مقارنة بين طريقة بيز وطريقة الإمكان الأعظم الكاملة لتقدير أنموذج إنحدار بواسون الهرمي وتطبيقها على وفيات الأمهات في بغداد

م.د. لمياء محمد علي / كلية الإدارة والإقتصاد/جامعة بغداد
الباحث/ ايثار حسين جواد/ كلية القانون/جامعة بغداد

تاريخ التقديم:2017/1/15
تاريخ القبول:2017/4/25

المستخلص

يهدف هذا البحث الى مقارنة طريقة بيز (Bayesian Method) وطريقة الإمكان الأعظم الكاملة (Full Maximum Likelihood) لتقدير أنموذج إنحدار بواسون الهرمي .
تمت المقارنه من خلال اسلوب المحاكاة وبإستعمال أحجام عينات مختلفة (120 , 60 , n=30) وتكرارت مختلفة (5000 , r=1000) للتجارب إذ تم إعتماد معيار متوسط مربعات الخطأ (Mean Square Error) للمقارنة بين أفضلية طرائق التقدير ومن ثم إختيار أفضل طريقة لتقدير الأنموذج وتوصلنا الى ان أنموذج بواسون الهرمي الذي تم تقديره بطريقة الإمكان الأعظم الكاملة وبحجم عينة (n=30) هو الأفضل لتمثيل بيانات وفيات الأمهات وذلك بعد ان تم عتماد قيمة معلمة التوزيع التي حصلنا عليها من خلال برنامج الـ(easy fit) ($\mu = 3.9167$) ، ومن ثم أخذنا قيمتين افتراضية لهذه المعلمة إحداهما أصغر منها ($\mu = 2.50$) والأخرى أكبر منها ($\mu = 4.50$) وذلك للحصول على نتائج أكثر دقة ، لذا تم تطبيقه على البيانات الحقيقية التي تم الحصول عليها من وزارة الصحة حيث تم تسجيل عدد وفيات الأمهات على مدى خمس سنوات وبشكل فصلي ، وتم إختيار ثلاث دوائر صحه في بغداد ، إذ ان كل دائرة صحه تمثل مجموعه لذا ستكون (20) مشاهده لكل مجموعه وان مجموع المشاهدات الكلي سيكون (60) .

المصطلحات الرئيسة للبحث/ وفيات الأمهات ، أنموذج إنحدار بواسون الهرمي ، الإمكان الأعظم الكاملة ، طريقة بيز.

مجلة العلوم
الاقتصادية والإدارية
العدد 101 المجلد 23
الصفحات 504ـ 523

*البحث مستل من رسالة ماجستير

1-1 المقدمة Introduction

سيتم التطرق في هذا البحث الى طبيعة نماذج الإنحدار متعدد المستويات (Multilevel regression models) أو مايسمى بالهرمي (Hierarchy) من حيث آلية البناء والهدف من إعتمادها في التحليل الإحصائي ، ومن ثم نبين أحد أهم أنواع تلك النماذج وهو أنموذج إنحدار بواسون الهرمي (Hierarchical Poisson regression model) ، الذي يعد lk الأدوات الملائمه لتحليل البيانات التي تكون بشكل معدلات أو بيانات معدوده ، كذلك تم التطرق الى تقدير معلمات أنموذج إنحدار بواسون بصيغته والهيكليه عبر طرائق التقدير المتاحه وهي طريقة الإمكان الأعظم الكامله (Full Maximum Likelihood Method) وطريقة بيز(Bayesian Method) ، كما تم إعتماد معيار متوسط مربعات الخطأ (MSE) لأجل المقارنه بين طرائق التقدير تلك لاحقاً .

إهتم العديد من الكتاب والباحثين بموضوعة نماذج الإنحدار بشكل عام والإنحدار الهرمي بشكل خاص وهناك من تناول موضوع إنحدار بواسون الهرمي ، وفيما يلي استعراض لأهم ما كتب في هذا المجال .

- في عام (1978) م قدم الباحثون (Leigh وآخرون)[18] دراسه حول تاثير المعلم والمدرسه على مستوى أداء الطالب استخدموا فيه انموذج انحدار متعدد المستويات الهرمي في تحليل البيانات حيث تم التركيز على المشاكل التي تنشأ حينما ترتبط نتائج الإنحدارات داخل المجموعه مع خصائص المعلم/المدرسه ، حيث طبقوا تحليل متعدد المستوى بمستوى واحد لتحليل بيانات افتراضيه متعددة المستويات والتي تباينت العلاقه المنهجيه بين نوعية المعلم/الصف وعدم تجانس الإنحدارات داخل المجموعه ، وتوصلوا الى ان تحليل متعدد المستويات بمستوى واحد المقترح يمكن ان يعطي تقديرات مضلله لتأثيرات المعلم/المجموعه على متوسط نتائج المجموعه وان اسلوب متعدد المستويات المحدد توفر بعض المؤشرات على سوء المواصفات ويمكن تحديد اتجاه التحيز في تقدير تأثيرات المعلم/المجموعه على متوسط نتائج المجموعه.

- وفي عام (1988)م وكتطوير لنظرية بيز التجريبيه في التقدير فقد قدم الباحث (Stephen)[24] بحثاً استخدم فيه أنموذج هرمي (ذو مستويين) حيث بين ان المشاهدات تختلف داخل كل مجموعه (مثل الفصول الدراسيه أو المدرسه) ، حيث اعتبرت كداله لمستوى المجموعه أو المعلمات الجزئيه وقد اكد في بحثه على تقدير كل من المعلمات الجزئيه والكليه وتم توسيع منطق هذه الأساليب وراء حاله نموذجيه لتشمل مجالات بحثيه متنوعه مثل تحليل ميتا ، اختبار النظريه الكلاسيكيه وكذلك نظرية بيز التجريبيه في التقدير حيث توصل الباحث الى انه من الممكن تقدير المعلمات الجزئيه بوسائل متنوعه مثل النسب ، الفروق ، معاملات الإنحدار الخطي ، ومعاملات الإنحدار اللوغاريتمي الخطي .

- في عام (1999)م قدم الباحثون (Ian وآخرون)[15] بحثا استعملوا فيه ثلاثة تطبيقات لشرح استخدام الأنموذج الهرمي في المجال الصحي ، التطبيق الأول كان جميع معدلات الوفيات في منطقه صغيره في كلاسكو واستخرج الإرتباط الذاتي المكاني بين البواقي (Spatial autocorrelation between residuals) ، اما التطبيق الثاني فكان على حالات سرطان البروستات في المقاطعات الأسكتلنديه حيث استعملوا مجموعه من النماذج لدراسة ما اذا كانت الإصابه أعلى في المناطق الريفيه ، وفي التطبيق الثالث قاموا بتطوير أنموذج متعدد المستويات لفحص الوفيات الناجمه عن السرطان وامراض القلب والأوعيه الدمويه في كلاسكو في وقت واحد في الأنموذج المكاني (Spatial model) .

- في عام (2007)م قدم الباحث (Andrew)[9] بحثا استخدم فيه نماذج هرمية حيث ذكر ان هذه النماذج هي تعميم لنماذج الإنحدار الإعتياديه إلا ان معاملات الإنحدار فيها تكون متغيره وليس ثابته ولها أنموذج خاص بها ، كما بين نقاط الضعف والقوة في هذه النماذج من خلال مثال تطبيقي للتنبؤ بمستويات غاز الرادون في المنزل على عينه من مقاطعات الولايات المتحده وتوصل الى ان أنموذج بواسون الهرمي هو انموذج فعال للغايه للتنبؤات على المستويين (المستوى-1 او المستوى-2) ولكن يمكن بسهوله ان يُساء تفسيرها .

- في عام (2013)م قدم الباحث (صبري)[3] بحثاً حول مقارنة طرائق تقدير معلمات أنموذج إنحدار بواسون عندما تعاني البيانات من مشكلة التعدد الخطي شبه التام عبر طريقة إنحدار الحرف وطريقة مقدرات ليو ، كما قدم طريقتين مقترحه للتقديرحيث استعمل اسلوب مونتي-كارلو في المحاكاة لتوليد البيانات حيث إعتمد متوسط مربعات الخطأ كمعيار للمقارنه بين طرائق تقدير معلمات الأنموذج ، حيث أظهرت نتائج المحاكاة تفوق الطريقتين المقترحتين للتقدير طبقت الطريقه المقترحه الأولى على بيانات حقيقيه للأطفال تمثل عدد حالات العيوب الخلقيه للأطفال في القلب وجهاز الدوران حيث توصل الى ان اسلوب تحويل الجذر التربيعي مع أكبر قيمه مميزه سمه مهمه في المقدر الجيد لمعلمة التحيز .

