+\mu)\\ \vdots\\ \cos(\lambda+N\mu)\\ \sin(\lambda+N\mu)\\ B\cos(\lambda+N\mu)-A\sin(\lambda+N\mu)\\ N(B\cos(\lambda+N\mu)-A\sin(\lambda+N\mu))\\ \vdots\\ \cos(M\lambda+\mu)\\ \sin(M\lambda+\mu)\\ M(B\cos(M\lambda+\mu)-A\sin(M\lambda+\mu))\\ B\cos(M\lambda+\mu)-A\sin(M\lambda+\mu)\\ \vdots\\ \cos(M\lambda+N\mu)\\ \sin(M\lambda+N\mu)\\ M(B\cos(M\lambda+N\mu)-A\sin(M\lambda+N\mu))\\ N(B\cos(M\lambda+N\mu)-A\sin(M\lambda+N\mu))\end{bmatrix}$$

اما الاوزان W_t في المعادلة (13) فتكون كالاتي :

$$W_t = W(m,n) = \frac{\psi((y(m,n) - A\cos(m\lambda + n\mu) - B\sin(m\lambda + n\mu))/\hat{\sigma})}{((y(m,n) - A\cos(m\lambda + n\mu) - B\sin(m\lambda + n\mu))/\hat{\sigma})} \quad \cdots(17)$$

وباستخدام خطوات طريقة M الحصينة لنموذج الانحدار غير الخطي متعدد الابعاد نفسها، يتم الحصول على تقدير المعلمات A, B, λ, μ للمرحلة الأولى وهي :

$$\hat{A}_{1M}, \hat{B}_{1M}, \hat{\lambda}_{1M}, \hat{\mu}_{1M}$$

وبعد ذلك يتم اتباع النهج المتسلسل نفسه الذي تم اتباعه في تقدير معلمات طريقة المربعات الصغرى غير الخطية المتسلسلة في تقدير معلمات المرحلة الثانية والمراحل الاخرى ولكن بالاعتماد على المعلمات التي تم تقديرها باستخدام طريقة M الحصينة المتسلسلة في تصحيح البيانات لكل مرحلة من مراحل التقدير ، وبذلك نكون قد حصلنا على تقدير معلمات نموذج الاشارة الجيبية ذي البعدين المعطى وفق الصيغة (1) والبالغ عددها $4p$ وهي $(A_1, B_1, \lambda_1, \mu_1, \cdots, A_P, B_P, \lambda_P, \mu_P)$، والتي يرمز له $(\hat{A}_{1M}, \hat{B}_{1M}, \hat{\lambda}_{1M}, \hat{\mu}_{1M}, \ldots, \hat{A}_{pM}, \hat{B}_{pM}, \hat{\lambda}_{pM}, \hat{\mu}_{pM})$.

علما انه سوف يتم استخدام اثنين من دوال $\rho(.)$ وهي :

1- دالة Huber [12] :

$$\rho(u_i) = \begin{cases} \frac{u_i^2}{2}, & if \quad |u_i| \le c \\ |u_i| c - \frac{c^2}{2} & if \quad |u_i| > c \end{cases}$$

حيث أن قيمة الثابت هي $c = 1.345$

2- دالة Tukeys bisquare[12] :

$$\rho(u_i) = \begin{cases} \frac{u_i^2}{2} - \frac{u_i^4}{2c^2} + \frac{u_i^6}{6c^4}, & if \quad |u_i| \le c \\ \frac{c^2}{6}, & if \quad |u_i| > c \end{cases}$$

اذ أن :

$c = 4.685$

4- النتائج العددية : Numerical Results:

سوف يتم في هذا المبحث تحليل نتائج المحاكاة العددية لاثبات كيفية عمل طرائق التقدير ازاء توزيعات مختلفة للخطأ ومستويات مختلفة للتباين واثنين من حجوم العينات ، وسوف تتم كتابة البرنامج باستخدام لغة R ، وتم افتراض النموذج الاتي [17] :

$$y(m,n) = \sum_{k=1}^{2} [A_k \cos(m\lambda_k + n\mu_k) + B_k \sin(m\lambda_k + n\mu_k)] + X(m,n) \quad \cdots(19)$$

وان القيم الافتراضية للمعلمات هي :

$$A_1 = 1.4, B_1 = 1.3, \lambda_1 = 1.8, \mu_1 = 1.6,$$
$$A_2 = 1.1, B_2 = 1.2, \lambda_2 = 1.7, \mu_2 = 1.3$$

اذ تمثل A_1, B_1, A_2, B_2 معلمات السعة ، اما $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2$ فتمثل معلمات التردد في مركبات الاشارة الجيبية ذات البعدين ، وأن نموذج الخطأ هو [17] :

$$X(m,n) = e(m,n) + 0.25e(m-1,n) + 0.25e(m,n-1)$$

وأن $e(m,n)$: هي متغيرات عشوائية مستقلة لها التوزيع نفسه، وتم افتراض انها تتبع التوزيعات الاتية :

