مقارنة بعض طرائق تقدير معلمات توزيع بواسون – ويبل المركب

أ . م . د. انتصار عريبي فدعم / كلية الادارة و الاقتصاد / جامعة بغداد
الباحث / نور اياد محمد

تاريخ التقديم :2017/3/2
تاريخ القبول:2017/5/14

المستخلص

في هذا البحث تم التطرق الى عملية تركيب توزيعين باستخدام اسلوب تركيب جديد يتم فيه ربط عدد من توزيعات أوقات الحياة (التوزيعات المستمرة) بحيث ان العدد لهذه التوزيعات يمثل متغير عشوائي يتوزع وفقا لأحد التوزيعات العشوائية المتقطعة، بالاعتماد على هذا الاسلوب تم تركيب توزيع بواسون المقطوع عند الصفر مع توزيع ويبل لينتج توزيع وقت حياة جديد ذو ثلاث معلمات يمتاز بان دالة معدل الفشل له تاخذ العديد من الحالات (متزايدة، متناقصة، الشكل الموحد وشكل الحوض) و دراسة الخصائص الاحصائية للتوزيع الناتج كالتوقع، التباين، الدالة التجميعية، دالة البقاء و دالة معدل الفشل فضلا عن تقدير معلمات التوزيع الناتج باستعمال ثلاث طرائق تقدير هي طريقة الامكان الاعظم، وطريقة اقل مربع كاي باستخدام خوارزمية Downhill Simplex، طريقة النسب المئوية، المقارنة بينهم تمت بالاعتماد على المقياس الاحصائي متوسط مربعات الخطا (MSE) عن طريق تنفيذ تجربة المحاكاة باستخدام حجوم عينات مختلفة (صغيرة، كبيرة، متوسطة) التي من خلال نتائجها تم التوصل الى ان طريقة اقل مربع كاي باستخدام خوارزمية D.S كانت هي الافضل في تقدير المعلمات و الدالة الاحتمالية للتوزيع المركب .

المصطلحات الرئيسة للبحث/ توزيعات بواسون المركبة، توزيع بواسون– ويبل المركب، طريقة الامكان الاعظم، خوارزمية EM , طريقة اقل مربع كاي، خوارزمية Downhill Simplex ، طريقة النسب المئوية .

مجلة العلوم
الاقتصادية والإدارية
العدد 101 المجلد 23
الصفحات 452-475

*البحث مستل من رسالة ماجستير.

1- المقدمة

ان عملية تركيب توزيعين لها عدد من طرق الربط لتكوين توزيع جديد يكون اكثر مرونة وفائدة احصائيا، وموضوع التركيب الذي نحن بصدده الان هو تركيب اي توزيع متقطع مع احد توزيعات اوقات الحياة الشائعة لانتاج توزيع وقت حياة (وقت الفشل) جديد بالاعتماد على مفهوم استخدمة لأول مرة Adamidis [3] عام 1998 حيث عمل على دمج توزيع بواسون مع التوزيع الاسي وذلك من خلال استخدام اقل وقت لحدوث الفشل وباستخدام التوقع الشرطي الذي يمثل احد توزيعات اوقات الفشل مضروبا بالدالة الاحتمالية لاحد التوزيعات المتقطعة والتي تمثل العدد للمكائن او المعدات (الاجهزة) لها وبعد اخذ المجموع لحاصل ضرب الدالتين ينتج التوزيع الحدي للمتغير المطلوب حساب وقت الحياة له، في هذا البحث استخدمت نفس الفكرة الموضحة اعلاه ولكن طبقت على توزيع بواسون – ويبل المركب حيث اول من قام بتركيب هذين التوزيعين هو Wanbo [8] حيث اوضح بعض الخصائص الاحصائية المهمة للتوزيع فضلا عن تقدير معلماته بطريقة الامكان الاعظم باستخدام خوارزمية تعظيم التوقع (EM) . في هذا البحث تم تقدير معلمات توزيع بواسون– ويبل المركب بثلاث طرائق تقدير هي طريقة الامكان الاعظم، طريقة اقل مربع كاي باستخدام خوارزمية Downhill Simplex ، طريقة النسب المئوية. المقارنة بين الطرائق الثلاثة تمت بالاعتماد على المقياس الاحصائي متوسط مربعات الخطأ بتنفيذ تجربة المحاكاة ولحجوم عينات مختلفة (صغيرة، متوسطة ، كبيرة).

2- مشكلة البحث

تتمثل مشكلة البحث في ان هنالك العديد من الظواهر التي لا يمكن نمذجتها باستخدام التوزيعات المفردة (وانما مع دمج اكثر من توزيع) كالطلبات التي ترد الى شركة التامين خلال فترة زمنية محددة، ظاهرة سقوط الامطار، قوة الزلازل او العطلات التي تحدث في اجهزة معينة ، ففي هذه الحالات يكون التوزيع الملائم هو احد التوزيعات المركبة والتي منها توزيع بواسون المركب والذي يعتمد في عمله على دمج توزيع بواسون مع توزيع (او توزيعات) اخرى.

3- هدف البحث

يهدف البحث الى المقارنة ما بين بعض طرائق تقدير معلمات توزيع بواسون – ويبل المركب وتحديد الطريقة الافضل في تقدير المعلمات والدالة الاحتمالية فضلا عن تقدير دالة المعولية للتوزيع المركب.

4- توزيع بواسون – ويبل المركب

لنفترض وجود z من المتغيرات العشوائية المستقلة والمتماثلة التوزيع التي تتوزع وفقا لتوزيع ويبل بدالة كثافة احتمالية تعطى بالاتي [8]

$$f(T,\alpha,\beta) = \alpha\,\beta\, T^{\alpha-1} e^{-\beta T^{\alpha}} \qquad T > 0$$

(1) $(\alpha > 0)$: تمثل معلمة الشكل، $(\beta > 0)$: تمثل معلمة القياس

وعلى افتراض ان Z تمثل متغير عشوائي ايضا يتوزع وفقا لتوزيع بواسون المنقطع عند الصفر بدالة كثافة احتمالية تعطى بالاتي [8]

$$f(z,\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{z}}{z!}\left(1-e^{-\lambda}\right)^{-1} \qquad z = 1, 2, \ldots\ldots \qquad (2)$$

وسنفرض الان ان x يمثل اقل وقت فشل من بين اوقات الفشل التي تتوزع وفقا لتوزيع ويبل اعلاه وكالاتي

$$X = \min (T_1 , T_2 , T_3 , \ldots\ldots\ldots\ldots , T_Z)$$

والذي يتم الحصول علية بتطبيق صيغة الرتبة الاحصائية (order statistics) ومن ثم فان التوزيع الشرطي الى x باعطاء z (عدد اوقات الفشل) سيكون وفق الدالة الاتية [8]

$$f (x \mid z) = \alpha \beta z x^{\alpha-1} e^{-\beta z x^{\alpha}} \qquad (3)$$

وعليه فان الدالة الحدية الى المتغير العشوائي x الذي يتوزع وفقا لتوزيع بواسون– ويبل المركب يمكن ايجاده بالشكل الاتي [8]

$$f (x ; \alpha , \beta , \lambda) = \sum_{\forall z} \alpha \beta z x^{\alpha-1} e^{-\beta z x^{\alpha}} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{z}}{z!} \left(1 - e^{-\lambda} \right)^{-1}$$

$$f (x ; \alpha , \beta , \lambda) = \frac{\alpha \beta \lambda x^{\alpha-1} e^{-\lambda}}{(1-e^{-\lambda})} \sum_{z=1}^{\infty} \frac{\lambda^{z-1} e^{-\beta z x^{\alpha}}}{(z-1)!}$$

بفرض ان $a = z - 1$ فان $z = a + 1$

وعليه فعندما $z = 1$ فان $a = 0$ و عندما $z=\infty$ فان $a = \infty$

$$f (x ; \alpha , \beta , \lambda) = \frac{\alpha \beta \lambda x^{\alpha-1} e^{-\lambda}}{(1-e^{-\lambda})} \sum_{a=0}^{\infty} \frac{\lambda^{a} e^{-\beta (a+1) x^{\alpha}}}{a!}$$

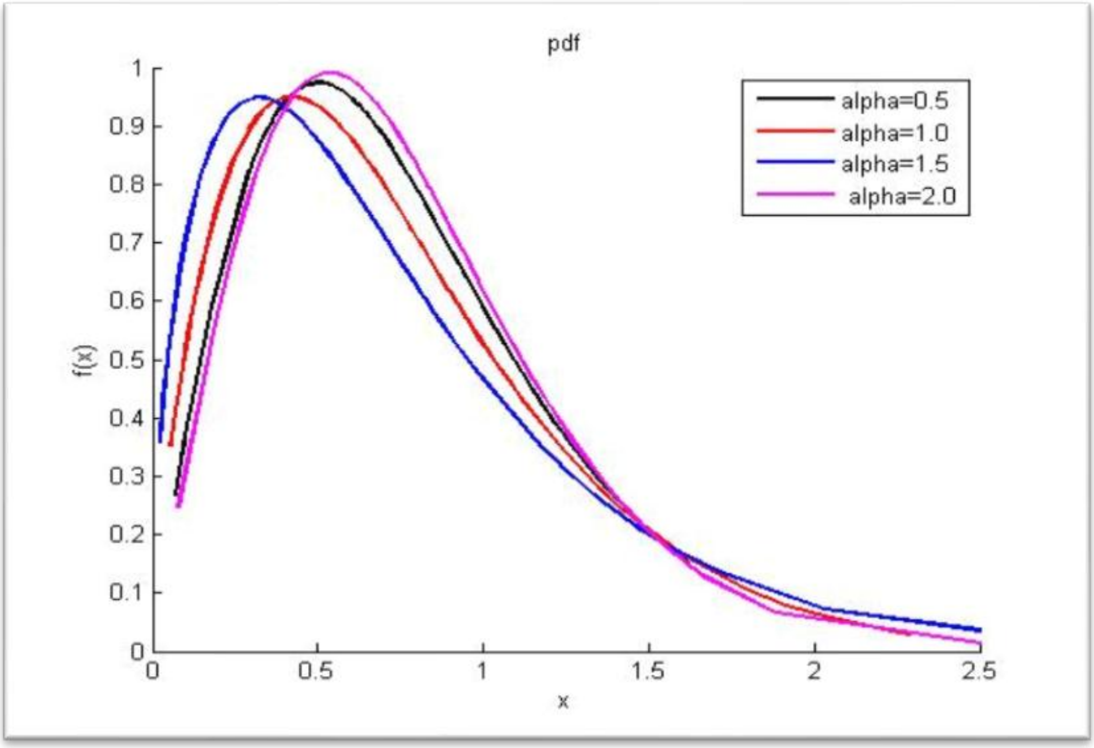
$$f (x ; \alpha , \beta , \lambda) = \frac{\alpha \beta \lambda x^{\alpha-1} e^{-\lambda}}{(1-e^{-\lambda})} \sum_{a=0}^{\infty} \frac{\lambda^{a} e^{-a \beta x^{\alpha}} e^{-\beta x^{\alpha}}}{a!}$$