2-1 مشكلة البحث

بالرغم من كل الجهود التي تبذلها وزارة الصحه العراقيه من إقامة البرامج الصحيه وتدريب الكوادر وغيرها من اجل النهوض بالواقع الصحي للبلد (خصوصا في فترة ما بعد 2003) لكن يلاحظ تراجع في الوضع الصحي للمواطن ناهيك عن انتشار الأمراض الإنتقاليه والأوبئه بين الحين والآخر، يتضح ذلك من خلال ارتفاع عدد الوفيات بشكل عام ووفيات الأمهات بشكل خاص لذا وجب دراسة أهم العوامل المؤثره في تلك الظاهره من خلال استعمال انموذجين للإنحدار وفق عدة معايير .

3-1 هدف البحث

يهدف البحث دراسة أهم العوامل التي تؤثرعلى ظاهرة زيادة أعداد وفيات الأمهات في بغداد عبر إستخدام أنموذج أنحدار بواسون الهرمي ومن ثم إعتماد طريقتين للتقدير ومقارنة طرائق التقدير وفق معيار متوسط مربعات الخطأ وتحديد افضلها للوقوف على اسباب الزيادة هذه.

4-1 النماذج متعددة المستويات Multi-level Models

شكلت نماذج الإنحدار بصيغتها الإعتياديه المعروفه كما في النموذج المبين في الصيغه (1-1) والذي يمكن كتابته كما يلي[(9)p.387] :

$$\underline{y} = X\,\underline{\beta} + \underline{u} \qquad (1-1)$$

إذ ان :

$\underline{y}$: موجه المتغير المعتمد (متغير الإستجابه) بدرجة nx1 .

X: مصفوفة المتغيرات المستقله (المتغيرات التوضيحيه) ذات الدرجه n x (p+1) .

$\underline{\beta}$: موجه المعلمات ذو الدرجه (p+1) x1.

$\underline{U}$: موجه الأخطاء العشوائيه ذو الدرجه nx1 .

شكلت تلك النماذج وسيله يلجأ اليها كثير من الباحثين من أجل دراسة تأثير المتغيرات التوضيحيه بشكل عام في متغير الإستجابه واخذت مكانة متميزه في تطبيقات متنوعه في جوانب وعلوم مختلفه كالعلوم الإنسانيه والإقتصاديه والصحيه وغيرها .

وبشكل مبسط لو تطرقنا الى أنموذج الإنحدار الخطي العام في حالته البسيطه (Simple Linear Model) ليكون وفق الصيغه الآتيه [(7)] :

$$= \alpha y_i + \beta_1 \;\; + u_i x_{i1} \qquad i=1,2,\ldots..n \qquad (1-2)$$

إذ ان :

y_i : يمثل متغير الأستجابه .

x_{i1} : يمثل المتغير التوضيحي .

β_1: معلمة الميل الحدي (معلمة الإنحدار) Regression parameter.

α : معلمة الحد الثابت (معلمة التقاطع) Intercept parameter .

u_i : حد الخطأ العشوائي .

فان هذه المعادله تدرس مدى تأثير المتغير التوضيحي في متغير الأستجابه بشكل عام أي لمجموعه واحده فقط كأن تكون (مستشفى معين ، ظاهره معينه ، بلد معين) مع إغفال التأثيرات الداخليه المضمنه في المتغير التوضيحي ، إذ ان من المعلوم وفق الظروف الطبيعيه وجود تفاوت واختلاف بين المستشفيات أوالبلدان أو المؤسسات التعليميه ، لذا وجب التفكير جدياً بمعرفة وتجزئة تلك التأثيرات الخاصه بالمتغير التوضيحي في المتغير المعتمد (متغير الإستجابه) مع ثبوت للظروف الأخرى أو الأجزاء الأخرى في ذات المتغير التوضيحي[1] ، من هنا انطلقت وتبلورت فكرة النماذج الهرمية لتكون وسيله لدراسة التأثيرات الجزئيه آنفة الذكر ، إذ يمكن إعادة كتابة النموذج الخطي البسيط المبين في الصيغه (1-2) ليكون كالآتي[(19)p.7] :

$$= \alpha_j + y_i \beta x_i \quad + u_i \qquad (1\text{-}3)$$

إذ ان :

α_j : تمثل معلمة إنحدار بشكل متغير عشوائي .

J=1,2,….,nj والذي يشير الى عدد المجموعات الجزئيه في النموذج التي يتم دراسة تأثيرها بشكل منفصل واحده عن الأخرى .

وبتحول المعلمه α_j الى متغير عشوائي يمكن بناء (j) من نماذج الإنحدار الجزئيه كما في الصيغه ادناه[1] .

$$= \eta_{00} + u_{0j}\alpha_j \qquad (1\text{-}4)$$

إذ ان :

η_{00} : معلمة الحد الثابت للمستوى-2 (مستوى المجموعه) .

u_{0j} : خطأ المستوى -2 يتوزع بواسون بمعلمه (µ) .

الصيغه (1-4) أعلاه تسمى أنموذج مستوى المجموعه(المستوى-2) تشمل الحد الثابت η_{00} وحد الخطأ u_{0j} ، ومن خلال تعدد المستويات داخل الأنموذج لأكثر من مستويين يصبح لدينا مجموعة هيكلية من المعادلات او النماذج الجزئية ضمن النموذج الرئيسي لتشكل بمجملها نموذج هرمي متعدد المستويات.

5-1 **توزيع بواسون** Poisson Distribution :

يعد توزيع بواسون واحدا من ابرز التوزيعات المتقطعة المهمه جداً في الكثير من التطبيقات الإحصائية ، ويسمى في بعض الأحيان توزيع الحوادث نادرة الحصول كحوادث تصادم السفن او الوحدات المعيبة في دفعة انتاجية معينة او الاخطاء المطبعية في كتاب معين[(5)P.279].

يتأتى توزيع بواسون كحاله تقاربيه لتوزيع ثنائي الحدين كما بين ذلك العالم الفرنسي (***Simeon Poisson***) لذلك سُمي التوزيع باسمه .

إذا وجد متغير عشوائي متقطع وليكن (y_i) يمثل عدد الأوقات لحصول حدثٍ ما خلال فتره زمنيه معينه ، فإن ذلك المتغير يتبع توزيع بواسون بمعلمة قدرها (μ) ، كما ان دالة الكتله الإحتماليه للتوزيع هي[(8)p.15]

$$p(Y_i/\mu)= \begin{cases} \dfrac{e^{-\mu}\ \mu^{y}}{y!} & Y_i = 0,1,2,\ldots \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad (1\text{-}5)$$

إذ ان :

μ : تمثل معلمة التوزيع وهي ذات قيمه موجبه (µ>0) .

6-1 خصائص توزيع بواسون *Properties of Poisson Distribution*

من أهم خصائص توزيع بواسون يمكن إدراجها كالآتي[10] :

1-إن توقع عدد حصول حدث في وقت معين ضمن فترة زمنيه محدده يمثل معلمة التوزيع وهي ذاتها الوسط الحسابي (المعدل) للتوزيع أي أن :

$$E(Y)=\mu \qquad (1-6)$$

2-قيمة التباين لتوزيع بواسون تساوي الوسط الحسابي للتوزيع (μ) [(5)P.283] أي ان

$$\mathrm{var}(y)=E(y)=\mu \qquad (1-7)$$

إذ تعرف هذه الخاصيه بـ (Equidispersion) ، إلا انها غير مشروطه التحقق ، ففي بعض الأحيان ضمن الجوانب التطبيقيه غالبا ما يكون التباين للمتغيرات المعدوده (Count Variables) اكبر من الوسط الحسابي ، فتعرف هذه الخاصيه فوق التشتت (Over Dispersion) [(3)] .

3-يتصف توزيع بواسون بأنه من التوزيعات الملتويه باتجاه اليمين .