التوزيع الطبيعي ، التوزيع اللوجستي ، وتوزيع كوشي ، وللتوزيعات الثلاثة يكون المتوسط صفرا وقيما مختلفة للانحراف المعياري $(\sigma = 0.25, 0.5, 1)$ ، وأن $M = N = 40$ وكذلك $M = N = 50$ وبذلك يكون لدينا عدد المشاهدات الكلية $MN = 1600$ ، $MN = 2500$ مشاهدة على التوالي . وقد تم تكرار نتائج المحاكاة $L = 100$ تكرار ، وتم ايجاد معدل التقديرات ، ومتوسط مربعات الخطأ باستخدام الطرائق الثلاثة وهي المربعات الصغرى غير الخطية المتسلسلة التي يرمز لها NLS وطريقة M الحصينة باعتماد دالة وزن Huber يرمز لها M.h ، وطريقة M الحصينة المتسلسلة باعتماد دالة وزن bisqure التي يرمز لها M.b وكانت النتائج كما في الجداول (1-12) الاتية:

جدول رقم (1) يمثل معدل التقديرات لمعلمات المركبة k=1 وفق طرائق التقدير الثلاثة لمختلف حجوم العينات ومستويات التباين عندما يتبع توزيع الضوضاء التوزيع الطبيعي.

Scale	M,N	Method	A1=1.4	B1=1.3	λ1=1.8	μ1=1.6
$\sigma = 0.25$	40	NLS	1.587275	1.092369	1.798442	1.595590
		M.h	1.588092	1.091186	1.798430	1.595571
		M.b	1.603541	1.070931	1.798255	1.595214
	50	NLS	1.298561	1.361667	1.803425	1.599616
		M.h	1.298817	1.361618	1.803427	1.599612
		M.b	1.291917	1.365546	1.803653	1.599589
$\sigma = 0.50$	40	NLS	1.590852	1.087976	1.798364	1.595530
		M.h	1.601236	1.074363	1.798241	1.595315
		M.b	1.608534	1.064611	1.798163	1.595138
	50	NLS	1.298932	1.358962	1.803385	1.599563
		M.h	1.294089	1.362271	1.803529	1.599562
		M.b	1.291244	1.363770	1.803634	1.599544
$\sigma = 1$	40	NLS	1.586745	1.091871	1.798444	1.595488
		M.h	1.601726	1.071617	1.798251	1.595096
		M.b	1.601236	1.072280	1.798253	1.595123
	50	NLS	1.306723	1.346866	1.803323	1.599484
		M.h	1.299108	1.354028	1.803594	1.599484
		M.b	1.299040	1.354305	1.803589	1.599490

جدول (2) يمثل معدل التقديرات لمعلمات المركبة k=2 وفق طرائق التقدير الثلاثة لمختلف حجوم العينات ومستويات التباين عندما يتبع توزيع الضوضاء التوزيع الطبيعي.

Scale	M,N	Method	A2=1.1	B2=1.2	$\lambda 2$=1.7	$\mu 2$=1.3
$\sigma = 0.25$	40	NLS	1.130856	1.160921	1.699352	1.299503
		M.h	1.131017	1.160451	1.699339	1.299505
		M.b	1.133795	1.156897	1.699293	1.299451
	50	NLS	1.096246	1.195164	1.699757	1.300075
		M.h	1.096099	1.195226	1.699762	1.300075
		M.b	1.095981	1.194650	1.699741	1.300078
$\sigma = 0.50$	40	NLS	1.133689	1.160411	1.699396	1.299386
		M.h	1.134699	1.158854	1.699400	1.299341
		M.b	1.135631	1.157210	1.699379	1.299327
	50	NLS	1.091567	1.194081	1.699738	1.300172
		M.h	1.091077	1.194404	1.699721	1.300188
		M.b	1.091063	1.193933	1.699713	1.300187
$\sigma = 1$	40	NLS	1.146685	1.143227	1.698830	1.299424
		M.h	1.150240	1.139273	1.698763	1.299377
		M.b	1.149523	1.140021	1.698779	1.299389
	50	NLS	1.099302	1.186046	1.699694	1.299915
		M.h	1.097034	1.187549	1.699696	1.299982
		M.b	1.096655	1.187774	1.699702	1.299986

جدول رقم (3) يمثل متوسط مربعات الخطأ لتقدير معلمات المركبة k=1 وفق طرائق التقدير الثلاثة ولمختلف حجوم العينات ومستويات التباين عنما يتبع الضوضاء التوزيع الطبيعي.