$$f (x ; \alpha , \beta , \lambda) = \frac{\alpha \beta \lambda x^{\alpha-1} e^{-\lambda} e^{-\beta x^{\alpha}}}{(1-e^{-\lambda})} \sum_{a=0}^{\infty} \frac{\lambda^{a} (e^{-\beta x^{\alpha}})^{a}}{a!}$$

$$f (x ; \alpha , \beta , \lambda) = \frac{\alpha \beta \lambda x^{\alpha-1} e^{-\lambda} e^{-\beta x^{\alpha}}}{(1-e^{-\lambda})} \sum_{a=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda e^{-\beta x^{\alpha}} \right)^{a}}{a!}$$

ومن ثم فان الدالة الاحتمالية لتوزيع بواسون – ويبل المركب ستكون بالصيغة الاتية [8]

$$f (x ; \alpha , \beta , \lambda) = \frac{\alpha \beta \lambda x^{\alpha-1}}{(1-e^{-\lambda})} e^{-\lambda - \beta x^{\alpha} + \lambda e^{-\beta x^{\alpha}}} \qquad (\alpha , \beta , \lambda) > 0 \quad , x \geq 0 \qquad (4)$$



الشكل (1)

يوضح دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع بواسون – ويبل المركب عندما ($\beta = 2$ و $\lambda = 1$)[8]

5- خصائص توزيع بواسون – ويبل المركب

1- الوسط الحسابي (Mean : μ) [8]

$$\mu(x) = \frac{e^{-\lambda}}{e^{-\lambda}(e^{\lambda}-1)} \int_0^\infty \alpha\, \beta\, \lambda\, x^{\alpha}\, e^{-\beta x^{\alpha}+\lambda e^{-\beta x^{\alpha}}}\, dx \qquad (5)$$

$dx = \frac{1}{\alpha} y^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} dy \quad , \quad x = (y)^{\frac{1}{\alpha}} \quad , \quad y = x^{\alpha}$ بفرض ان

$$\mu(x) = \frac{\alpha\, \beta\, \lambda}{(e^{\lambda}-1)} \int_0^\infty y\, e^{-\beta y+\lambda e^{-\beta y}}\, \frac{1}{\alpha}\, y^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\, dy$$

$$\mu(x) = \frac{\beta\, \lambda}{(e^{\lambda}-1)} \int_0^\infty y^{\alpha-1}\, e^{-\beta y+\lambda e^{-\beta y}}\, dy \qquad (6)$$

2- التباين $(variance : \sigma^2)$ [8]

$$Var(x) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$Ex^2 = \frac{e^{-\lambda}}{e^{-\lambda}(e^{\lambda}-1)} \int_0^\infty \alpha\beta\lambda x^{\alpha+1} e^{-\beta x^{\alpha}+\lambda e^{-\beta x^{\alpha}}} dx \qquad (7)$$

وباستخدام نفس الفرضية في حالة ايجاد التوقع

$$EX^2 = \frac{1}{(e^{\lambda}-1)} \int_0^\infty \alpha\beta\lambda y^{\frac{\alpha+1-\alpha-1}{\alpha}} e^{-\beta y+\lambda e^{-\beta y}} \frac{1}{\alpha} dy$$

$$EX^2 = \frac{1}{(e^{\lambda}-1)} \int_0^\infty \beta\lambda \; e^{-\beta y+\lambda e^{-\beta y}} dy \qquad (8)$$

ان حساب المقدار النهائي الى الوسط الحسابي و التباين يتم من خلال استخدام احد طرق التكامل العددي للصيغ (6) و (8)

3- دالة التوزيع التجميعية (Cumulative Distribution Function : cdf) [8]

كذلك فان دالة التوزيع التجميعية يمكن ايجادها كالاتي

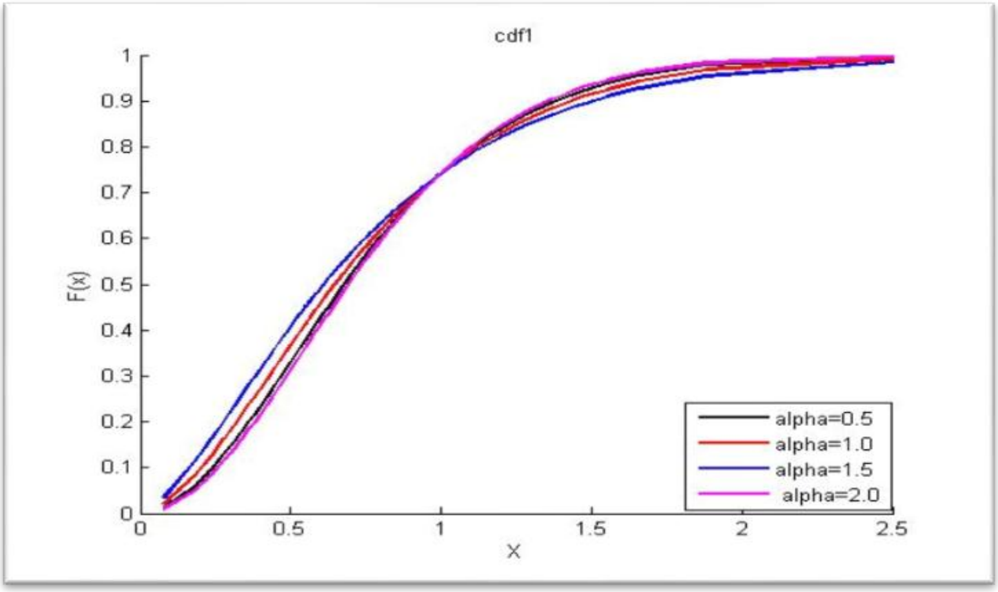
$$F(x,\alpha,\beta,\lambda) = \int_0^x \frac{\alpha\beta\lambda u^{\alpha-1}}{(1-e^{-\lambda})} e^{-\lambda-\beta u^{\alpha}+\lambda e^{-\beta u^{\alpha}}} du$$

$$F(x,\alpha,\beta,\lambda) = \frac{-e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}} \int_0^x - e^{\lambda e^{-\beta u^{\alpha}}} e^{-\beta u^{\alpha}} \alpha\beta\lambda u^{\alpha-1} du$$

$$F(x,\alpha,\beta,\lambda) = \frac{-e^{-\lambda}}{e^{-\lambda}(e^{\lambda}-1)} [e^{\lambda e^{-\beta u^{\alpha}}}]_0^x$$

ومن ثم فان الدالة التجميعية تأخذ الصيغة الاتية

$$F(x,\alpha,\beta,\lambda) = [e^{\lambda e^{-\beta x^{\alpha}}} - e^{\lambda}][1 - e^{\lambda}]^{-1} \qquad x > 0 \qquad (9)$$

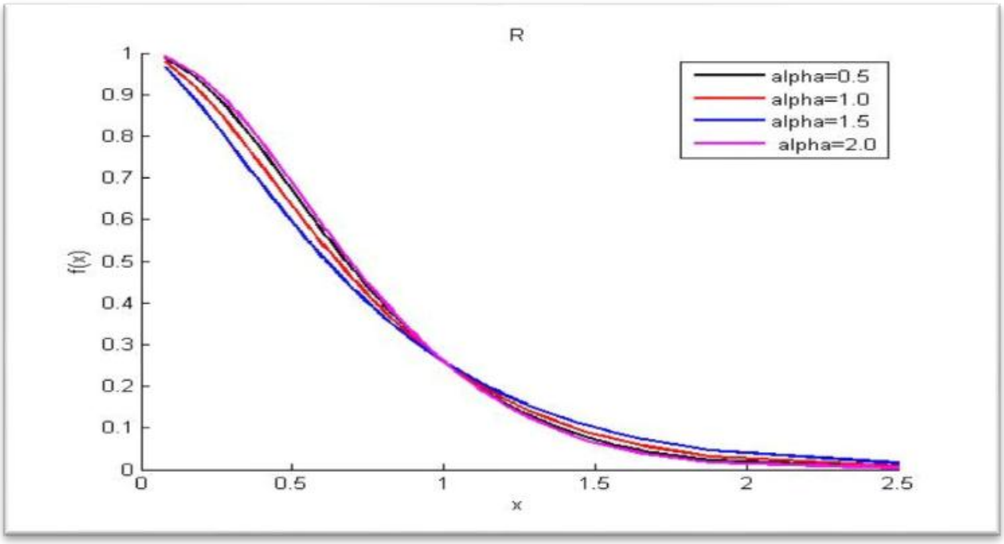


الشكل (2)
يوضح دالة الكثافة الاحتمالية التجميعية لتوزيع بواسون – ويبل عندما (2 = β و λ = 1)[8]

4- دالة المعولية (Reliability Function : S) [8]

$$R(X,\alpha,\beta,\lambda) = 1 - F(X,\alpha,\beta,\lambda)$$

$$R(X,\alpha,\beta,\lambda) = [1 - e^{\lambda e^{-\beta x^{\alpha}}}][1 - e^{\lambda}]^{-1} \quad x > 0 \qquad (10)$$