7-1 أنموذج إنحدار بواسون Poisson Regression Model

يُعد إنموذج إنحدار بواسون أحد أنواع النماذج الخطيه-اللوغاريتميه (Log-Linear Models) ، وهو النموذج الملائم لتحليل البيانات التي تكون بهيئة بيانات معدوده (Count Data) أو معدلات (Rate Data) ، وجاءت هذه التسميه للأنموذج نتيجة لإمتلاك الخطأ العشوائي فيه توزيع بواسون وبالتالي يتوزع متغير الإستجابه (y_i) وفقاً لذات التوزيع ، أما كونه خطياً - لوغاريتمياً فذلك يعني ومن خلال أخذ اللوغاريتم الطبيعي لصيغة النموذج فانها تتحول الى صيغه خطية [(17)] يعالج أنموذج إنحدار بواسون ويتعامل مع التأثيرات التي تحدث لمتغيرات الإستجابه والتي تكون نادرة الحصول كعدد حالات تصادم السفن أو معدل حالات تصادم السفن ، عدد الرجال المصابين بسرطان الثدي أو معدل الرجال المصابين بسرطان الثدي (بيانات معدوده أو معدلات) [(3)] .

8-1 الصيغه العامه لأنموذج إنحدار بواسون *General Form For Poisson Regression Model*

يمكن كتابة إنموذج إنحدار بواسون وفق الصيغه الآتيه [(3)]:

$$\underline{y}=e^{x\underline{\beta}+\underline{u}} \qquad (1-8)$$

إذ ان :

$\underline{y}$: موجة متغيرة الاستجابة ذي درجة nx1.

x : مصفوفة المتغيرات التوضيحية ذات الدرجة nx(P+1).

$\underline{\beta}$: موجة معلمات النموذج ذي الدرجة (P+1)x1.

$\underline{u}$ موجة الاخطاء العشوائية ذي الدرجة nx1.

n : حجم العينة .

P : عدد المتغيرات التوضيحية.

9-1 افتراضات انموذج انحدار بواسون

يقوم انموذج انحدار بواسون على ثلاثة افتراضات رئيسة [(3)]:

الافتراض الاول

ان الدالة الاحتمالية الشرطية لمتغير الاستجابة(y_i) عندما تكون معلمة التوزيع (μ) معلومة تتبع توزيع بواسون بمعلمة قدرها (μ) كما في صيغة التوزيع المبينة في المعادلة (5-1) والمذكورة آنفاً .

الافتراض الثاني

ان معلمة التوزيع في النموذج مساوية الى [(28)p.2]:

(1-9)

$$\mu_i = e^{x_i' \underline{\beta}}$$

إذ ان

x'_i : يمثل الصف **i** من مصفوفة المتغيرات التوضيحية **X** .

الافتراض الثالث

هناك استقلالية بين الازواج المرتبة للمتغيرين (X_i , Y_i) .

اجمالاً وباعمام خواص توزيع بواسون على نموذج انحدار بواسون وفق الافتراضات الثلاثة ، يكون الوسط الحسابي والتباين لمتغير الاستجابة y_i مساوياً الى[(12)] :

$$E(y_i/x) = var\ (y_i/x) = \mu_i = e^{x_i' \underline{\beta}} \qquad (1\text{-}10)$$

10-1 أنموذج انحدار بواسون الهرمي Hierarchical Poisson Regression Model

تعرفنا سلفا على انموذج انحدار بواسون بهيئته العامة والذي من خلاله يتم دراسة التاثير العام للمتغيرات التوضيحية في متغير الاستجابة دون بيان دور اثر كل متغير بثبوت المتغيرات التوضيحية الاخرى ، لذا سيتم التطرق الى انموذج انحدار بواســون الهرمــي ذو التجميع الجزئي ، علما ان توزيع الخطا العشوائي ومتغير الاستجابة هو توزيع بواسون بمعلمه قدرها (μ) ، كما ان الافتراضات الرئيسة الثلاثة التي تم ذكرها في الفقرة (9-1) تنطبق تماما مع طبيعة الأنموذج قيد البحث .

11-1 الصيغة العامة لانموذج انحدار بواسون الهرمي General form for Hierarchical poisson Regression Model

عند وجود متغير توضيحي واحد مضمن في معادلة الانحدار وفق انموذج انحدار بواسون الهيكلي ذو التجميع الجزئي (**Partial Pooling Model**) والذي يشير الى دراسة التاثيرات بشكل عام داخل كل مجموعة والتاثيرات الاجمالية للمتغيرات التوضيحية [(23)].

تكون معادلة الانحدار لانموذج انحدار بوسوان الهرمي متعدد المستويات كالآتي[(9)p.234] :

$$Y_{ij} = e^{\alpha_{j(i)} + \beta x_{ij} + u_{ij}} \qquad (1\text{-}11)$$

إذ ان :

Y_{ij} : يمثل متغير الاستجابة للمشاهدة (i) الواقعة ضمن المستوى (j) .

$\alpha_{j(i)}$: معلمة التقاطع وهي متغير عشوائي يمثل تاثير كل مستوى من مستويات (j) .

β: معلمة الانحدار(معلمة الميل الحدي) نفرضه متساوي لكل المجموعات .

x_{ij} : المتغير التوضيحي على المستوى-1 (الفردي) .

u_{ij}: حد الخطا العشوائي للمستوى-1 (الفردي) يتبع توزيع بواسون بمعلمه قدرها (μ) .

وبالعوده الى الصيغه (1-4)

$$\alpha_j = \eta_{00} + u_{0j}$$

وبالتعويض عن المعلمة $\alpha_{j(i)}$ (والتي اصبحت تمثل متغير عشوائي) بالصيغه (1-11) نحصل على الأنموذج العام مع متغير توضيحي واحد على المستوى-1(الفردي) [(1)] :

$$y_{ij} = e^{\eta_{00} + u_{0j} + \beta\, x_{ij} + u_{ij}} \qquad (1\text{-}12)$$

نلاحظ بان الأنموذج أصبح يحتوي حدين ، أحدهما ثابت والآخر عشوائي وهي تلخص التأثيرات على مستوى الفرد وتلك التي على مستوى المجموعه عموماً .

ومن خلال زيادة عدد المتغيرات التوضيحيه سنلاحظ زياده في هيكلية الأنموذج بوجود معلمات تقاطع جديده تخص المستوى ضمن المجموعه فضلاً عن الميل الذي يعبر عن كامل التأثير للمجموعات ككل[15] .

فعند وجود متغيرين توضيحيين تكون معادلة إنحدار أنموذج بواسون متعدد المستويات كالآتي :

$$y_i = e^{\eta_{00}+u_{01}+\eta_{11}+u_{02}+x_{1j}\beta_1+x_{2j}\beta_2+u_{ij}} \qquad (1\text{-}13)$$

إذ ان :

η_{00} : تمثل معلمة التقاطع للمستوى-2 .

η_{11} : تمثل معلمة التقاطع للمستوى-1 .

u_{01} : يمثل حد الخطأ للمستوى-1 .

u_{02} : يمثل حد الخطأ للمستوى-2 .

وبإستخدام المصفوفات يمكن إعادة كتابة النموذج فــي الصيغــه (1-13) أعــلاه ليكــون كما يلي [13]:

$$y = e^{x\eta+zu+\epsilon} \qquad (1\text{-}14)$$

إذ ان :

y : موجه متغير الإستجابه ذو درجه nx1 .

x : مصفوفة المتغيرات التوضيحيه للمعلمات الثابته ذات الدرجه nx(p+1) .

η : موجه المعلمات الثابته ذات الدرجه (p+1)x1 .

z : مصفوفة المتغيرات التوضيحيه للمعلمات العشوائيه ذات الدرجه nx(p+1) .

ϵ : متجه الأخطاء العشوائيه للمستوى-1 ذو درجه nx1 .

إذا كانت لدينا بيانات هرمية يمكن يستعمل أنموذج إنحدار متعدد المستويات لإيجاد تقدير الإرتباط بين المجموعات ، الأنموذج الذي تم وصفه سابقاً في صيغة (1-11) ولكن بعد إزالة المتغير التوضيحي (X_i) من الأنموذج فان الصيغة (1-11) تصبح [1]

$$Y_{ij} = e^{\alpha_{j(i)}+u_{ij}} \qquad (1\text{-}15)$$

For $i = 1,2,\ldots n$, $j=1,2,\ldots J$

وبتعويض صيغة (1-4) في الصيغة أعلاه نحصل على أنموذج العدم الأنموذج الخالي (Empty Model) وكالآتي :

$$Y_{ij} = e^{\eta_{00}+u_{0j}+u_{ij}} \qquad (1\text{-}16)$$

نلاحظ ان الصيغه أعلاه لا تفسر أي تباين في Y لأنه لا يتضمن أي متغير توضيحي وتحليل التباين الى مركبتين مستقلتين هما [1] :

σ^2_{u0} : تباين خطأ مستوى-2 .