Scale	M,N	Method	A1=1.4	B1=1.3	$\lambda 1$=1.8	$\mu 1$=1.6
$\sigma = 0.25$	40	NLS	0.03538953	0.04363341	2.590407e-06	1.964121e-05
		M.h	0.03569360	0.04412456	2.624279e-06	1.980362e-05
		M.b	0.04174273	0.05303937	3.210194e-06	2.308590e-05
	50	NLS	0.010509543	0.003965663	1.179673e-05	2.281204e-07
		M.h	0.010457447	0.003956147	1.181148e-05	2.287484e-07
		M.b	0.011909900	0.004461527	1.341028e-05	2.476230e-07
$\sigma = 0.50$	40	NLS	0.03756416	0.04704624	3.356755e-06	2.072840e-05
		M.h	0.04167321	0.05304412	3.778239e-06	2.268430e-05
		M.b	0.04468382	0.05763207	4.086497e-06	2.437902e-05
	50	NLS	0.01107753	0.004509960	1.167315e-05	4.964007e-07
		M.h	0.01202587	0.004823862	1.264937e-05	4.814935e-07
		M.b	0.01262353	0.004981818	1.339097e-05	4.927807e-07
$\sigma = 1$	40	NLS	0.03903645	0.05211328	5.357797e-06	2.421840e-05
		M.h	0.04531560	0.06255415	6.242200e-06	2.810398e-05
		M.b	0.04515480	0.06207858	6.156654e-06	2.779264e-05
	50	NLS	0.01340662	0.005623730	1.214021e-05	1.754273e-06
		M.h	0.01500667	0.006528704	1.412294e-05	1.748343e-06
		M.b	0.01495222	0.006466352	1.408398e-05	1.754479e-06

جدول رقم (4) يمثل متوسط مربعات الخطأ لتقدير معلمات المركبة k=2 وفق طرائق التقدير الثلاثة ولمختلف حجوم العينات ومستويات التباين عندما يتبع توزيع الضوضاء التوزيع الطبيعي.

Scale	M,N	Method	A2=1.1	B2=1.2	$\lambda 2$=1.7	$\mu 2$=1.3
$\sigma = 0.25$	40	NLS	0.001263899	0.001868736	7.135687e-07	5.242114e-07
		M.h	0.001307626	0.001919778	7.478644e-07	5.422364e-07
		M.b	0.001479380	0.002215370	8.074449e-07	6.013511e-07
	50	NLS	0.0002977973	0.0002648255	1.658125e-07	1.037671e-07
		M.h	0.0003111139	0.0002638026	1.718566e-07	1.067321e-07
		M.b	0.0003103279	0.0002682503	1.809372e-07	1.081869e-07
$\sigma = 0.50$	40	NLS	0.002952737	0.003125507	1.621649e-06	1.367190e-06
		M.h	0.003238245	0.003385816	1.727752e-06	1.420606e-06
		M.b	0.003286033	0.003545359	1.766337e-06	1.449750e-06
	50	NLS	0.001374249	0.001176642	5.391246e-07	4.823950e-07
		M.h	0.001424506	0.001186944	5.977263e-07	5.075164e-07
		M.b	0.001412439	0.001220657	5.987459e-07	5.127889e-07
$\sigma = 1$	40	NLS	0.008044478	0.009381477	6.967034e-06	4.145434e-06
		M.h	0.009052687	0.010239041	7.301468e-06	4.536081e-06
		M.b	0.009032899	0.010124165	7.332228e-06	4.443431e-06
	50	NLS	0.004900445	0.003987335	1.292413e-06	2.299656e-06
		M.h	0.004801124	0.003839787	1.351093e-06	2.255709e-06
		M.b	0.004766310	0.003798957	1.325105e-06	2.281799e-06

جدول رقم (5) يمثل معدل التقديرات لمعلمات المركبة k=1 وفق طرائق التقدير الثلاثة لمختلف حجوم العينات ومستويات التباين وعندما يتبع الضوضاء التوزيع اللوجستي .

Scale	M,N	Method	A1=1.4	B1=1.3	$\lambda 1$=1.8	$\mu 1$=1.6
$\sigma = 0.25$	40	NLS	1.584713	1.097443	1.798454	1.595686
		M.h	1.592180	1.088291	1.798374	1.595508
		M.b	1.602472	1.074271	1.798269	1.595255
	50	NLS	1.302487	1.356082	1.803367	1.599545
		M.h	1.299847	1.357886	1.803463	1.599533
		M.b	1.294754	1.360941	1.803628	1.599516
$\sigma = 0.50$	40	NLS	1.582282	1.099364	1.798437	1.595781
		M.h	1.598679	1.078694	1.798255	1.595375
		M.b	1.599673	1.077426	1.798263	1.595349
	50	NLS	1.303979	1.353282	1.803359	1.599501
		M.h	1.297653	1.357660	1.803583	1.599474
		M.b	1.296050	1.358384	1.803633	1.599465
$\sigma = 1$	40	NLS	1.574474	1.100636	1.798400	1.595966
		M.h	1.585354	1.088227	1.798254	1.595710
		M.b	1.585248	1.090623	1.798271	1.595733
	50	NLS	1.303362	1.349397	1.803375	1.599442
		M.h	1.300737	1.350939	1.803536	1.599372
		M.b	1.299287	1.351436	1.803582	1.599356

جدول (6) يمثل معدل التقديرات لمعلمات المركبة k=2 وفق طرائق التقدير الثلاثة لمختلف حجوم العينات ومستويات التباين وعندما يتبع الضوضاء التوزيع اللوجستي .