الشكل (3)
يوضح دالة المعولية لتوزيع بواسون – ويبل عندما (2 = β و λ = 1)[8]

5- دالة معدل الفشل (Failure Rate Function : h (x)) [8]

$$h(x,\alpha,\beta,\lambda)=\frac{f(x,\ \alpha,\ \beta,\ \lambda)}{S(x,\ \alpha,\ \beta,\ \lambda)}$$

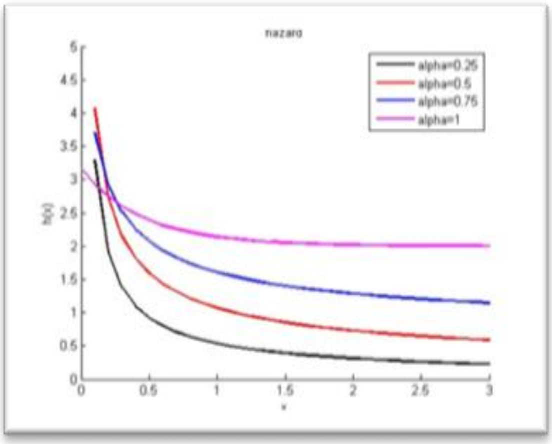
$$h(x,\alpha,\beta,\lambda)=\frac{\alpha\beta\lambda x^{\alpha-1}}{(1-e^{-\lambda})}\ e^{-\lambda-\beta x^{\alpha}+\lambda e^{-\beta x^{\alpha}}}\left[\frac{1-e^{\lambda e^{-\beta x^{\alpha}}}}{1-e^{\lambda}}\right]^{-1}$$

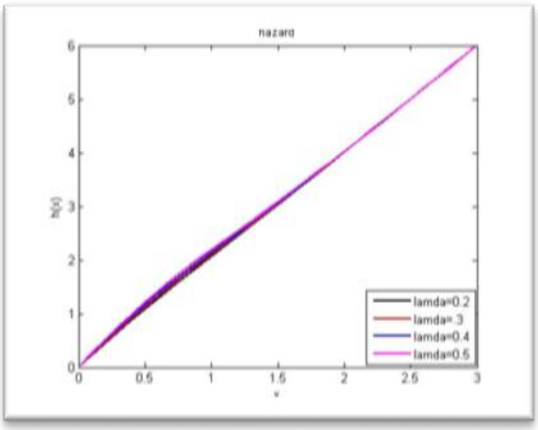
$$h(x,\alpha,\beta,\lambda)=\frac{\alpha\beta\lambda x^{\alpha-1}}{(1-e^{-\lambda})}\ e^{-\lambda-\beta x^{\alpha}+\lambda e^{-\beta x^{\alpha}}}\ \frac{-e^{\lambda}(1-e^{-\lambda})}{-[e^{\lambda e^{-\beta x^{\alpha}}}-1]}$$

$$h(x,\alpha,\beta,\lambda)=\frac{\alpha\beta\lambda x^{\alpha-1}e^{-\beta x^{\alpha}+\lambda e^{-\beta x^{\alpha}}}}{[e^{\lambda e^{-\beta x^{\alpha}}}-1]} \qquad (11)$$

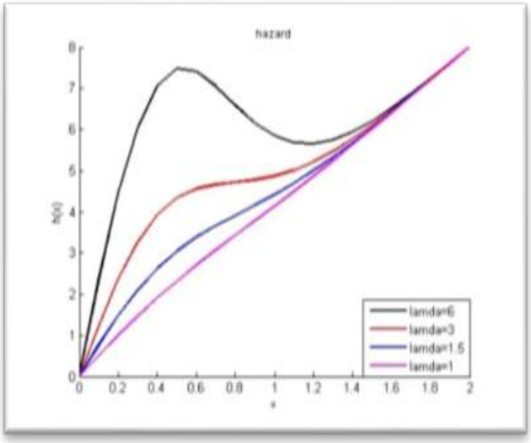
الشكل (4)

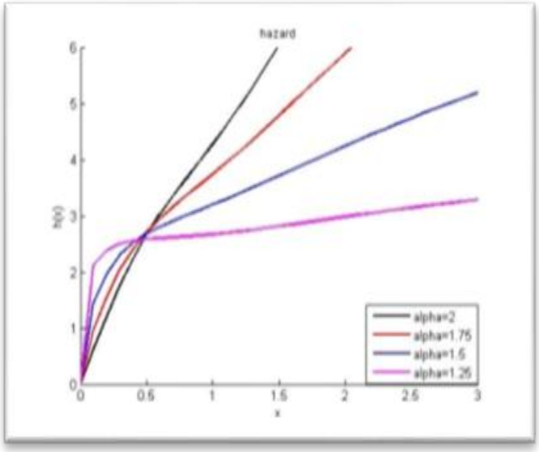
(a) **(b)**





(c) (d)





يوضح دالة معدل الفشل لتوزيع بواسون – ويبل المركب عندما (a) $\beta = 2$ و $\lambda = 1$ ، (b) $\alpha = 2$ و $\beta = 1$
, (c) $\alpha = 2$ و =

2 β(d) , = 2 و βλ = 1 [8]

6- الوسيط (Median : Me)

يمكن تعريف الوسيط بانه تلك القيمة التي تقسم الاحتمال الكلي المعرف بفضاء العينة الى قسمين متساويين احدهما يكون يمين الوسيط والاخر الى يساره في حالة المتغيرات العشوائية المتقطعة. اما تعريف الوسيط بالنسبة للمتغيرات المستمرة فانه يمثل القيمة التي تقسم المساحة تحت المنحني الى جزئين متساويين ويمكن الحصول على هذه القيمة بتطبيق الصيغة الاتية في حال كون التوزيع من النوع المستمر .

$$\int_0^m f(x)dx = \int_m^\infty f(x)dx = 0.5$$

$$\int_m^\infty \frac{\alpha\,\beta\,\lambda\,x^{\alpha-1}}{(1-e^{-\lambda})}\, e^{-\lambda-\beta x^{\alpha}+\lambda e^{-\beta x^{\alpha}}}\, dx = 0.5$$

$$\frac{-e^{-\lambda}}{e^{-\lambda}(e^{\lambda}-1)} \int_m^\infty e^{\lambda e^{-\beta x^{\alpha}}}\, e^{-\beta x^{\alpha}}\, x^{\alpha-1}\, \alpha(-\beta)\,\lambda\, dx = 0.5$$

$$\frac{1}{(1-e^{\lambda})}\left[e^{\lambda e^{-\beta x^{\alpha}}}\right]_m = 0.5$$

$$\left(1-e^{\lambda}\right)^{-1}\left[\, e^{\lambda(0)} - e^{\lambda e^{-\beta m^{\alpha}}}\right] = 0.5$$

$$0.5\left(1-e^{\lambda}\right) = \left[\, 1- e^{\lambda e^{-\beta m^{\alpha}}}\right]$$

$$e^{\lambda e^{-\beta m^{\alpha}}} = 1 - 0.5 + 0.5\, e^{\lambda}$$

$$e^{\lambda e^{-\beta m^{\alpha}}} = 0.5 + 0.5\, e^{\lambda}$$

بأخذ اللوغارتم الى طرفي المعادلة اعلاه نحصل على

$$\lambda\, e^{-\beta m^{\alpha}} = \log(0.5 + 0.5\, e^{\lambda})$$

$$e^{-\beta m^{\alpha}} = \frac{\log(0.5 + 0.5\, e^{\lambda})}{\lambda}$$

بأخذ اللوغارتم مرة ثانية الى المعادلة اعلاه ينتج

$$-\beta\, m^{\alpha} = \log\left[\frac{\log(0.5 + 0.5\, e^{\lambda})}{\lambda}\right]$$

ومن ثم فان قيمة الوسيط تمثل المقدار الاتي

$$m = \left\{-\beta^{-1}\log\left[\frac{\log(0.5 + 0.5\, e^{\lambda})}{\lambda}\right]\right\}^{\frac{1}{\alpha}} \qquad (12)$$

7- **دالة التوزيع العكسية** (Quantiles : x_u) [8]

تعرف دالة التوزيع العكسية او دالة **quantile** بانها الدالة العكسية للدالة التجميعية للتوزيع ويمكن الحصول عليها كالاتي

لنفرض ان

$$U = F(X)$$

$$X = F^{-1}(U)$$

$$U = \left[e^{\lambda e^{-\beta x^{\alpha}}} - e^{\lambda}\right]\left[1 - e^{\lambda}\right]^{-1}$$

$$\left[e^{\lambda e^{-\beta x^{\alpha}}}\right] = U\left[1 - e^{\lambda}\right] + e^{\lambda}$$

بأخذ اللوغارتم الى طرفي الصيغة اعلاه نحصل على

$$\lambda e^{-\beta x^{\alpha}} = \log\left\{U\left[1 - e^{\lambda}\right] + e^{\lambda}\right\}$$

$$e^{-\beta x^{\alpha}} = \frac{\log\left\{U\left[1 - e^{\lambda}\right] + e^{\lambda}\right\}}{\lambda}$$

بأخذ اللوغارتم مرة اخرى الى طرفي الصيغة اعلاه نحصل على

$$-\beta\, x^{\alpha} = \log\left[\frac{\log\left\{U\left[1 - e^{\lambda}\right] + e^{\lambda}\right\}}{\lambda}\right]$$

ومن ثم فان الصيغة النهائية لدالة التوزيع العكسية ستكون بالصيغة الاتية

$$x = \left\{\frac{-\log\left[\frac{\log\left\{U\left[1 - e^{\lambda}\right] + e^{\lambda}\right\}}{\lambda}\right]}{\beta}\right\}^{\frac{1}{\alpha}} \qquad (13)$$