σ^2_{ϵ} : تباين خطأ مستوى-1 .

وباستعمال هذا الأنموذج يمكننا تعريف إرتباط بين المجموعات (ρ) بالصيغــه الرياضيه الآتيه[1] :

$$ICC = \frac{\sigma^2_{u0}}{\sigma^2_{u0}+\sigma^2_{\epsilon}} \qquad (1\text{-}17)$$

إذ ان الإرتباط بين المجموعات يشير الى التباين المفسر بواسطة المجموعات بالمجتمع ، وهو عباره عن نسبة التباين الموجود على مستوى المجموعه مقارنة بالتباين الكلي للأنموذج ، ويمكن ان يفسر هذا الإرتباط ايضاً كارتباط بين مشاهدتين مسحوبتين عشوائياً من نفس المجموعه .

12-1 تقدير معلمات إنموذج إنحدار بواسون الهرمي

1-12-1 طريقة الإمكان الأعظم الكامله Full Maximum Likelihood Method

لاحظنا في الفقره الماضيه الصيغه العامه لأنموذج إنحدار بواسون الهرمي وهي صيغه غير خطيه ، وكما ذكرنا سلفاً فإن أنموذج إنحدار بواسون سواء بشكله العام أو الهرمي فإنه يتصف بأنه من النماذج الخطيه-اللوغاريتميه [12] .

يمكن تقدير إنموذج إنحدار بواسون الهرمي ذو التجميع الجزئي من خلال طريقة الإمكان الأعظم الكامله (FML) بأخذ اللوغاريتم الطبيعي للصيغه (1-14) لأجل تحويلها الى صيغه خطيه ليسهل التعامل معها في تطبيق خطوات الطريقه الخاصه بتقدير المعلمات كالآتي :

$$\text{Log } y = \text{Log}(e^{x\eta + zu + \epsilon})$$

$$y^* = x\eta + zu + \epsilon \qquad (1\text{-}18)$$

وبذلك يمكن إجراء ذات خطوات التقدير بطريقة الإمكان الأعظم الكاملة المستخدمه حين تمتلك مشاهدات متغير الإستجابه التوزيع الطبيعي [2] .

إذ ان :
$$y^* \sim N(x\eta, V)$$

V : مصفوفة التباين –والتباين المشترك وهي مصفوفه (Block Diogonal) ذات بعد (n×n) ، عناصر القطر الثانوي تشير الى عدم وجود تباين مشترك بين المشاهدات من مجموعات مختلفه [1].

$$V = \begin{bmatrix} \sigma_{u0}^2 * J_{n1} + \sigma_\epsilon^2 * I_{n1} & 0 \\ 0 & \sigma_{u1}^2 * J_{n2} + \sigma_\epsilon^2 * I_{n2} \end{bmatrix} \qquad (1\text{-}19)$$

إذ ان :

$\sigma^2 u_0$: مصفوفة التباين والتباين المشترك للمستوى-2 للمجموعه ككل .

$\sigma^2 u_1$: مصفوفة التباين والتباين المشترك للمستوى-1 للمجموعه الجزئيه .

I_{n1} : مصفوفة الوحدة الخاصه بالمجموعه ككل .

I_{n2} : مصفوفة الوحدة الخاصه بالمجموعه الجزئيه .

J_{n1} : مصفوفه جميع عناصرها (1) للمجموعه ككل .

J_{n2} : مصفوفه جميع عناصرها (1) للمجموعه الجزئيه .

وبتعظيم المشاهدات في الداله (1-18) تكون دالة الإمكان الأعظم كما يلي :

$$\Pi_{i=1}^{n} L(y^*/x,\eta) = (2\pi)^{-1/2} * (V)^{-1/2} * e^{-1/2(y*-x\eta)`v-1(y*-x\eta)}$$

$$L(y^*/x\eta) = (2\pi)^{-n/2} * (V)^{-n/2} * e^{-n/2(y*-x\eta)'v-1(y*-x\eta)} \qquad (1\text{-}20)$$

وبأخذ اللوغاريتم الطبيعي للصيغه والداله (1-20) نحصل على :

$$\text{LogL} = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log(V) - \frac{n}{2}(y^* - x\eta)'V^{-1}(y^* - x\eta) \qquad (1\text{-}21)$$

وبالإشتقاق الجزئي بالنسبه للمعلمه (η) نحصل على :

$$\frac{\partial Log\, L}{\partial\, \eta} = -2X'V^{-1}Y^* + 2X'V^{-1}X\eta \qquad (1\text{-}22)$$

وبمساواة ناتج الإشتقاق بالصفر يمكن الحصول على مقدرات الإمكان الأعظم لإنموذج إنحدار بواسون الهرمي كما في أدناه :

$$-2XV^{-1}Y^* + 2X'V^{-1}X\eta = 0$$

$$\hat{\eta}_{\text{Hpoisson FML}} = (X'V^{-1}X)^{-1} X'V^{-1}Y^* \qquad (1\text{-}23)$$

2-12-1 طريقة بيز لتقدير معلمات أنموذج إنحدار بواسون الهرمي

1-2-12-1 أسلوب بيز في التقدير Bayes Approach in Estimation

تبنى نظرية بيز على افتراض ان المعلمه(المعلمات) المطلوب تقديرها عباره عن متغير عشوائي (Random Variable) ، على اعتبار وجود وتوافر معلومات مسبقه عن تلك المعلمات يمكن وضعها بشكل دالة كثافه إحتماليه سابقه $P(\underline{\theta})$ ، والتي من الممكن تعريفها بأنها الدالة التي تمثل كل المعلومات والخبرات حول المعالم المراد تقديرها والتي تم التوصل اليها مسبقاً من خلال التحليل أو المراقبه لتلك المعلمات [(4)p.250] ، ومن خلال دمج تلك الداله $P(\underline{\theta})$ بدالة الإمكان الأعظم لمشاهدات العينه $f(x_1,x_2,\dots,x_n/\theta)$ يتم الحصول على دالة الكثافه الإحتماليه اللاحقه (Posterior pdf) $f(\underline{\theta}/\underline{X})$.

إنَّ مقدر بيز لأي معلمه يعتمد على دالتين : الأولى تعرف بدالة الكثافه الإحتماليه اللاحقه (Posterior pdf) والثانيه دالة الخساره (Loss Function) ، يمكن تعريف دالة الكثافه الإحتماليه اللاحقه بأنها دالة تمثل كل المعلومات حول المعلمات المراد تقديرها بعد مشاهدتها لمعلومات العينه الحاليه بعباره أخـرى أنها تركيب بين المعلومات الأوليـه وبيانات العينه الحاليه ، وأن دالة الخساره يمكن تعريفها أنها دالة معطاة تبين الخساره الناتجه من إتخاذ القرار ولها أثر في تحديد مقدر بيز وهناك أنواع مختلفه لدوال الخساره ولكن الأكثر شيوعاً دالة الخسارة التربيعية (Quadratic Loss Function) [(2)] .

نظرياً يمكن وصف نظرية بيز في حالة المتغيرات المستمره كما يلي [(4)p.251]:

$$f(\underline{\theta}) = f(\underline{X}/\underline{\theta})\, f(\underline{X},\underline{\theta}) \qquad (1\text{-}24)$$

إذ ان :

$f(\underline{X}/\underline{\theta})$: تمثل دالة الإمكان الأعظم لمشاهدات العينه .

وتكون الدالة الإحتماليه الشرطيه للمعلمه بوجود المشاهدات هي :

$$f(\underline{\theta}/\underline{x}) = \frac{f(\underline{x},\underline{\theta})}{f(\underline{x})} \qquad (1\text{-}25)$$

ومن خلال تعويض الصيغه (1-24) في المعادله (1-25) أعلاه نحصل على :

$$f(\underline{\theta}/\underline{X}) = \frac{f(\underline{x},\underline{\theta})\, f(\underline{\theta})}{f(\underline{x})} \qquad (1\text{-}26)$$

إذ ان :

$0 \neq f(\underline{X})$

كما ان $f(\underline{X})$ يمكن كتابتها من خلال الصيغه الآتيه :

$$f(\underline{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} (\underline{x}/\underline{\theta})\, f(\underline{\theta})\, d\underline{\theta} \qquad (1\text{-}27)$$

نلاحظ ان الداله في الصيغه أعلاه (1-26) تمثل الداله الحديه للمشاهدات لعدم إحتوائها على المتغير العشوائي $(\underline{\theta})$ وعليه يمكن كتابة الداله (2-33) كما يلي :

$$f(\underline{\theta}/\underline{x}) \propto f(\underline{x},\underline{\theta})\, f(\underline{\theta}) \qquad (1\text{-}28)$$

إذ ان :

$\propto$: ثابت التناسب .