Scale	M,N	Method	A2=1.1	B2=1.2	λ2=1.7	μ2=1.3
$\sigma = 0.25$	40	NLS	1.128552	1.162870	1.699496	1.299517
		M.h	1.128760	1.162285	1.699491	1.299500
		M.b	1.131182	1.159176	1.699427	1.299461
	50	NLS	1.092943	1.194917	1.699839	1.300075
		M.h	1.093199	1.195511	1.699845	1.300062
		M.b	1.093079	1.195333	1.699827	1.300069
$\sigma = 0.50$	40	NLS	1.125760	1.164405	1.699576	1.299547
		M.h	1.127510	1.161928	1.699547	1.299484
		M.b	1.128919	1.160269	1.699486	1.299462
	50	NLS	1.089758	1.194680	1.699949	1.300050
		M.h	1.089553	1.196163	1.699963	1.300034
		M.b	1.089357	1.196624	1.699954	1.300044
$\sigma = 1$	40	NLS	1.119014	1.165310	1.699744	1.299594
		M.h	1.120388	1.164339	1.699734	1.299503
		M.b	1.122332	1.161940	1.699632	1.299472
	50	NLS	1.080309	1.193553	1.700188	1.300020
		M.h	1.081043	1.196526	1.700223	1.299971
		M.b	1.080565	1.197920	1.700219	1.299987

جدول رقم (7) يمثل متوسط مربعات الخطأ لتقدير معلمات المركبة k=1 وفق طرائق التقدير الثلاثة ولمختلف حجوم العينات ومستويات التباين عنما يتبع الضوضاء التوزيع اللوجستي

Scale	M,N	Method	A1=1.4	B1=1.3	λ1=1.8	μ1=1.6
$\sigma = 0.25$	40	NLS	0.03552939	0.04345642	3.082713e-06	1.920203e-05
		M.h	0.03839641	0.04731171	3.349243e-06	2.078599e-05
		M.b	0.04247111	0.05352092	3.725741e-06	2.312358e-05
	50	NLS	0.010408621	0.004149667	1.155325e-05	5.545379e-07
		M.h	0.010858522	0.004256751	1.219528e-05	5.499004e-07
		M.b	0.011939011	0.004625115	1.336795e-05	5.704561e-07
$\sigma = 0.50$	40	NLS	0.03900179	0.05027242	5.257976e-06	2.022066e-05
		M.h	0.04523996	0.05886849	5.876585e-06	2.382810e-05
		M.b	0.04567376	0.05954747	5.911678e-06	2.405732e-05
	50	NLS	0.01262038	0.006718440	1.210822e-05	1.610585e-06
		M.h	0.01388128	0.006965428	1.364551e-05	1.574314e-06
		M.b	0.01424864	0.007125299	1.400801e-05	1.620139e-06
$\sigma = 1$	40	NLS	0.05218357	0.07981771	1.365696e-05	2.582692e-05
		M.h	0.05629574	0.08313700	1.384318e-05	2.786457e-05
		M.b	0.05621995	0.08078315	1.380458e-05	2.764719e-05
	50	NLS	0.02246410	0.01729888	1.469780e-05	5.615103e-06
		M.h	0.02297919	0.01743006	1.567559e-05	5.446742e-06
		M.b	0.02327190	0.01765536	1.599917e-05	5.585379e-06

جدول رقم (8) يمثل متوسط مربعات الخطأ لتقدير معلمات المركبة k=2 وفق طرائق التقدير الثلاثة ولمختلف حجوم العينات ومستويات التباين عندما يتبع الضوضاء التوزيع اللوجستي

Scale	M,N	Method	A2=1.1	B2=1.2	$\lambda 2$=1.7	$\mu 2$=1.3
$\sigma = 0.25$	40	NLS	0.001926292	0.002468080	1.159722e-06	9.302160e-07
		M.h	0.001851667	0.002538326	1.128688e-06	9.800789e-07
		M.b	0.001991570	0.002808936	1.226879e-06	1.022217e-06
	50	NLS	0.0011084608	0.0008785074	3.439278e-07	4.916256e-07
		M.h	0.0010393446	0.0009107382	3.502690e-07	4.843956e-07
		M.b	0.0010169938	0.0009228122	3.480918e-07	4.900389e-07
$\sigma = 0.50$	40	NLS	0.005231517	0.005658197	3.794466e-06	3.053262e-06
		M.h	0.004787935	0.005704755	3.605086e-06	3.181380e-06
		M.b	0.004914874	0.005988694	3.810957e-06	3.205603e-06
	50	NLS	0.004371170	0.003426792	1.278886e-06	1.968695e-06
		M.h	0.004075271	0.003580982	1.329782e-06	1.930462e-06
		M.b	0.003971080	0.003616592	1.298984e-06	1.949307e-06
$\sigma = 1$	40	NLS	0.01857466	0.01894924	1.448882e-05	1.184073e-05
		M.h	0.01667657	0.01785469	1.363528e-05	1.210047e-05
		M.b	0.01702815	0.01855525	1.434328e-05	1.211365e-05
	50	NLS	0.01764558	0.01358190	5.201551e-06	7.969995e-06
		M.h	0.01635735	0.01423215	5.424209e-06	7.820050e-06
		M.b	0.01585066	0.01432689	5.260959e-06	7.895852e-06

جدول رقم (9) يمثل معدل التقديرات لمعلمات المركبة k=1 وفق طرائق التقدير الثلاثة لمختلف حجوم العينات ومستويات التباين عندما يتبع توزيع الضوضاء توزيع كوشي .