6- بعض طرائق تقدير معلمات توزيع بواسون – ويبل المركب

(1) **طريقة الامكان الاعظم**[8] Maximum Likelihood Method

بعد استخراج $e^{-\lambda}$ عامل مشترك من بسط و مقام صيغة توزيع بواسون – ويبل المركب نحصل على

$$f(x;\alpha,\beta,\lambda)=\frac{\alpha\beta\lambda x^{\alpha-1}}{(e^{\lambda}-1)}\,e^{-\beta x^{\alpha}+\lambda e^{-\beta x^{\alpha}}} \quad (14)$$

ان دالة الامكان الى توزيع بواسون – ويبل المركب تعطى كالاتي

$$L(x;\alpha,\beta,\lambda)=\left[\frac{\alpha\beta\lambda}{e^{\lambda}-1}\right]^{n}\prod_{i=1}^{n}x_i^{\alpha-1}\,e^{-\beta\sum_{i=1}^{n}x_i^{\alpha}+\lambda\sum_{i=1}^{n}e^{-\beta x_i^{\alpha}}} \quad (15)$$

وبأخذ اللوغارتم الى طرفي دالة الامكان اعلاه و كما يلي

$$\text{Log } L(x;\alpha,\beta,\lambda)=n\log(\alpha\beta\lambda)-n\log\left(e^{\lambda}-1\right)$$
$$+(\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\log x_i-\beta\sum_{i=1}^{n}x_i^{\alpha}+\lambda\sum_{i=1}^{n}e^{-\beta x_i^{\alpha}}$$

وباشتقاق الدالة اللوغارتمية اعلاه بالنسبة الى معلمات توزيع بواسون – ويبل المركب الثلاثة (α,β,λ) نحصل على الاتي

$$\frac{\partial\log L}{\partial\alpha}=\frac{n}{\alpha}+\sum_{i=1}^{n}\log x_i-\beta\sum_{i=1}^{n}x_i^{\alpha}\log(x_i)+\lambda$$
$$\sum_{i=1}^{n}e^{-\beta x_i^{\alpha}}(-\beta)\,x_i^{\alpha}\log(x_i)$$

$$\frac{\partial\log L}{\partial\alpha}=\frac{n}{\alpha}+\sum_{i=1}^{n}\log x_i\,[1-\beta x_i^{\alpha}-\beta\lambda x_i^{\alpha}e^{-\beta x_i^{\alpha}}]$$

$$\frac{\partial\log L}{\partial\alpha}==\frac{n}{\alpha}+\sum_{i=1}^{n}\log x_i\,[1-\beta x_i^{\alpha}(1+\lambda e^{-\beta x_i^{\alpha}})] \quad (16)$$

$$\frac{\partial\log L}{\partial\beta}=\frac{n}{\beta}-\sum_{i=1}^{n}x_i^{\alpha}+\lambda\sum_{i=1}^{n}e^{-\beta x_i^{\alpha}}(-x_i^{\alpha})$$

$$\frac{\partial\log L}{\partial\beta}=\frac{n}{\beta}-\sum_{i=1}^{n}x_i^{\alpha}[1+\lambda e^{-\beta x_i^{\alpha}}] \quad (17)$$

$$\frac{\partial\log L}{\partial\lambda}=\frac{n}{\lambda}-\frac{n\,e^{\lambda}}{(e^{\lambda}-1)}+\sum_{i=1}^{n}e^{-\beta x_i^{\alpha}} \quad (18)$$

بما ان المعادلات (16) , (17) و (18) اعلاه تمثل معادلات غير خطية وعليه لا يمكن ايجاد المقدرات الى معلمات توزيع بواسون – ويبل بصورة اعتيادية ومن ثم يلزم استخدام اسلوب تكراري للحصول على المقدرات وعليه سيتم استخدام خوارزمية (EM) والتي بموجبها يتم افتراض قيم ابتدائية للمعلمات وهي $(\alpha^{t},\beta^{t},\lambda^{t})$ ( ) وبعدها تطبيق خطوات خوارزمية (EM) والتي تتطلب حساب الخطوة E والخطوة M وعليه فان الدالة المشتركة الى المتغير العشوائي (x) الذي يمثل التوزيع الاحتمالي الى البيانات المشاهدة مع المتغير العشوائي (z) الذي يمثل التوزيع الاحتمالي الى البيانات المفقودة ستحسب كالاتي [8]

$$f(x,z,\alpha,\beta,\lambda)=p(z,\lambda)\,f(x\,|\,z,\alpha,\beta)$$

$$f(x,z,\alpha,\beta,\lambda)==\frac{e^{-\lambda}\lambda^{z}}{z!}\left(1-e^{-\lambda}\right)^{-1}\alpha\beta z x^{\alpha-1}e^{-\beta z x^{\alpha}}$$

وباستخراج $e^{-\lambda}$ عامل مشترك من بسط و مقام الصيغة اعلاه نحصل على

$$f(x,z,\alpha,\beta,\lambda)=\alpha\,\beta\, z\, x^{\alpha-1}\,\lambda^{z}\, e^{-\beta z x^{\alpha}}\,\frac{1}{z!\,(e^{\lambda}-1)}$$

$x>0\,,\ z=1,2,\ldots\ldots$

بعد إيجاد الدالة المشتركة نقوم بإيجاد الدالة الحدية الى المتغير العشوائي (z) والذي من خلاله نجد التوقع الشرطي الذي يتم استبداله بكل قيمة من القيم المفقودة وكالاتي

$$f(z\,|\,x,\alpha,\beta,\lambda)=\frac{f(x,z,\alpha,\beta,\lambda)}{f(x,\alpha,\beta)}$$

$$f(z\,|\,x,\alpha,\beta,\lambda)=\frac{\alpha\,\beta\, z\, x^{\alpha-1}\, e^{-\beta z x^{\alpha}}\ \lambda^{z}\frac{1}{z!\,(e^{\lambda}-1)}}{\frac{\alpha\,\beta\,\lambda\, x^{\alpha-1}}{(1-e^{-\lambda})}\, e^{-\lambda-\beta x^{\alpha}+\lambda e^{-\beta x^{\alpha}}}}$$

$$f(z\,|\,x,\alpha,\beta,\lambda)=\frac{\lambda^{z-1}}{(z-1)!}\, e^{-\beta z x^{\alpha}-\lambda e^{-\beta x^{\alpha}}+\beta x^{\alpha}} \qquad z=1,2,\ldots\ldots \qquad (19)$$

ومن الدالة الشرطية اعلاه نقوم بإيجاد التوقع الشرطي وكالاتي

$$E(Z\,|\,X;\alpha,\beta,\lambda)=\sum_{Z=1}^{\infty} Z\, P(Z\,|X;\,\alpha,\beta,\lambda)$$

$$E(Z\,|\,X;\alpha,\beta,\lambda)=\sum_{Z=1}^{\infty} Z\ \frac{\lambda^{z-1}}{(z-1)!}\, e^{-\beta z x^{\alpha}-\lambda e^{-\beta x^{\alpha}}+\beta x^{\alpha}}$$

لنفرض ان $b=z-1$ ومن ثم فان $z=b+1$

وان حدود b هي من الصفر الى ∞

$$E(Z\,|\,X;\alpha,\beta,\lambda)=\sum_{b=0}^{\infty}(b+1)\ \frac{\lambda^{b}}{(b)!}\, e^{-\beta(b+1)x^{\alpha}-\lambda e^{-\beta x^{\alpha}}+\beta x^{\alpha}}$$

$$E(Z\,|\,X;\alpha,\beta,\lambda)=e^{-\lambda e^{-\beta x^{\alpha}}+\beta x^{\alpha}}\ \sum_{b=0}^{\infty}(b+1)\ \frac{\lambda^{b}}{(b)!}\ e^{-\beta(b+1)x^{\alpha}}$$

$$E(Z\,|\,X;\alpha,\beta,\lambda)=e^{-\lambda e^{-\beta x^{\alpha}}+\beta x^{\alpha}}\ \sum_{b=0}^{\infty}(b+1)\ \frac{\lambda^{b}}{(b)!}\ e^{-\beta b x^{\alpha}-\beta x^{\alpha}}$$

$$E(Z\,|\,X;\alpha,\beta,\lambda)=e^{-\lambda e^{-\beta x^{\alpha}}+\beta x^{\alpha}-\beta x^{\alpha}}\ \sum_{b=0}^{\infty}(b+1)\ \frac{\lambda^{b}}{(b)!}\ e^{-\beta b x^{\alpha}}$$

$$E(Z\,|\,X;\alpha,\beta,\lambda)=e^{-\lambda e^{-\beta x^{\alpha}}}\ \sum_{b=0}^{\infty}(b+1)\ \frac{\left[\lambda e^{-\beta x^{\alpha}}\right]^{b}}{b!}$$

$$E(Z\,|\,X;\alpha,\beta,\lambda)=e^{-\lambda e^{-\beta x^{\alpha}}}\left[\sum_{b=0}^{\infty} b\ \frac{\left[\lambda e^{-\beta x^{\alpha}}\right]^{b}}{b!}+\sum_{b=0}^{\infty}\frac{\left[\lambda e^{-\beta x^{\alpha}}\right]^{b}}{b!}\right]$$

$$E(Z\,|\,X;\alpha,\beta,\lambda)=e^{-\lambda e^{-\beta x^{\alpha}}}\left[\sum_{b=0}^{\infty} b\ \frac{\left[\lambda e^{-\beta x^{\alpha}}\right]^{b}}{b!}+e^{\lambda e^{-\beta x^{\alpha}}}\right]$$

$$E(Z\,|\,X;\alpha,\beta,\lambda)=e^{-\lambda e^{-\beta x^{\alpha}}}\ \sum_{b=0}^{\infty} b\ \frac{\left[\lambda e^{-\beta x^{\alpha}}\right]^{b}}{b!}\ +1$$

$$E(Z\,|\,X;\alpha,\beta,\lambda)=\left[e^{-\lambda e^{-\beta x^{\alpha}}}\ \lambda\, e^{-\beta x^{\alpha}}\ \sum_{b=0}^{\infty}\frac{\left[\lambda e^{-\beta x^{\alpha}}\right]^{b-1}}{(b-1)!}\ \right]+1$$