ان الصيغه (1-27) تمثل التوزيع اللاحق للمعلمه (المعلمات) $\underline{\theta}$ وهي عباره عن حاصل ضرب دالة الإمكان الأعظم لمشاهدات العينه $f(\underline{x}/\underline{\theta})$ في دالة الكثافه الإحتماليه السابقه للمعلمه $f(\underline{\theta})$.

2-2-12-1 طريقة بيز لتقدير معلمات أنموذج إنحدار بواسون الهرمي

كما ذكرنا سلفاً فإن المتغير العشوائي (Y) في الصيغة (1-14) يتبع توزيع بواسون بمعلمه قدرها (μ_i) ، إذ نهدف الى تقدير معلمات الأنموذج في المعادلة (1-14) وجب أولاً وضع دالة كثافة إحتماليه أوليه (Prior pdf) لتوزيع المعلمات (μ_i) على اعتبار ان i=1,2,…,p من المتغيرات ضمن النموذج الهرمي ذي التجميع الجزئي .

ان التوزيع الأولي السابق لمعلمات أنموذج أنحدار بواسون وفقاً لتوزيع بواسون يتبع توزيع كاما (Gamma distribution)[13].

(1-29)

$$\mu_i \sim Gamma\ (\gamma, \gamma/\lambda_i)$$

إذ ان :

γ : معلمة الشكل في توزيع كاما وهي اكبر من الصفر .

وان $\hat{\lambda}_i \ = e^{x_i \eta}$

$$\log \hat{\lambda}_i \ = x_i\ \eta \qquad \textbf{(1-30)}$$

ومن خلال إعتماد التوزيع الحدي للمشاهدات على انه يتبع توزيع ثنائي الحدين السالب بمعلمتين هما (γ, ρ) .

NB(γ, ρ)

$$\equiv \text{NB}\left(\mu = \frac{\gamma\rho}{1-\rho}, \frac{\mu+\mu^2}{\gamma}\right) \qquad (1-31)$$

إذ ان :

$\gamma > 0$ ، $0 \le \rho \le 1$

كما يمكن كتابة دالة الكثافه الإحتماليه الحديه لتوزيع المشاهدات كما يلي :

$$= \frac{\Gamma(\gamma+X)}{\Gamma(\gamma)X!} \text{P}(\text{X}/\gamma)\ (1-\rho)^{\gamma} \qquad (\rho^{x}\textbf{1-32})$$

نلاحظ بأن التوزيع يأتي من توزيع بواسون المختلط ، وبذلك أصبحت عملية التقدير تتعامل مع معلمات أكبر مـن معلمات الأنموذج بحد ذاتـه مما يعرف هذه الحاله بالمعلمات الفوقيه (η, γ) ، أي أن توزيـــع المشاهدات وفقـاً لمـا ورد أعلاه يتوزع وفق توزيع ثنائي الحدين السالب .

$$\text{X}/\eta, \gamma \sim NB\ (e_i\mu_{i,}\ e_i\mu_i/\eta)$$

$$\hat{\eta}_i \ \equiv \ \frac{\gamma}{\gamma + e_i\mu_i} \qquad \textbf{(1-33)}$$

وان ($\hat{\eta}_i$) : تمثل التقدير الأولي للمعلمه ($\hat{\beta}_i$) وفق طريقة الإمكان الأعظم من أجل تعويضها لاحقاً في إيجاد تقدير معلمات الأنموذج بيزياً .

ووفقاً لمفهوم نظرية بيز فان التوزيع الشرطي لتقدير معلمة توزيع بواسون μ علماً ان المعلمات (η, γ) والبيانات معلومــه (X) يكــون وفقـــاً لتوزيـــع كاما (*Gamma*) ذو المعلمتين [12] .

$$\text{P}(\mu/\gamma, \eta, X) \sim Gamma\ (X+\gamma, \frac{e_i+\gamma}{\mu}) \qquad \textbf{(1-34)}$$

وعموماً يكون الوسط الحسابي للتوزيع اللاحق هو المقدر للمعلمه μ [12] .

$$\mu_i^* = (1-\eta_i)\ \mu_i\ \ \text{y}_\text{i} + \eta_i \qquad \textbf{(1-35)}$$

والآن يتم الإتجاه نحـو الهـــدف الرئيسي من عملية تقديرموجه المعلمات (η) في الأنموذج (22-1) بأسلوب بيز .

فبالعوده الى التوزيع الخاص بدالة الكثافه الإحتماليه للمشاهدات في الصيغه (32-1) على إعتبار ان المعلمه (η) هي المستهدفه في عملية التقدير يمكن إعادة كتابة دالة الكثافه الإحتماليه تلك مع تعظيم المشاهدات كالآتي :

$$L(\eta,\gamma) \quad = \Pi_{i=1}^{n} \frac{\Gamma(\gamma+x)}{\Gamma(\gamma)x!} \; (1-\eta_i)^{x} \, \eta_i^{\gamma} \qquad (1\text{-}36)$$

ولكون الأنموذج هرمي ، يمكن تعريف μ = max (X_i) تمثل أكبر قيمه في المشاهدات الجزئيه ، كما يمكن تعريف n_j *تمثل عدد قيم* X التي تمثل تكون منسوبه الى (j) للمجموعات الكليه ، وبالتالي فان μ تمثل المستوى-1 بينما بتجميع μ نحصل على N_j (13).

وبأخذ اللوغاريتم الطبيعي للداله (34-1) مع الإفتراضات أعلاه نحصل على :

$$\log L(\eta,\gamma)=\Sigma_{j=1}^{m} - \Sigma_{i=1}^{p} \gamma\, N_j \log(\gamma+j-1) - P\overline{x}_i \log(\gamma) + x'x + X_i * \log\left(1+\frac{e_i\mu_i}{\gamma}\right) \qquad (1\text{-}37)$$

ومن خلال إشتقاق الصيغه (37-1) أعلاه بالنسبه للمعلمه (η) نحصل على

$$\frac{\partial LogL(\eta,\gamma)}{\partial \eta} = \Sigma_{i=1}^{p} = (X_i - e_i\mu_i)\, \eta_i X_i \qquad (1\text{-}38)$$

وبمساواة ناتج الإشتقاق للصفر نلاحظ بان الصيغه (38-1) غير خطيه لذا وجب إستخدام الأساليب التكراريه في تقدير المعلمه أو موجه المعلمات (η) ومنها اسلوب سلاسل ماركوف مونتي- كارلو (MCMC)

.

إذ يمكن إستحصال مقدرات إنموذج إنحدار بواسون الهرمي من خلال المشتقه الثانيه للداله بالنسبه للمعلمات (η)

$$\frac{\partial^2 LogL}{\partial \eta' \eta} = (X'DX)$$

إذ ان :

$$\hat{\eta}_{\,poisson\ HMBayes} = (X'DX)^{-1} X'D^{-1} y^{*} \qquad (1\text{-}39)$$

وان D : مصفوفه قطريه ذات درجه (n×n) عناصرها

$$D = \begin{bmatrix} e_{i1}\hat{\eta}_i\mu_{i1}^{*} & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e_n\hat{\eta}_n\mu_n^{*} \end{bmatrix}$$

كما ان :

$\hat{\eta}_i$: كما وردت في إحتسابها ضمن الصيغه (33-1) .

μ_i^{*} : الوسط الحسابي للتوزيع اللاحق للمعلمه μ والوارد في الصيغه (35-1) .

بعد ان تم التعرف على أنموذج إنحدار بواسون الهرمي وتم بيان آليات تقديره (الإمكان الأعظم الكاملة وطريقة بيز) وجب الوقوف على مدى أفضلية الطريقتين في التقدير ومن ثم تطبيقهاعلى بيانات ظاهرة معينـه

(وفيات الأمهات) وبيان أفضل الطرق المستخدمه في تقدير معلماتها وذلك عبرإعتماد متوسط مربعات الخطأ (MSE)خلال تجربة المحاكاة .