Scale	M,N	Method	A1=1.4	B1=1.3	$\lambda 1$=1.8	$\mu 1$=1.6
$\sigma = 0.25$	40	NLS	3.038706	2.679667	1.861471	1.494556
		M.h	1.591880	1.077127	1.798449	1.595270
		M.b	1.602342	1.060865	1.798212	1.595125
	50	NLS	2.462856	2.185688	1.738125	1.538789
		M.h	1.308572	1.347102	1.803451	1.599373
		M.b	1.305996	1.350420	1.803565	1.599328
$\sigma = 0.50$	40	NLS	5.166377	4.887792	1.892551	1.366715
		M.h	1.589303	1.068190	1.798560	1.595044
		M.b	1.596554	1.060725	1.798713	1.594825
	50	NLS	3.694573	3.531075	1.742939	1.522925
		M.h	1.294448	1.361468	1.803473	1.599724
		M.b	1.294276	1.360599	1.803577	1.599607
$\sigma = 1$	40	NLS	18.160949	22.206893	1.807344	1.575351
		M.h	1.6159719	0.9955052	1.7979169	1.5942137
		M.b	1.589113	1.050830	1.798439	1.594847
	50	NLS	6.813161	6.457080	1.747307	1.548003
		M.h	1.283452	1.364283	1.803542	1.599837
		M.b	1.285127	1.362427	1.803585	1.599748

جدول رقم (10) يمثل معدل التقديرات لمعلمات المركبة k=2 وفق طرائق التقدير الثلاثة لمختلف حجوم العينات ومستويات التباين عندما يتبع الضوضاء توزيع كوشي .

Scale	M,N	Method	A2=1.1	B2=1.2	$\lambda2$=1.7	$\mu2$=1.3
$\sigma = 0.25$	40	NLS	2.956703	2.493930	1.668428	1.274892
		M.h	1.119552	1.163746	1.699417	1.299777
		M.b	1.124107	1.159265	1.699415	1.299622
	50	NLS	2.009563	2.222098	1.748365	1.340107
		M.h	1.094575	1.192285	1.699696	1.300073
		M.b	1.094958	1.192955	1.699679	1.300073
$\sigma = 0.50$	40	NLS	2.686660	3.050291	1.628536	1.296611
		M.h	1.132610	1.150275	1.699179	1.299220
		M.b	1.134901	1.148864	1.699166	1.299233
	50	NLS	3.257025	3.252880	1.738461	1.321082
		M.h	1.089316	1.200072	1.699798	1.300204
		M.b	1.090622	1.193914	1.699731	1.300127
$\sigma = 1$	40	NLS	13.850716	28.139612	1.762636	1.201133
		M.h	1.1219656	1.1202252	1.6988713	1.2993660
		M.b	1.122722	1.129183	1.699068	1.299359
	50	NLS	5.483737	6.510089	1.701127	1.462233
		M.h	1.080149	1.201573	1.699908	1.300261
		M.b	1.082700	1.190705	1.699770	1.300150

جدول رقم (11) يمثل متوسط مربعات الخطأ لتقدير معلمات المركبة k=1 وفق طرائق التقدير الثلاثة ولمختلف حجوم العينات ومستويات التباين عندما يتبع الضوضاء توزيع كوشي

Scale	M,N	Method	A1=1.4	B1=1.3	$\lambda1$=1.8	$\mu1$=1.6
$\sigma = 0.25$	40	NLS	41.48865037	59.88181640	7.455324e-01	7.034283e-01
		M.h	0.04516787	0.06516456	5.711270e-06	2.734146e-05
		M.b	0.04873348	0.07154674	6.718001e-06	2.769588e-05
	50	NLS	18.260304391	18.990866717	1.325920e-01	4.720461e-02
		M.h	0.014057507	0.007471397	1.327960e-05	2.209997e-06
		M.b	0.014041591	0.007245286	1.398678e-05	2.069142e-06
$\sigma = 0.50$	40	NLS	507.04716588	473.10465816	3.545038e+00	7.591077e+00
		M.h	0.05500213	0.08700587	1.077782e-05	3.545331e-05
		M.b	0.05384248	0.08523309	9.752643e-06	3.513842e-05
	50	NLS	81.499875680	1.156654e+02	1.592266e-01	1.360445e-01
		M.h	0.021979669	1.418150e-02	1.559367e-05	4.019241e-06
		M.b	0.021784414	1.306832e-02	1.570479e-05	3.825993e-06
$\sigma = 1$	40	NLS	1.748834e+04	3.073522e+04	1.258620e+00	1.105030e+00
		M.h	1.028761e-01	2.099046e-01	3.813709e-05	6.097866e-05
		M.b	8.300941e-02	1.594884e-01	2.789692e-05	5.440163e-05
	50	NLS	4.389851e+02	4.053060e+02	2.173930e-01	1.966122e-01
		M.h	4.403625e-02	3.531037e-02	2.273549e-05	1.115686e-05
		M.b	4.240767e-02	3.285313e-02	2.071592e-05	9.649173e-06