ومن ثم فان التوقع الشرطي الى المتغير العشوائي z بإعطاء قيمة المتغير العشوائي x سيكون كالاتي

$$E (Z | X ; \alpha , \beta , \lambda) = 1 + \lambda e^{-\beta x^{\alpha}} \qquad (20)$$

ان الخطوة اعلاه تمثل الخطوة M بالنسبة الى خوارزمية EM والتي يتم فيها استبدال القيم المفقودة بالتوقع الشرطي الى القيم المفقودة (القيم الابتدائية) وبمساواة المعادلات (16), (17), (18) بالصفر وتكرار العملية حيث ان المقدرات الى المعلمات سوف تكون بالشكل الاتي [8]

$$\alpha^{(t+1)} = n \left[\sum_{i=1}^{n} (\log x_i) \left(\beta^{(t+1)} x_i^{(t+1)} w_i^{(t)} \right) \right]^{-1} \qquad (21)$$

$$\beta^{(t+1)} = n \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha(t+1)} w_i^{(t)} \right]^{-1} \qquad (22)$$

$$\lambda^{(t+1)} = n^{-1} \left[1 - e^{-\lambda(t+1)} \right] \sum_{i=0}^{n} w_i^{(t)} \qquad (23)$$

حيث ان $w_i^{(t)} = 1 + \lambda^{(t)} e^{-\beta^{(t)} x_i^{\alpha(t)}}$

ونستمر بالتكرار الى ان يتم الحصول على مقدرات مستقرة او لحين تحقيق شرط التوقف للخوارزمية بالحصول على نسبة خطأ معينة $\varepsilon = 0.00005$ مثلا .

(2) طريقة Minmum Chi Square باستخدام خوارزمية Downhill Simplex

Minmum Chi Square Using Downhill Simplex Algorithem

تعد طريقة اقل مربع كاي من الطرق التقليدية في تقدير المعلمات وتعتمد هذه الطريقة على اساس جعل مجموع مربع كاي أصغر ما يمكن وتعرف دالة مربع كاي [2] كما يأتي:

$$x^2 = \sum_{x=1}^{k} \frac{(n_x - p_x)^2}{p_x} \qquad (24)$$

حيث ان $n_x = \frac{f_x}{N}$, $N = \sum_{x=1}^{k} f_x$

وللحصول على مقدرات المعلمات باستخدام هذه الطريقة تم استخدام طريقة Downhill Simplex [1] هي طريقة عددية تستعمل لتقليل او لتعظيم دالة الهدف (المشكلة الرياضية تحت الدراسة) في فضاء متعدد الابعاد، تطبق هذه الطريقة على مشاكل الامثلية غير الخطية عندما لا يمكن ايجاد المشتقة، تم استخدام هذه التقنية العددية لاول مرة عام 1965 على يد [John Nelder & Roger Mead] وقد سميت الخوارزمية على اسم هذين الباحثين (Nelder Mead Algorithem) حيث استخدموا هذه الطريقة في تقدير مصفوفة هس (Hussian matix) في الجوار الادنى، وصفت هذه الخوارزمية لتقليل قيمة دالة الى n من المتغيرات حيث تعتمد على مقارنة قيمة الدالة عند (n+1) من نقاط الشكل الهندسي (الشكل الهندسي الاولي) يلي ذلك استبدال القيمة العالية بنقطة اخرى و بذلك يتحول الشكل من حالة الى حالة اخرى الى ان يصل الى الشكل الامثل (اي القيم التي تجعل دالة الهدف اقل ما يمكن) و ذلك يتم بالاعتماد على عدد من العمليات في كل عملية يتم تحول الشكل الهندسي الاولي الى شكل اخر حتى يصل الى الشكل الامثل، وهذه العمليات تشمل الانعكاس (Reflection) ، التوسع (Expansion)، الانكماش (Contraction) والتقلص (Shrinkage). وفيما يلي خطوات تقدير معلمات توزيع بواسون – ويبل المركب بطريقة Downhill Simplex Method .

1– تحديد دالة الهدف (Objective function) للخوارزمية [الصيغة الرياضية التي لا يمكن حلها] وتحديد نوعها من حيث التعظيم او التقليل و هنا تمثل صيغة مربع كاي (chi – square) التي نهدف الى جعلها اقل ما يمكن حيث ان صيغة مربع كاي تمثل الصيغة (24)

2– ادخال قيم معلمات الخوارزمية الاربعة وهي (σ: معلمة الانعكاس)، (γ: معلمة التوسع)، (ρ: معلمة الانكماش) ، (τ: معلمة التقلص) ، حيث ان معلمة معرفة كما يلي

$0 < \tau < 1$ ، $0 < \rho < 1$ ، $\gamma > 1$ ، $\sigma > 0$

وفي اغلب البحوث التي تناولت هذه الخوارزمية كانت كل قيمة من قيم معلمات الخوارزمية مساوية الى $\sigma = 1$، $\gamma = 2$ ، $\rho = 0.5$ ، $\tau = 0.5$ وهي القيم التي اعتمدت عند تطبيق الخوارزمية .
تم توظيف هذه الطريقة في تقدير معلمات توزيع بواسون – ويبل المركب من قبل الباحثة بعد الاطلاع على المصادر [1 ,5 ,9]

3- توليد مصفوفة مكونة من(n+1) من النقاط الاختبارية لكل متغير او معلمة في الدالة وتسمى هذه المصفوفة بمصفوفة الحلول الاولية وهي ذات البعد $(n+1) \times m$
حيث ان m : تمثل عدد الاعمدة وهي عدد المعلمات في التوزيع
n+1 : عدد القيم الاختبارية لكل معلمة

$$W = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \lambda_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \lambda_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n+1} & \beta_{n+1} & \lambda_{n+1} \end{vmatrix}$$

4- تعوض قيم كل صف من المصفوفة اعلاه في دالة الهدف وحساب قيمتها ومن ثم ترتب دوال الهدف الناتجة [والتي عددها n+1] من الاقل قيمة الى اعلى قيمة حيث ان الاقل قيمة هي التي تمثل افضل حل والاعلى قيمة هي التي تمثل اسوء حل .

5- ايجاد المتوسط لمصفوفة الحلول باستخدام الصيغة الاتية :

$$X_m = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} w\ (i)$$

6- ايجاد نقطة اختبار جديدة تسمى نقطة الانعكاس (Reflection Point :x_r) ويتم ايجادها وفق الصيغة الاتية :

$$X_r = X_m + \sigma\,(X_m - X_{n+1})$$

ومن ثم حساب دالة الهدف لهذه النقطة $f\,(x_r)$ فاذا كانت $f_1 < f_r < f_{n+1}$ اي ان نقطة الانعكاس تقع ما بين افضل نقطة واسوء نقطة عندئذ يتم استبدال اسوء نقطة بالنقطة x_r اي جعل $x_{n+1} = x_r$
اما اذا كانت $f_r < f\,x_1$ اي ان نقطة الانعكاس افضل من افضل نقطة انتقل للخطوة الاتية .

7- ايجاد نقطة اختبار جديدة تسمى نقطة التوسع (Expansion Point :e) تحسب كالاتي :

$$Xe = X_m + \gamma\,(X_r - X_m)$$

ثم ايجاد دالة الهدف لنقطة التوسع $f\,(x_e)$ فاذا كانت $f\,(x_e) < f\,(x_r)$ (اي ان نقطة التوسع افضل من افضل نقطة) استبدل اسوء نقطة بنقطة التوسع $x_{n+1} = x_e$ اما اذا كان $f(x_n) < f(x_r) < f(x_{n+1})$ عندئذ ننتقل الى الخطوة الاتية .

8- ايجاد نقطة اختبار جديدة تمثل نقطة الانكماش (Contraction Point : C) ويتم ايجادها في حالتين
a) اذا كانت $f(x_n) < f(x_r) < f(x_{n+1})$ عندئذ فان الصيغة الاتية سيتم استعمالها لايجاد نقطة الانكماش الخارجي (Outside Contraction : X_{OC})

$$X_{oc} = X_m + \rho\,(X_r - X_m)$$

ومن ثم يتم ايجاد الدالة لنقطة الانكماش اعلاه $f(x_{oc})$ فاذا كانت $f(x_{oc}) \le f(x_r)$ نستبدل اسوء نقطة (x_{n+1}) بنقطة الانكماش الخارجي (x_{oc}) عدا ذلك اذهب للنقطة 9 .

b) اذا كانت $f(x_r) \ge f(x_{n+1})$ [اي ان نقطة الانعكاس اسوء من اسوء نقطة] عندئذ سيتم ايجاد نقطة الانكماش الخارجي (Inside Contraction : X_{ic}) سيتم ايجادها من الصيغة الاتية:

$$X_{ic} = X_m - \rho (X_m - X_{n+1})$$

ومن ثم يتم حساب الدالة الى نقطة الانكماش الداخلي $f(x_{ic})$ فاذا كانت $f(x_{ic}) < f(x_{n+1})$ نستبدل اسوء نقطة x_{n+1} بنقطة الانكماش الداخلي X_{ic} عدا ذلك نذهب الى الخطوة 11.