11-1 معيار متوسط مربعات الخطأ Mean Square Error

يُعَد أبرز المقاييس المستخدمة للمقارنة بين النماذج الإحصائية وأفضليتها ، ويرمز له إختصاراً (MSE) ، وهو مقياس ذو درجة عالية في بيان كفاءة أفضلية طرائق التقدير تحديداً.
والصيغة العامة لهذا المقياس يمكن كتابتها كما يلي[22] :

$$\text{MSE} = \frac{\sum_{i=1}^{R}(\hat{\beta}-\beta)_i'(\hat{\beta}-\beta)}{R} \qquad (1\text{-}40)$$

إذ أن :
$\hat{\beta}$: تمثل المعلمة المقدرة وفق أي طريقة من طرائق التقدير المستخدمة في البحث (طريقة بيز، الإمكان الأعظم الكاملة) .
β : قيمة المعلمة الإفتراضية .
R: عدد تكرارات التجربة (باستخدام المحاكاة) .

1-2 الجانب التجريبي

سنعرض في هذا المبحث استخدام بعض الدوال الجاهزه والصيغ البرمجيه من برنامج الماتلاب (Matlab) في توليد البيانات وبناء نماذج المحاكاة لغرض المقارنة بين طرائق التقدير باختلاف أحجام العينات (n=30،60،120) وقيم مختلفة لمعلمة التوزيع (μ=4.50 , 3.9167 , 2.50) وتكرارات مختلفة (r=5000 , r=1000) ، كما تم إعتماد متوسط مربعات الخطأ (MSE) كمعيار للمقارنة بين أفضلية طرائق التقدير ومن ثم إختيار أفضل أنموذج وتطبيقه على البيانات الحقيقية .

2-2 توليد المتغيرات العشوائية Generating Random Variables

تم تنفيذ تجارب المحاكاة باستعمال ثلاث حجوم عينات مختلفة (120 , 60 , n= 30) وبتكرارات مختلفة (5000 , r=1000) ، علماً ان معلمة توزيع بواسون حسب برنامج الـ (easy fit) تساوي (3.9167) كما تم أفتراض قيمتين لمعلمة التوزيع (μ) احداهما أقل من القيمة الأصلية (2.50) والأخرى أعلى من القيمة الأصلية (4.50) وذلك للحصول على أعلى دقة ممكنة للنتائج فعند استخدام (μ , 3.9167= r=1000) وبأحجام عينات مختلفة (120 , 60 , n=30) وبتكرار (r=1000) ، حيث تم تطبيقه على أنموذج بواسون الهرمي الذي تم تقديره بطريقتي الإمكان الأعظم بمعلومات كاملة ، وطريقة بيز وبإعتماد متوسط مربعات الخطأ (MSE) كمعيار للمقارنه وذلك لدقته المعروفة ، فكانت النتائج كما في الجدول رقم (2-1) .

جدول (2-1) يوضح أفضلية طرائق التقدير لأنموذج بواسون الهرمي عند (r=1000, μ = 3.9167)

Sample size	Methods	Mse	Best
30	Hierarchical Poisson FML	0.1936	FML
	Bays Hierarchical Poisson	1.8394	
60	Hierarchical Poisson FML	0.3186	FML
	Bays Hierarchical Poisson	0.3400	
120	Hierarchical Poisson FML	0.4293	FML
	Bays Hierarchical Poisson	1.1439	
Best sample	Size = 30 methods Hierarchical Poisson FML		

أما عند تكرار التجربة لأكثر من 1000 مرة (r=5000) مع تثبيت معلمة التوزيع ولنفس حجوم العينات أعلاه نجد ان النتائج كما في الجدول رقم (2-2) .

جدول (2-2) يوضح أفضلية طرائق التقدير لأنموذج بواسون الهرمي عند (μ = 3.9167,r=5000,)

Sample size	Methods	Mse	Best
30	Hierarchical Poisson FML	0.0884	FML
	Bays Hierarchical Poisson	0.2402	
60	Hierarchical Poisson FML	0.1256	FML
	Bays Hierarchical Poisson	0.4024	
120	Hierarchical Poisson FML	0.1895	FML
	Bays Hierarchical Poisson	0.3426	
Best sample	Size = 30 methods Hierarchical Poisson FML		

وعند تغيير قيمة معلمة التوزيع (μ = 2.50) وهي قيمة افتراضية أقل من القيمة الحقيقية وبتكرار (r=1000) ونفس حجوم العينات أعلاه نحصل على النتائج التالية وكما مبين في الجدول رقم (2-3) أدناه .

جدول (2-3) يوضح أفضلية طرائق التقدير لأنموذج بواسون الهرمي عند (μ = 2.50 ,r=1000)

Sample size	Methods	Mse	Best
30	Hierarchical Poisson FML	0.0772	FML
	Bays Hierarchical Poisson	0.4903	
60	Hierarchical Poisson FML	0.1187	FML
	Bays Hierarchical Poisson	0.3852	
120	Hierarchical Poisson FML	0.1693	FML
	Bays Hierarchical Poisson	2.2868	
Best sample	Size = 30 methods Hierarchical Poisson FML		

أما عند زيادة تكرار التجربة لأكثر من 1000 (r=5000) ولنفس قيمة معلمة التوزيع وحجوم العينات أعلاه نلاحظ النتائج كما في الجول رقم (2-4) .

جدول (2-4) يوضح أفضلية طرائق التقدير لأنموذج بواسون الهرمي عند (μ = 2.50 ,r=5000)

Sample size	Methods	Mse	Best
30	Hierarchical Poisson FML	0.0509	FML
	Bays Hierarchical Poisson	0.2030	
60	Hierarchical Poisson FML	0.0531	FML
	Bays Hierarchical Poisson	1.4262	
120	Hierarchical Poisson FML	0.0833	FML
	Bays Hierarchical Poisson	0.5065	
Best sample	Size = 30 methods Hierarchical Poisson FML		

وعند تغيير قيمة معلمة التوزيع (μ = 4.50) وهي قيمة افتراضية أكثر من القيمة الحقيقية وبتكرار (r=1000) ونفس حجوم العينات أعلاه نحصل على النتائج التالية وكما مبين في الجدول رقم (2-5) أدناه .

جدول (2-5) يوضح أفضلية طرائق التقدير لأنموذج بواسون الهرمي عند (μ = 4.50 ,r=1000)

Sample size	Methods	Mse	Best
30	Hierarchical Poisson FML	0.2691	
	Bays Hierarchical Poisson	0.1084	Bays Hierachical Poisson
60	Hierarchical Poisson FML	0.3860	FML
	Bays Hierarchical Poisson	0.7619	
120	Hierarchical Poisson FML	0.5593	FML
	Bays Hierarchical Poisson	1.2308	
Best sample	Size = 30 methods Bays Hierarchical Poisson FML		

أما عند زيادة تكرار التجربة لأكثر من 1000 (r=5000) ولنفس قيمة معلمة التوزيع وحجوم العينات أعلاه نلاحظ النتائج كما في الجول رقم (2-6) .

جدول (2-6) يوضح أفضلية طرائق التقدير لأنموذج بواسون الهرمي عند (μr=5000, 4.50 =)

Sample size	Methods	Mse	Best
30	Hierarchical Poisson FML	0.1002	FML
	Bays Hierarchical Poisson	0.2150	
60	Hierarchical Poisson FML	0.1639	FML
	Bays Hierarchical Poisson	0.1807	
120	Hierarchical Poisson FML	0.2508	FML
	Bays Hierarchical Poisson	0.2758	
Best sample	Size = 30 methods Hierarchical Poisson		

3-2 تحليل نتائج المحاكاة Simulation Result Analysis

تم إعتماد متوسط مربعات الخطأ للمقارنة بين أفضلية طراقتي التقدير (الإمكان الأعظم بمعلومات كاملة وطريقة بيز) ، حيث أظهرت النتائج (كما في الجداول أعلاه) تفوق طريقة الإمكان الأعظم الكاملة لأنموذج بواسون الهرمي عند حجم عينة (n=30) في كل الحالات التي تم فيها تغيير حجوم العينات وقيم معلمة التوزيع وعدد مرات تكرار التجربة إلا في حالة واحدة وهي عند حجم عينه (n=30 ,μ =4.50 , r=1000) فقد تفوق فيها أنموذج بواسون الهرمي الذي تم تقديره بطريقة بيـــز .