جدول رقم (12) يمثل متوسط مربعات الخطأ لتقدير معلمات المركبة k=2 وفق طرائق التقدير الثلاثة ولمختلف حجوم العينات ومستويات التباين عنما يتبع الضوضاء توزيع كوشي

Scale	M,N	Method	A2=1.1	B2=1.2	λ2=1.7	μ2=1.3
$\sigma=0.25$	40	NLS	71.644963233	54.379482386	5.165348e-02	2.520413e-02
		M.h	0.005021592	0.005680031	2.744814e-06	3.019448e-06
		M.b	0.004067250	0.005085986	2.104409e-06	2.678514e-06
	50	NLS	13.025614047	2.213602e+01	1.193550e-01	6.667423e-02
		M.h	0.001947245	1.602809e-03	9.643434e-07	8.289282e-07
		M.b	0.001413258	1.243194e-03	8.104857e-07	6.071175e-07
$\sigma=0.50$	40	NLS	50.110892991	60.079246458	1.486559e+00	1.290455e-01
		M.h	0.014313815	0.013493128	9.672416e-06	8.510754e-06
		M.b	0.010903933	0.009484141	6.467142e-06	6.105648e-06
	50	NLS	1.714641e+02	60.945203157	1.658712e-01	1.825633e-01
		M.h	9.891372e-03	0.008210584	4.260215e-06	3.167498e-06
		M.b	7.844092e-03	0.005980658	2.996322e-06	2.198745e-06
$\sigma=1$	40	NLS	5.681690e+03	5.277389e+04	7.962893e-01	7.154775e-01
		M.h	4.051537e-02	4.641358e-02	3.869400e-05	2.899852e-05
		M.b	3.217407e-02	3.623385e-02	3.082269e-05	2.364357e-05
	50	NLS	1.966848e+02	2.956629e+02	5.254773e-01	8.474438e-01
		M.h	3.825416e-02	3.209806e-02	1.709403e-05	1.250894e-05
		M.b	3.121334e-02	2.324054e-02	1.202151e-05	8.699104e-06

5- تحليل نتائج المحاكاة :

1- من خلال الجدول (1) و(2) نلاحظ أن طرائق التقدير الثلاثة قد اعطت معدل تقديرات للمعلمات متقاربة وهي قريبة من القيم الحقيقية في حالة التوزيع الطبيعي للضوضاء ،ولكافة حجوم العينات ومستويات التباين المختلفة .

2- من خلال (3) و (4) نلاحظ وبشكل عام أن طريقة المربعات الصغرى غير الخطية المتسلسلة تاتي من حيث الافضلية بالمرتبة الأولى في تقدير المعلمات في حالة التوزيع الطبيعي للضوضاء ولمختلف حجوم العينات ومستويات التباين للخطأ وذلك لامتلاكها اقل متوسط مربعات خطأ MSE مقارنة بالطرائق الاخرى ، وتأتي طريقة M الحصينة المتسلسلة بالاعتماد على دالة وزن Huber (M.h) بالمرتبة الثانية وطريقة M الحصينة المتسلسلة بالاعتماد على دالة وزن bisquare التي يرمز لها (M.b) بالمرتبة الثالثة لكافة حجوم العينات ومستويات التباين ($\sigma=0.25,0.50$) ، اما بالنسبة للمستوى ($\sigma=1$) فأن طريقة (M.b) تأتي بالمرتبة الثانية من حيث الأفضلية في تقدير المعلمات وطريقة (M.h) بالمرتبة الثالثة.

3- من خلال الجدول (5) و (6) نلاحظ بشكل عام أن طرائق التقدير الثلاثة قد اعطت معدل تقديرات للمعلمات متقارب وهو قريب من القيم الحقيقية في حالة التوزيع اللوجستي للضوضاء ، ولكافة حجوم العينات ونسب التباين المختلفة .

4- من خلال الجدول (7) و (8) نلاحظ وبشكل عام أن طريقة المربعات الصغرى غير الخطية المتسلسلة (NLS) قد حافظت على تسلسلها في المرتبة الأولى من حيث امتلاكها متوسط مربعات خطأ اقل من متوسط مربعات الخطأ لكل من طريقتي (M.h) و (M.b) لكافة حجوم العينات ونسب التباين المختلفة ،وتأتي طريقة (M.h) بالمرتبة الثانية من حيث الأفضلية ،وطريقة (M.b) بالمرتبة الثالثة لكافة حجوم العينات ومستويات التباين ($\sigma=0.25,0.50$) ،اما بالنسبة لمستوى التباين ($\sigma=1$) فقد تناوبت كل من طريقتي (M.h) و (M.b) في امتلاكها المرتبة الثانية ولكافة حجوم العينات .