9- ايجاد نقطة اختبار جديدة تمثل نقطة التقلص (Shrink Point : x_{sh}) عند n من النقاط و تحسب وفق الصيغة الاتية :

$$X_{sh} = X_i + \tau (X_i - X_1)$$

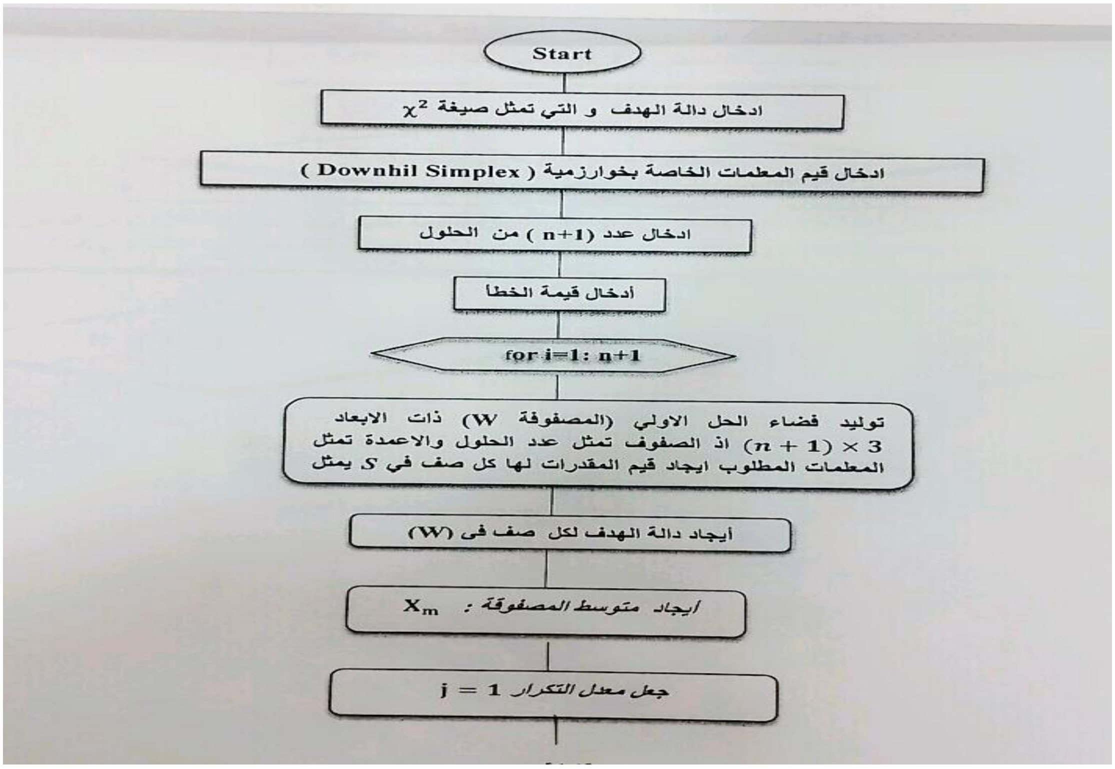
10- عند تحقق شرط توقف التكرار يتم التوقف وطباعة افضل حل وهذا الشرط يتحقق عندما عند الحصول على اقل قيمة لدالة الهدف اي

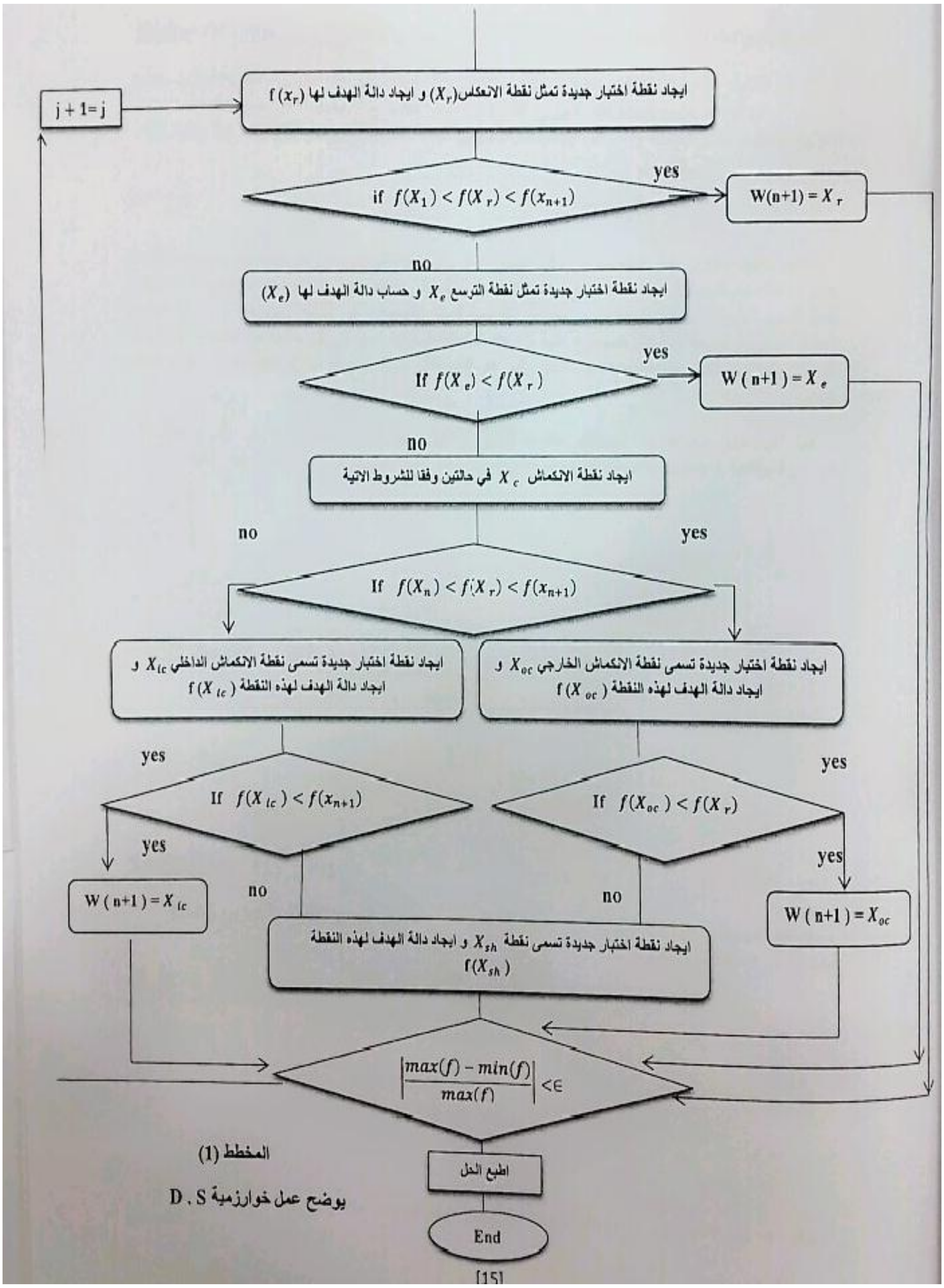
$$\left| \frac{max(f) - min(f)}{max(f)} \right| < \in$$

وان $\in$ عدد صغير جدا وعند تحقق هذا الشرط ننتقل الى الخطوة 11

11- طباعة الحل الامثل الذي يجعل دالة الهدف اقل ما يمكن (اي قيم المعلمات التي حققت اقل قيمة لدالة الهدف) و توقف عمل الخوارزمية.

المخطط ادناه يوضح عمل خوارزمية Downhill Simplex في تقدير معلمات توزيع بواسون – ويبل المركب والمصمم من قبل الباحثة لمياء [1] مع اجراء بعض التغييرات البسيطة ليناسب توزيع البحث .





المخطط (1)

يوضح عمل خوارزمية D . S

(3) **طريقة تقدير تعتمد على النسب المئوية** Method Of Estimation Based On Percentiles

ان اول من اكتشف هذه الطريقة هو Kao (1958 -1959) [6] حيث تعتبر هذه الطريقة مناسبة لتوزيع ويبل والتوزيع الاسي المعمم بسبب طبيعة دالة التوزيع لهذه التوزيعات، تعتمد هذه الطريقة على وجود الدالة التجميعية للتوزيع المطلوب تقدير معلماته وتفترض ايجاد مقدر لا معلمي للدالة التجميعية p_i والذي يأخذ عدة حالات منها

$$p_i = \frac{i}{n+1} \quad , \quad p_i = \frac{i-\frac{3}{8}}{n+\frac{1}{4}} \quad , \quad p_i = \frac{i-\frac{1}{2}}{n}$$

لكن تعد الصيغة الاولى اكثر استخداما من باقي الصيغ الاخرى، ومن ثم فان مقدرات المعلمات للتوزيع المطلوب تقدير معلماته يتم الحصول عليها عن طريق ملائمة الخط المستقيم الى النقاط النظرية المستحصلة من دالة التوزيع ونقاط النسب المئوية للعينة، اي بمساواة الصيغة التقريبية للدالة التجميعية الى الدالة التجميعية ومن ثم مساواة المقدار للصفر وتربيعه وادخال المجموع علية وايجاد المشتقة الجزئية نسبا الى كل معلمة من معلمات التوزيع او النموذج المطلوب تقدير معلماته حيث ان افضل مقدر هو الذي يقلل الدالة التي تم استخراجها بعد التربيع وادخال المجموع .