يرى الباحث أن هذا يأتي من جراء قلة تكرار التجربة (r=1000) من الممكن حصول نتائج مظلله كونه لم يظهر إلا في هذه الحالة فقط .

لذلك وبعد التأكد من تفوق أنموذج إنحدار بواسون الهرمي المقدر بطريقة الإمكان الأعظم الكاملة قمنا بتطبيقه على البيانات الحقيقية التي تم الحصول عليها من وزارة الصحة .

4-2 الجانب التطبيقي

سوف نعرض في هذا المبحث وصف البيانات الخاصه بوفيات الأمهات Maternal Mortality حيث اعتمدنا بيانات حقيقيه حول وفيات الأمهات في بغداد ، حيث تم إختيار ثلاثه من دوائر الصحه (دائرة صحة بغداد الرصافه ، دائرة صحة بغداد الكرخ ودائرة مدينة بغداد الطبيه) وتم تسجيل حالات الوفيات لكل ثلاثة اشهر على مدى خمسة سنوات من سنة 2011 ولغاية سنة 2015 ، تم تسجيلها من السجلات الخاصه بكل دائرة حيث تمثل كل دائرة صحه او مجموعه (عدد وحدات المستوى الثاني) التأثير العشوائي ، إذ ان كل دائرة تمثل مجموعه لذا سيكون عدد المشاهدات (20) مشاهده لكل دائرة (مجموعه) ، ولكون بحثنا يشمل ثلاث دوائر فان عدد المشاهدات الكلي سيكون (60) مشاهده .

5-2 وصف بيانات البحث Description Data Search

بعد الزيارات المتكرره التي قمنا بها لوزارة الصحه العراقيه والدوائر المرتبطه بها بما فيها دائرة مدينة بغداد الطبيه بغية الحصول على بيانات تخص الظاهرة قيد الدراسه (وفيات الأمهات Maternal Mortality) تم الحصول على عينه مكونه من (60) مشاهده موزعه على (3) دوائر صحة في بغداد وكما مبين في الملحق رقم (1) ، لاحظنا ان هناك العديد من العوامل (المتغيرات التوضيحيه) المؤثره على زيادة وفيات الأمهات (Maternal Mortality) وهي كالآتي :-

X_1 : عمر الأم (حين الوفاة) . Age of mother

X_2 : تسلسل الحمل (تسلتسل الحمل الذي توفت به) . pregnancies Sequence

X_{31} : ولاده طبيعيه . Normal vaginal delivery

X_{32} : ولاده قيصريه .Caesarean section

X_{41} : عجز الجهاز التنفسي . Respiratory deficit
X_{42} : تقدم المشيمه . Provide placenta
X_{43} : نزف بعد الولاده . Bleeding after childbirth
X_{44} : نزف قبل الولاده Cardiogenic shock sharp
X_{45} : توقف القلب المفاجئ . Sudden cardiac death
X_{46} : احتمال خثرة السائل الأمنيوني .Likelihood of thrombus amniotic
X_{47} : ارتفاع ضغط الدم .Hypertension
X_{48} : عجز الكلى .Kidney deficit
X_{49} : تسمم الحمل . eclampsia
X_{410} : تمزق الرحم والأنزفه الدمويه . Uterine rupture and now hype vessels
X_{411} : نزف دماغي . Brain hemorrhage
X_{412} : جلطه رئويه .Pulmonary Empolism

6-2 إختبار توزيع المتغير المعتمد

بعد الإطلاع على البيانات فقد اعتمد أنموذج إنحدار بواسون الهرمي الجزئي (Poisson regression model partial hierarchy) .

إذ تم إختبار بيانات المتغير المعتمد (متغير الإستجابه) Y ببرنامج ال (Easy Fit) فتبين ان عدد وفيات الأمهات (Y) يتوزع توزيع بواسون بمرتبة (1) حسب اختبار كولموكروف-سميرونوف (Kolmogorov Smirnov)ومرتبه (1) حسب اختبار اندرسون دارلنغ (Anderson Darling) .

ومن ثم استخرجنا قيمة معلمة التوزيع ببرنامج ال (easy fit) ، حيث تم إعتمادها عند تقدير قيم المعلمات لأنموذج إنحدار بواسون ، كانت قيمة المعلمه (3.9167) .

1-6-2 تقدير معلمات إنموذج إنحدار بواسون الهرمي بطريقة الإمكان الأعظم الكامله (FML)

بعد أن أظهرت نتائج المحاكاة تفوق طريقة الإمكان الأعظم الكاملة (FML) لتقدير معلمات أنموذج إنحدار بواسون الهرمي (كما في الجداول أعلاه) تم بناء إنموذج إنحدار بواسون الهرمي وباستخدام نفس البرنامج في أعلاه وكانت تقديرات المعلمات بطريقة الإمكان الأعظم الكامله كما في الجدول (6-3) وكالآتي:

جدول رقم (6-3) يوضح تقدير معلمات أنموذج انحدار بواسون الخرمي بطريقة الإمكان الأعظم الكامله

Intercept	0.7805
$\hat{\beta}_1$	0.0164
$\hat{\beta}_2$	-0.0132
$\hat{\beta}_3$	0.0194
$\hat{\beta}_4$	0.0458
$\hat{\beta}_5$	0.0410
$\hat{\beta}_6$	0.0988
$\hat{\beta}_7$	0.0335
$\hat{\beta}_8$	0.1195
$\hat{\beta}_9$	0.0706
$\hat{\beta}_{10}$	0.0493

$\hat{\beta}_{11}$	0.0597
$\hat{\beta}_{12}$	0.0072
$\hat{\beta}_{13}$	0.0777
$\hat{\beta}_{14}$	0.0380
$\hat{\beta}_{15}$	0.1188
$\hat{\beta}_{16}$	0.0614
Group(intercept)	**65.43**
Residual	**163.89**
No. obs.=60 , No.groups=3 Factor(group1)=15.45 Factor(group1)=13.33 Factor(group1)=18.41	

يمكننا كتابة معادلة إنموذج إنحدار بواسون الهرمي الذي تم تقدير معلماته بطريقة الإمكان الأعظم الكامله كما يلي :

$$\mathbf{Y_{i=}}\ e^{\alpha_j + 0.0164x1 - 0.0132x2 + 0.0194x31 + 0.0458x32 + 0.0410x41 + 0.0988x42 + \cdots + 0.0614x12 + 163.8}$$

$$\alpha_j = \mathbf{0.7805 + 65.43}$$

ثم نعوض عن قيمة ال (α_j) بما يساويها بالمعادله أعلاه نحصل على الآتي :

$$\mathbf{Y_i} = e^{0.7805 + 0.0164x1 - 0.0132x2 + 0.0194x31 + 0.0458x32 + 0.0410x41 + 0.0988x42 + \ldots + 0.0614x12 + 163.89 + 65.43}$$

نلاحظ انه في أنموذج التجميع الجزئي مختلف التقاطع ان الميول ثابته ومتساويه لكل مجاميع المستوى-2 (دائرة الصحه) ، لكن الذي يختلف هنا هو معامل التقاطع (Intercept) من دائرة الى اخرى ، وبالتالي فان لدينا (3) معادلات إنحدار خطيه مقدره تعبر عن دوائر الصحه الثلاث وكما يأتي :

1-دائرة صحة الرصافه

كانت معادلة الإنحدار المقدرة كالآتي :

$$\mathbf{Y_i} = e^{15.45 + 0.0164x1 - 0.0132x2 + 0.0194x31 + 0.0458x32 + 0.0410x41 + 0.0988x42 + \ldots + 0.0614x12}$$

2-دائرة صحة الكرخ

كانت معادلة الإنحدار المقدرة كالآتي :

$$\mathbf{Y_i} = e^{13.33 + 0.0164x1 - 0.0132x2 + 0.0194x31 + 0.0458x32 + 0.0410x41 + 0.0988x42 + \ldots + 0.0614x12}$$

3-دائرة صحة مدينة بغداد الطبية

كانت معادلة الإنحدار المقدرة كالآتي :

$$\mathbf{Y_i} = e^{18.41 + 0.0164x1 - 0.0132x2 + 0.0194x31 + 0.0458x32 + 0.0410x41 + 0.0988x42 + \ldots + 0.0614x12}$$

7-2 الإستنتاجات Conclusion

بعد تنفيذ تجارب المحاكاة وما تم عرضه من نتائج وتحليل في الجانب التجريبي وكذلك تنفيذ التطبيق العملي على بيانات حقيقية لعدد وفيات الأمهات ولخمسة سنوات (2011-2015) وبشكل فصلي وعرض النتائج في الجانب التطبيقي وتحليلها إستنتجت الباحثه ما يلي :

أن طريقة الإمكان الأعظم الكاملة وبحجم عينة (n=30) أفضل من طريقة بيز لتقدير أنموذج بواسون الهرمي ، أي ان أنموذج بواسون الهرمي يصلح للعينات الصغيرة ، ومن هنا تتضح أهمية النماذج الهرميه بشكل عام وأنموذج التجميع الجزئي بشكل خاص في تحليل البيانات المهيكله او التي تكون بشكل متداخل مثل مريض داخل مستشفى ضمن منطقه جغرافيه معينه.