5- من خلال الجدول (9) و (10) نلاحظ أن طريقة المربعات الصغرى غير الخطية المتسلسلة (NLS) لم تعطي معدل تقديرات جيد للمعلمات لمختلف حجوم العينات ومستويات التباين عندما يتبع الضوضاء توزيع كوشي والذي يدل على انهيار هذه الطريقة ، بينما بقيت كل من طريقة M الحصينة المتسلسلة (M.h) و (M.b) تعطي معدل تقديرات متقارب وهو قريب من القيم الحقيقية للمعلمات .
6- من خلال الجدول (11) و(12) نلاحظ مايلي :
- أن طريقة المربعات الصغرى غير الخطية المتسلسلة لم تعط نتائج جيدة لكافة حجوم العينات ومستويات التباين المختلفة وذلك للأمتلاكها MSE كبير والذي يدل على عدم حصانة هذه الطريقة ضد توزيع كوشي للضوضاء .
- أن طريقة M الحصينة المتسلسلة بالاعتماد على دالتي وزن Huber (M.h) و bisqure (M.b) كانت حصينة ضد توزيع كوشي للضوضاء ، وكانت نتائج متوسط مربعات الخطأ لكلاهما متقاربة وقيمه صغيرة مقارنة بمتوسط مربعات الخطأ لطريقة المربعات الصغرى غير الخطية المتسلسلة .
- نلاحظ وبشكل عام أن طريقة M الحصينة المتسلسلة (M.b) تأتي بالمرتبة الأولى من حيث الأفضلية وذلك لأنها تمتلك متوسط مربعات خطأ اقل بالنسبة لتوزيع كوشي للضوضاء ولكافة حجوم العينات ومستويات التباين المختلفة ، اما طريقة (M.h) فتأتي من حيث الأفضلية بالمرتبة الثانية .

6- الاستنتاجات :

من خلال تجارب المحاكاة وبناء على ماتم تحليله من نتائج فقد تم التوصل الى الاستنتاجات الاتية :
1- أن طريقة المربعات الصغرى غير الخطية المتسلسلة هي الأفضل في تقدير معلمات نموذج الاشارة الجيبية ذو البعدين في حالة التوزيع الطبيعي للضوضاء والتوزيع اللوجستي ،ولكن هذه الطريقة غير حصينة ضد توزيع كوشي للضوضاء .
2- اثبتت طريقة M الحصينة المتسلسلة حصانتها اذ اعطت تقديرات لمعلمات نموذج الاشارة الجيبية ذو البعدين مقاربة لمقدرات المربعات الصغرى غير الخطية المتسلسلة في حالة التوزيع الطبيعي والتوزيع اللوجستي للضوضاء ،وكانت مقدراتها افضل من مقدرات المربعات الصغرى غير الخطية المتسلسلة في حالة اتباع الضوضاء توزيع كوشي .

7- التوصيات والدراسات المستقبلية :

1.نوصي باستخدام طريقة المربعات الصغرى غير الخطية المتسلسلة في تقدير معلمات أنموذج الاشارة الجيبية ذي البعدين في حالة التوزيع الطبيعي واللوجستي للضوضاء ، واستخدام طريقة طريقة M الحصينة المتسلسلة في حالة كون الضوضاء يتبع توزيع كوشي .
2.اقتراح تطوير الطرائق التي تم تناولها من قبلنا في هذا البحث لتقدير نموذج الجيبية ثلاثي البعد والذي يمكن استخدامه لنمذجة النسجات في الصور الملونة، وفي عمليات الاشارات الاحصائية .
3.تطبيق الطرائق التي تم تناولها في هذا البحث في مجالات اخرى مثل الصور الطبية التي تنطبق عليها المواصفات المذكورة والتي يمكن للنموذج أن يمثلها او على صور بيانات الزلازل .
4.تطبيق الطرائق التي تم تناولها في السيطرة النوعية للتميز بين النسيج الاصلي والنسيج الذي يحتوي على خرق للمواصفات المتعلقة بنوعية الانتاج .

المصادر العربية :

1- الدباغ، ظافر عاصم مصطفى(1999)، تحليل تباين حصين للنماذج الخطية ،اطروحة دكتوراه في الاحصاء، كلية الادارة والاقتصاد ،جامعة بغداد.
2- الجشعمي ، حسين علي عبدالله (2007)، مقارنة لبعض المقدرات الحصينة لمعالم النماذج اللاخطية ، اطروحة دكتوراه في الاحصاء، كلية الادارة والاقتصاد ،الجامعة المستنصرية .