وعليه فان تطبيق هذه الطريقة في تقدير معلمات توزيع بواسون ويبل المركب سيكون بالشكل الاتي ووفقا لدالة التوزيع التراكمية المحسوبة بالصيغة (9) وعلى افتراض ان مقدر دالة التوزيع التراكمية لها الصيغة الاتية

$$P_i = \frac{i-\frac{3}{8}}{n+\frac{1}{4}} \qquad (25)$$

$$P_i = \frac{e^{\lambda e^{-\beta x i^{\alpha}}} - e^{\lambda}}{1-e^{\lambda}}$$

$$T = \sum_{i=1}^{n}[\log pi - \log Fi]^2$$

$$T = \sum_{i=1}^{n}\left[\log pi - \log \frac{e^{\lambda e^{-\beta xi^{\alpha}}} - e^{\lambda}}{1-e^{\lambda}}\right]^2$$

$$T = \sum_{i=1}^{n}\left[\log(Pi) - \log\left(e^{\lambda e^{-\beta xi^{\alpha}}} - e^{\lambda}\right) + \log(1-e^{\lambda})\right]^2 \qquad (26)$$

وباشتقاق الصيغة (26) اعلاه بالنسبة الى معلمات توزيع بواسون – ويبل المركب الثلاث ابتداءا من الاشتقاق بالنسبة الى المعلمة α وكالاتي

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha} = 2\sum_{i=1}^{n}\left[\log(p\,i) - \log\left(e^{\lambda e^{-\beta x i^{\alpha}}} - e^{\lambda}\right) + \log(1-e^{\lambda})\right] \;\ldots$$

$$\ldots\ldots \left[-\frac{e^{\lambda e^{-\beta xi^{\alpha}}}\lambda e^{-\beta xi^{\alpha}}(-\beta)\, xi^{\alpha}\log(x\,i)}{e^{\lambda e^{-\beta xi^{\alpha}}} - e^{\lambda}}\right]$$

تم توظيف هذه الطريقة في تقدير معلمات توزيع بواسون – كاما المركب من قبل الباحثة بعد الاطلاع على المصدر [6]

وبمساواة المقدار اعلاه الى الصفر والقسمة على 2 ينتج

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[\log(p\,i) - \log\left(e^{\lambda e^{-\beta x i^{\alpha}}} - e^{\lambda}\right) + \log(1-e^{\lambda})\right] \quad \hat{\alpha} \qquad \ldots$$

$$\ldots\ldots \left[\frac{\beta\lambda e^{\lambda e^{-\beta xi^{\alpha}}} e^{-\beta xi^{\alpha}}\, xi^{\alpha}\log(x\,i)}{e^{\lambda e^{-\beta xi^{\alpha}}} - e^{\lambda}}\right] \qquad (27)$$

وباشتقاق الصيغة (26) بالنسبة الى المعلمة β

$$\frac{\partial T}{\partial \beta} = 2\sum_{i=1}^{n}\left[\log(p\, i) - \log\left(e^{\lambda e^{-\beta x i^{\alpha}}} - e^{\lambda}\right) + \log(1 - e^{\lambda})\right] . \left[\frac{-e^{\lambda e^{-\beta xi^{\alpha}}}\lambda e^{-\beta xi^{\alpha}}(-xi^{\alpha})}{e^{\lambda e^{-\beta xi^{\alpha}}} - e^{\lambda}}\right] = 0$$

وبمساواة المقدار اعلاه الى الصفر والقسمة على 2 ينتج

$$\hat{\beta} = \sum_{i=1}^{n}\left[\log(p\, i) - \log\left(e^{\lambda e^{-\beta x i^{\alpha}}} - e^{\lambda}\right) + \log(1 - e^{\lambda})\right] \left[\frac{\lambda xi^{\alpha}\, e^{\lambda e^{-\beta xi^{\alpha}}}\, e^{-\beta xi^{\alpha}}}{e^{\lambda e^{-\beta xi^{\alpha}}} - e^{\lambda}}\right] \qquad (28)$$

وباشتقاق الصيغة (26) بالنسبة الى المعلمة λ

$$\frac{\partial T}{\partial \lambda} = 2\sum_{i=1}^{n}\left[\log(p\, i) - \log\left(e^{\lambda e^{-\beta x i^{\alpha}}} - e^{\lambda}\right) + \log(1 - e^{\lambda})\right] . \frac{-e^{\lambda e^{-\beta xi^{\alpha}}}\, e^{-\beta xi^{\alpha}}}{e^{\lambda e^{-\beta xi^{\alpha}}} - e^{\lambda}} - \frac{e^{\lambda}}{1 - e^{\lambda}}$$

وبمساواة المقدار اعلاه الى الصفر والقسمة على 2 ينتج

$$\hat{\lambda} = \sum_{i=1}^{n}\left[\log(p\, i) - \log\left(e^{\lambda e^{-\beta x i^{\alpha}}} - e^{\lambda}\right) + \log(1 - e^{\lambda})\right] \left[\frac{-e^{\lambda e^{-\beta xi^{\alpha}}}\, e^{-\beta xi^{\alpha}}}{e^{\lambda e^{-\beta xi^{\alpha}}} - e^{\lambda}} - \frac{e^{\lambda}}{1 - e^{\lambda}}\right] \qquad (29)$$

بما ان مقدرات المعلمات المستخرجة في الصيغ (27) و (28) و (29) على التوالي هي معادلات غير خطية، لذا سيتم استخدام طريقة عددية لحلها متمثلة باستخدام خوارزمية D.S الموضحة خطواتها في الطريقة السابقة مع استبدال دالة الهدف بالخطوة الاولى بدالة المعلمة المقدرة باعتبارها هي دالة الهدف .

7- تجربة المحاكاة لتقدير معلمات توزيع بواسون – ويبل المركب

تم استخدام اسلوب المحاكاة عن طريق كتابة برنامج بلغة (matlab) بطريقة المعكوس حيث استخدمت الصيغة (13) كدالة للتوليد وتنفيذ مراحل تجربة المحاكاة مرورا باختيار قيم اولية لمعلمات التوزيع ومن ثم توليد متغيرات عشوائية تتوزع وفقا لتوزيع بواسون – ويبل المركب وصولا الى مرحلة التقدير باستخدام طرائق التقدير الموضحة انفا وانتهاءا بمرحلة المقارنة باستخدام المقياس الاحصائي MSE، الجداول ادناه توضح نتائج تجربة المحاكاة لاربعة نماذج مختلفة من المعلمات وحجوم العينات .

جدول (1) يبين مقدرات ومتوسطات مربعات الخطأ للمعالم ومتوسطات مربعات الخطأ لدالتي pdf والمعولية لتوزيع بواسون – ويبل المركب بالنسبة الى النموذج الاول للمعلمات .

n	Method		α= 1.25	β = 1	λ= 0.5	Mse pdf	Mse R
25	mle	est.	1.363871	0.888364	1.068648	0.036704	0.007955
		mse	0.077626	0.099153	0.537517		
	D.S	est	1.250682	0.994407	0.500811	0.001724	0.000685
		mse	0.003097	0.011868	0.000131		
	Per	est	1.429484	1.345639	0.500811	0.081384	0.008171
		mse	0.148988	0.185183	0.000131		
	best		D.S	D.S	D.S	D.S	D.S
50	mle	est.	1.342915	0.840984	1.123182	0.019647	0.005055
		mse	0.037258	0.077107	0.524583		
	D.S	est	1.245925	0.986778	0.499784	0.000619	0.000242
		mse	0.001138	0.00346	6.47E-05		
	Per	est	1.397202	1.362462	0.499784	0.054638	0.008206
		mse	0.10617	0.310258	6.47E-05		
	Best		D.S	D.S	D.S	D.S	D.S
100	mle	est.	1.327681	0.837901	1.133886	0.013871	0.003998
		mse	0.022841	0.067053	0.490046		
	D.S	est	1.246935	0.991156	0.499938	0.000322	0.000102
		mse	0.000753	0.001431	2.99E-05		
	Per	est	1.321813	1.195246	0.499938	0.023259	0.004385
		mse	0.059045	0.194205	2.99E-05		
	best		D.S	D.S	D.S	D.S	D.S
150	mle	est.	1.319877	0.838035	1.148048	0.011977	0.003591
		mse	0.016397	0.065098	0.499797		
	D.S	est	1.249718	0.996738	0.500206	0.000288	8.46E-05
		mse	0.000675	0.001206	2.17E-05		
	Per	est	1.285925	1.107199	0.500206	0.0127	0.002508
		mse	0.030627	0.092003	2.17E-05		
	best		D.S	D.S	D.S	D.S	D.S

جدول (2) يبين مقدرات ومتوسطات مربعات الخطأ للمعالم ومتوسطات مربعات الخطأ لدالتي pdf والمعولية لتوزيع بواسون – ويبل المركب بالنسبة الى النموذج الثاني للمعلمات .

n	Method		α=1.5	β =1	λ=1.5	Mse pdf	Mse R
25	mle	est.	1.480028	1.190545	1.04574	0.050762	0.008703
		mse	0.091348	0.202379	0.411872		
	D.S	est	1.502653	1.006636	1.497274	0.000842	0.000164
		mse	0.00189	0.003503	0.003677		
	Per	est	1.674729	1.30486	1.497274	0.060173	0.006415
		mse	0.148241	0.139157	0.003677		
	best		D.S	D.S	D.S	D.S	D.S
50	mle	est.	1.480183	1.152574	1.182475	0.036179	0.006429
		mse	0.056038	0.124569	0.216121		
	D.S	est	1.504114	1.005546	1.50187	0.000592	0.000109
		mse	0.001455	0.002325	0.001949		
	Per	est	1.664695	1.425977	1.50187	0.052341	0.007416
		mse	0.120676	0.357284	0.001949		
	best		D.S	D.S	D.S	D.S	D.S
100	mle	est.	1.494336	1.102624	1.251198	0.025015	0.005108
		mse	0.032018	0.089339	0.127666		
	D.S	est	1.502193	1.00395	1.500557	0.000555	0.000101
		mse	0.001286	0.00215	0.001213		
	Per	est	1.61514	1.318785	1.500557	0.037247	0.005389
		mse	0.087446	0.341396	0.001213		
	best		D.S	D.S	D.S	D.S	D.S
150	mle	est.	1.492983	1.101929	1.271069	0.025008	0.004345
		mse	0.028391	0.078433	0.115796		
	D.S	est	1.503624	1.005097	1.501144	0.000535	9.72E-05
		mse	0.001324	0.002051	0.000682		
	Per	est	1.573562	1.199922	1.501144	0.023374	0.00327
		mse	0.064264	0.204462	0.000682		
	best		D.S	D.S	D.S	D.S	D.S

جدول (3) يبين مقدرات ومتوسطات مربعات الخطأ للمعالم ومتوسطات مربعات الخطأ لدالتي pdf و دالة المعولية لتوزيع بواسون ويبل المركب بالنسبة الى النموذج الثالث للمعلمات .

n	Method		α=1.75	β = 0.8	λ= 0.2	Mse pdf	Mse R
25	mle	est.	1.543966	0.825747	0.28408357	0.029594	0.009247
		mse	0.263131	0.035871	0.12850811		
	D.S	est	1.755737	0.798571	0.19997239	0.002231	0.001429
		mse	0.003015	0.014278	4.23E-06		
	Per	est	2.15503	1.123275	0.19997239	0.050663	0.011888
		mse	0.492882	0.185554	4.23E-06		
	best		D.S	D.S	D.S	D.S	D.S
50	mle	est.	1.634098	0.778041	0.329916	0.018915	0.006302
		mse	0.169521	0.024613	0.130932		
	D.S	est	1.754811	0.788066	0.199977	0.000999	0.000662
		mse	0.001578	0.005677	2.21E-06		
	Per	est	2.032134	1.093167	0.199977	0.04139	0.010278
		mse	0.334612	0.217953	2.21E-06		
	best		D.S	D.S	D.S	D.S	D.S
100	mle	est.	1.712535	0.762975	0.333058	0.012863	0.004384
		mse	0.110259	0.015058	0.100297		
	D.S	est	1.751624	0.790694	0.200034	0.000332	0.000205
		mse	0.000804	0.001698	1.04E-06		
	Per	est	1.883377	0.931193	0.200034	0.016566	0.004232
		mse	0.134236	0.078087	1.04E-06		
	best		D.S	D.S	D.S	D.S	D.S
150	mle	est.	1.733377	0.748381	0.334396	0.010542	0.003679
		mse	0.089556	0.014193	0.082319		
	D.S	est	1.751633	0.789396	0.199973	0.000255	0.000154
		mse	0.000763	0.001239	7.76E-07		
	Per	est	1.813186	0.85676	0.199973	0.007688	0.002205
		mse	0.066302	0.026928	7.76E-07		
	best		D.S	D.S	D.S	D.S	D.S

جدول (4) يبين مقدرات ومتوسطات مربعات الخطأ للمعالم ومتوسطات مربعات الخطأ لدالتي pdf ودالة المعولية لتوزيع بواسون ويبل المركب بالنسبة الى النموذج الرابع للمعلمات .

n	Method		α=2	β = 1	λ= 2	Mse pdf	Mse R
25	mle	est.	1.502765	1.469379	0.505548	0.103568	0.01352
		mse	0.544919	0.415749	2.455499		
	D.S	est	2.002262	1.007395	2.004422	0.000978	0.000165
		mse	0.003058	0.003859	0.007898		
	Per	est	2.222409	1.284798	2.004422	0.048293	0.005866
		mse	0.233546	0.113489	0.007898		
	best		D.S	D.S	D.S	D.S	D.S
50	mle	est.	1.60454	1.404146	0.613426	0.075191	0.01023
		mse	0.398498	0.295177	2.1264		
	D.S	est	1.999967	1.001153	1.998738	0.000631	0.000114
		mse	0.002108	0.002692	0.004091		
	Per	est	2.255248	1.454669	1.998738	0.050325	0.006521
		mse	0.202314	0.345503	0.004091		
	best		D.S	D.S	D.S	D.S	D.S
100	mle	est.	1.690673	1.409522	0.649668	0.054433	0.007525
		mse	0.278384	0.264541	1.967932		
	D.S	est	2.000016	1.002059	1.999534	0.000644	0.000112
		mse	0.002219	0.002555	0.001934		
	Per	est	2.236508	1.453092	1.999534	0.047271	0.005564
		mse	0.192139	0.45727	0.001934		
	best		D.S	D.S	D.S	D.S	D.S
150	mle	est.	1.739412	1.400472	0.668831	0.041293	0.005819
		mse	0.205744	0.247215	1.897706		
	D.S	est	2.000441	1.001942	1.99896	0.000632	0.000109
		mse	0.002237	0.002302	0.001457		
	Per	est	2.18281	1.333412	1.99896	0.034361	0.003873
		mse	0.14495	0.335719	0.001457		
	best		D.S	D.S	D.S	D.S	D.S

8- تحليل نتائج تجربة المحاكاة

في هذا الجانب تم تحليل نتائج تجربة المحاكاة لتوزيع بواسون المقطوع عند الصفر –ويبل المركب والموضحة نتائجه في الجداول اعلاه والمتضمنة قيم مقدرات المعلمات وقيم متوسط مربعات الخطأ للمقدرات ومتوسط مربعات الخطأ لدالة الكثافة الاحتمالية فضلا عن متوسط مربعات الخطأ دالة البقاء (المعولية) ولحجوم عينات مختلفة ولاربعة نماذج للمعلمات المختارة .

ومن النتائج نلاحظ قيمة متوسط مربعات الخطأ (MSE) لمقدرات المعلمات لحجوم العينات ونماذج المعلمات المفترضة الاتي :

1- عند كافة حجوم العينات وجميع النماذج المختارة للمعلمات كانت طريقة اقل مربع كاي باستخدام خوارزمية Downhill Simplex هي الافضل في تقدير معلمات التوزيع (α , β , λ)

2- في ما يتعلق بتقدير دالة الكثافة الاحتمالية ودالة المعولية فقد اثبتت طريقة اقل مربع كاي باستخدام خوارزمية Downhill Simplex تفوقها على طريقة الامكان الاعظم وطريقة النسب المئوية ولجميع حجوم العينات وجميع النماذج المختارة .

9- الاستنتاجات

1- التوزيعات المركبة والتي منها توزيع بواسون ويبل الذي يمثل توزيع جديد لاوقات الحياة من احد الوسائل الاخرى لاختبار توزيع البيانات في حالة فشل التوزيعات الاخرى في مطابقة البيانات .

2- يتضح من خلال تجربة المحاكاة ان طريقة اقل مربع كاي باستخدام خوارزمية D.S كانت افضل الطرق في تقدير دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع المركب لكافة النماذج المختارة وذلك لامتلاكها اقل قيمة لمتوسط مربعات الخطأ (mse) .

3- ان اسلوب التركيب المتبع في البحث انتج توزيع يمتاز بان دالة معدل الفشل له تاخذ العديد من الحالات (متزايدة، متناقصة، شكل الحوض، الشكل الموحد) وان توزيع ويبل المفرد دالة معدل الفشل له تاخذ عدة حالات بالاعتماد على قيمة معلمة الشكل في التوزيع وهذا يعني ان التوزيع الناتج وفقا لهذا الاسلوب في التركيب قد احتفظ بخواص دالة معدل الفشل لتوزيع وقت الحياة الداخل في التركيب .

المصادر

1- الحلفي، لمياء داود (2015) " مقارنة طرائق تقدير المعلمات ودالة المعولية لتوزيع lambda ذو الاربع معلمات مع تطبيق عملي "، رسالة مقدمة الى كلية الادارة ولاقتصاد / جامعة بغداد للحصول على درجة " ماجستير علوم في الاحصاء " .

2- محمد، ايناس عبد الحافظ، (2016) "تقدير نماذج مختلطة لبيانات مصنفة مع تطبيق عملي "اطروحة مقدمة الى كلية الادارة والاقتصاد / جامعة بغداد للحصول على درجة " دكتوراة فلسفة في الاحصاء" .

3- Adamidis, K ., Loukas, S . (1998) A lifetime distribution with decreasing failure rate , Statistics & Probability Letters 39 , PP 35 – 42 .

4- Alkarni, S., Oraby, A . (2012) A Compound Class Of Poisson And Lifetime Distributions , Journal of Satistics Applications & Probability 1, No . 1, pp 45 – 51 .

5- Gao, F. & Han, L., (2012), "Implementing the Nelder-Mead simplex algorithm with adaptive parameter", Comput Optim Appl DOI 10.1007/s10589-010-9329-3 pp .259 – 277 Vol . 51.

6- Gupta, D. R., Kund, D. (2000) "GENERALIZED EXPONENTIAL DISTRIBUTION : DIFFERENT METHOD OF ESTIMATIONS ", J . Statist. Comput. Simul . , Vol . 00 , PP 1 – 22 .

7- Kus , C . (2007) "A new lifetime distribution" , Computational Statistics & Data Analysis , 51 , pp 4497 – 4509 .

8- Lu , W. , Shi , D . (2012) " A new compounding life distribution : the weibull – poisson distribution " , Journal of Applied Statistics Vol. 39 , No.1 , pp 21 – 38 .

9- Nelder, J. & Mead, R., (1965) "A simplex method for function minimization", Computer J., Vol.7, Issue.4, P. (308–313).

10- Neta, F . L. , Cancho, V . G., Barriga, G . D . (2011) " The Poisson – Exponential Distribution :A Bayesian Approach", Journal Of Applied Statistics , Vol . 38, No . 6 , pp 1239 – 1248 .

11-Neto , F . L . , Cancho, V . G ., Barriga , G . D . (2011) " The Poisson – Exponintial Distribution : A Bayesian Approach " , Journal of Applied Statistics Vol . 38 , No . 6 , pp 1239 - 1248 .

12-Sanjay, K . S., Singh, U., Kumar, M . (2014) "Estimation for the parameter of poisson – Exponential Distribution Under Bayessian Paradigm" , Journal of Data Science , 12 , pp 157 – 173.

Comparison of some methods for estimating Poisson-Weibull distribution parameters

Abstract

In this paper was discussed the process of compounding two distributions using new compounding procedure which is connect a number of life time distributions (continuous distribution) where is the number of these distributions represent random variable distributed according to one of the discrete random distributions . Based on this procedure have been compounding zero – truncated poisson distribution with weibell distribution to produce new life time distribution having three parameter , Advantage of that failure rate function having many cases (increasing , dicreasing , unimodal , bathtube) , and study the resulting distribution properties such as : expectation , variance , comulative function , reliability function and failure rate function . In addition to estimating the parameters of the resulting distribution by using three methods of estimation are maximum likelihood method ,minmum chi square method using Downhill simplex algorithm , percentile method. The comparison between them was depending on the statistical measure mean square error (MSE) by implementing simulation experiment using different samples size (small , large , medium) , which through their results was reached that minmum chi square method using Downhill simplex algorithm is the best to estimating the parameter and probability function for compound distribution .

Keywords compound poisson distributions , compound poisson weibull ,Maximum Likelihood Method , Minmum Chi Square Method , percentile method , Downhill simplex algorithm .