- **References:**

3- Bansal, N. K., Hamedani, G. G. and Zhang, H. (1999)," Non-linear regression with multidimensional indices", Statistics and Probability Letters, Vol. 45, pp. 175-186.

4- Francos, J. M., Meiri, A. Z. and Porat, B. (1993)," A united texture model based on a 2-D Wold like decomposition", IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 41, pp. 2665-2678.

5- Jennrich, R. I. (1969),"Asymptotic Theory of Nonlinear least Square Estimator", Annals of Statistics ,Vol. 9, No. 3, pp. 501-513.

6- Kundu , D ., and Nandi , S .(2006) , "On discrete-domain multidimensional sinusoidal models" , Statistics, Vol. 40, No. 2, PP.129–147.

7- Kundu, D. and Nandi, S.(2003), "Determination of Discrete Spectrum in a Random Field", StatisticaNeerlandica, Vol. 57, No. 2, pp. 258-283.

8- Kundu, D. and Nandi, S.(2012) ," Statistical signal processing, Frequency estimation", Springer Briefs in Statistics, Springer, New Delhi.

9- Kundu, D., & Gupta, R. D. (1998)," Asymptotic properties of the least squares estimators of a two dimensional model" , Metrika , Vol.48, pp. 83–97.

10- Miao,B. Q.,Wu,Y.,&Zhao, L. C. (1998), "On strong consistency of a 2-dimensional frequency estimation algorithm", StatisticaSinica , Vol.8, pp. 559–570.

11- Mitra A, Kundu D.(2010)," Genetic algorithms based robust frequency estimation of sinusoidal signals with stationary errors". EngApplArtifIntell, vol. 23, pp. 321–330.

12- Mitra, S., Mitra, A., and Kundu, D.(2011)," Genetic algorithm and M-estimator based robust sequential estimation of parameters of nonlinear sinusoidal signals", Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., Vol. 16, pp. 2796-2809.

13- Nandi, S.(2012)," Estimation of parameters of two-dimensional sinusoidal signal in heavy-tailed errors", Journal of Statistical Planning and Inference, Vol. 142, pp. 2799-2808.

14- Nandi, S., Kundu, D., and Srivastava, R.K.(2013)," Noise space decomposition method for two- dimensional sinusoidal model", Comput. Statist. Data Anal., Vol. 58, pp. 147-161.

15- Nandi, S., Prasad, A., &Kundu, D. (2010)," An efficient and fast algorithm for estimating the parameters of two-dimensional sinusodial signals", Jorunal of Statistical Planning and Inference, Vol. 140, pp.153–168.

16- Nguelifack, B., Kwessi, E. and Abebe, A.(2015), "Generalized Signed-Rank Estimation for Nonlinear Models with Multidimensional Indices", Journal of Nonparametric Statistics, Vol. 27, No. 2, pp. 215–228.

17- Prasad, A., Kundu, D. & Mitra, A. (2012)," Sequential estimation of two dimensional sinusoidal models", Journal of Probability and Statistical Science" , Vol. 10, No.2, pp. 161-178.

18- Prasad, A., Kundu, D. and Mitra, A. (2008), "Sequential estimation of the sum of sinusoidal model parameters", Journal of Statistical Planning and Inference, vol.138, pp. 1297 - 1313.

19- Wu, C.F. (1981),"Asymptotic Theory of Nonlinear Least Squares Estimator, Annals of Statistics" ,Vol. 9, No. 3, pp. 501-513.

20- Zhang, H., & Mandrekar, V. (2001),"Estimation of hidden frequencies for 2D stationary processes", Journal of Time Series Analysis, Vol. 22, pp. 613–629.

Comparing the Sequential Nonlinear least squared Method and Sequential robust M method to estimate the parameters of Two Dimensional sinusoidal signal model:

Abstract:

Estimation of the unknown parameters in 2-D sinusoidal signal model can be considered as important and difficult problem. Due to the difficulty to find estimate of all the parameters of this type of models at the same time, we propose sequential non-liner least squares method and sequential robust M method after their development through the use of sequential approach in the estimate suggested by Prasad et al to estimate unknown frequencies and amplitudes for the 2-D sinusoidal compounds but depending on Downhill Simplex Algorithm in solving non-linear equations for the purpose of obtaining non-linear parameters estimation which represents frequencies and then use of least squares formula to estimate linear parameters which represents amplitude . solve non-linear equations using Newton –Raphson method in sequential non-linear least squares method and obtain parameters estimate that represents frequencies and linear parameters which represents amplitude at the same time, and compared this method with sequential robust M method when the signal affected by different types of noise including the normal distribution of the error and the heavy-tailed distributions error, numerical simulation are performed to observe the performance of the estimation methods for different sample size, and various level of variance using a statistical measure of mean square error (MSE), we conclude in general that sequential non-linear least squares method is more efficiency compared to others if we follow the normal and logistic distribution of noise, but if the noise follow Cauchy distribution it was a sequential robust M method based on bi-square weight function is the best in the estimation.

Keywords: Two dimension sinusoidal signal model, Sequential nonlinear least square method, Sequential robust M method.