8-2 التوصيات Recommendation

على ضوء الإستنتاجات التي توصلنا اليها من خلال البحث يمكن إجمال التوصيات التاليه :

1-تطبيق النماذج الهرميه على بيانات تعاني من مشاكل الإنحدار مثل مشكلة التعدد الخطي وعدم التجانس وغيرها .

2-من خلال دراستنا أنموذج تحليل متعدد المستويات يلاحظ وجود عدة طرق للتقدير ، لذا نوصي باستخدام طرائق تقدير أخرى لتقدير المعلمات الثابته والعشوائيه مثل طريقة تقدير بيز الحصينه .

3-نوصي بتوسيع نطاق البحث بشمول اكثر من مستويين كأن تتم دراسة ظاهرة الوفيات ضمن مستشفى معين ضمن منطقة جغرافيه معينه بالإضافه الى شمول متغيرات توضيحيه على المستوى-2 ليكون التحليل اكثر دقة .

4-توصي الباحثه بشمول متغيرات توضيحيه اخرى ضمن هذه الدراسه مثل الرعايه الصحيه التي تلقتها الأم اثناء فترة الحمل الحاليه والسابقه لأهمية هذا المتغير وتأثيره على زيادة او تقليل عدد الوفيات .

5-من خلال اطلاع الباحثه على اسلوب جمع البيانات في دوائر الصحه التابعه للوزاره توصي باستخدام الأساليب الإحصائيه وادخال كوادرها دورات تدريبه بذلك لضمان دقة الإحصائيات .

6-نوصي بتوسيع قاعدة بيانات تخص الأم تبدأ من مراكز الرعايه الصحيه وصولا الى المستشفيات التي عادة ما تتم ولادة الأم فيها بحيث تكون معلومات كافيه عن كل أم تراجع المستشفى التي تقع ضمن المنطقة الجغرافيه لتلافي معظم اسباب الوفاة الناجمة عن جهل كادر المستشفى بالتاريخ الصحي للأم حين دخولها للمستشفى حال الولادة .

المصادر References

1-الحسيني ، مريم عبد الحسين أصغر علي (2014) ، "بناء نماذج الإنحدار الخطي المختلط وتطبيقه في المجال البيئي" ، رسالة ماجستير ، كلية الإدارة والإقتصاد ، جامعة بغداد .

2-الخفاجي ، علي محمد علي جيجان (2015) ، "مقدرات طريقة بيز وبعض الطرائق التقليديه شبه المعلميه لتقدير دالة الإنحدار اللوجستي في ظل البيانات المفقوده" ، رسالة ماجستير ، كلية الإدارة والإقتصاد ، جامعة بغداد .

3-صبري ، حسام موفق (2013) ، "مقارنه طرائق تقدير معلمات أنموذج إنحدار بواسون في ظل وجود مشكلة التعدد الخطي مع تطبيق عملي" ، أطروحة دكتوراه ، كلية الإداره والإقتصاد ، جامعة بغداد .

4-كاظم ، أموري هادي ، ومسلم ، باسم شليبه (2002) م ، "القياس الإقتصادي المتقدم-النظريه والتطبيق" ، مطبعة دنيا الأمل ، العراق ، بغداد .

5-هرمز ،أمير حنا ، (1990)م ، " الإحصاء الرياضي " ، مديرية دار الكتب للطباعة والنشر ، العراق ، نينوى .

6-Albert, J.(1985) , “Simultaneous Estimation of Poisson Means Under Exchangeable and Independence Models”, Journal of Statitical Computation and Simulation , Vol. 23 , PP: 1-14 .

7-Alkharusi Hussain , (2011) ," Hierarchical Linear Models: Applications in Educational Assessment Research", Educational Research Journal , Vol.26,No.1.

8-Al-Nasir , A.M & Rashid , D.H (1988) , "statistical inference" , Baghdad University , Higher Education Printing Press , Iraq , Baghdad .
9-Andrew, G and J. Hill , (2007) , " Data Analysis Using Regression and Multilevel/Hierarchical Models", Cambridge University Press , 32 Avenue of the Americas, New York, NY 10013-2473, USA.
10- Batah, F. S (2011) . "A New Estimator by Generalized Modified Jackknife Ridge Regression Estimator" , Jornal of Basrah Researches (Science) , Vol. 37 , No. 4 , PP. 138-149 , Iraq , Basrah.
11- Bernardinelli , L. & Montomoli, C. (1992), "Empirical Bayes Versus Fully Bayesian Analysis of Geographical Variation in Disease Risk", statistics in Medicine, Vol. 11 , PP: 983-1007 .
12- Christiansen Cindy L. & Morris Carl N. (1997) , "Hierarchical Poisson Regression Modeling" , Journal of the American Statistical Association , Vol. 92,No. 438 , PP: 618-632 .
13- Dalrymple , M.L & Hudson ,I.L& Ford, r.p.k.(2003) "Finite Mixture, Zero_inflated Poisson and Hurdle modles with application to SIDS" , Computation statistics & Data Analysis " vol 41 , pp: 491-504.
14- Haque , M.M. & Chin, H. C. , & Huang , H.(2010) . "Applying Bayesian Hierarchical Models to Examine Motorcycle Crashes at Signalized Intersections." Accident Analysis & Prevention , Vol. 42(1) , PP: 203-212 .
15- Ian, H. L. ; Alistair, H. L. ; Jon, R. ; Harvey, G. , (1999), "Multilevel Modelling of the Geographical Distributions of Diseases " , Applied Statistics , Vol. 48 , No.: 2 , PP: 253-268.
16- Keeler , E.B,& Rolph, J.E. (1988) , "The Demand for Episodes of Treatment in the Health Insurance Experiment", Journal of Health Economics, Vol. 7 , PP: 337-367 .
17- Lawless, J. F. (1987)," negative Binomial and mixed Poisson regression" ,Canadian journal of statistic Vol. 15 , PP: 209-225 .
18- Leigh,B. ; Robert,L.L. ; Frank,J.C. , (1978) , " Analyzing Multilevel Data in the Presence of Heterogeneous within-Class Regressions", Journal of Educational Statistics , Vol. 3 , pp: 347-383.
19- Leyland A.H. , Goldstein H.(2001) , "Multilevel Modelling of Health Statistics" , John Wiley & Sons .
20- Long , J. S(1997) , "Regression Models for Categorical and Limited Independent Variables" , SAGE Publicayion Inc , USA .
21- Mansson , K & Kebria , B . M & Sjolander , P & Shukur , G(2012) , "Improved Liu Estimators for the poisson Regression Model" , InternationalJornal of Statistics and Probability , Vol. 1 , No.1 , PP: 2-6 .
22- Mansson , K & Shukur , G (2011) , "A poisson Ridge Regression Estimator" , Economic Modeling , Vol. 28 , Issue. 4 , PP: 1475-1491.

23- Miaou Shaw-Pin (1994) , "The Relationship Between Truck Accidents and Geometric Design of Road Sections : Poisson Versus Negative Binomial Regression" , Accid. Anal. And Prev., Vol. 26, No. 4, PP: 471-482 .

24- Stephen, W. R. , (1988) , " Educational Applications of Hierarchical Linear Models: A Review , Journal of Educational Statistics , Vol. 13 , pp: 85-116 .

25- Tsutakawa, R. K.(1988), "Mixed Model for Analyzing Geographic Variability in Mortality Rates: , Journal of the American Statistical Association, Vol. 83 , PP: 37-42 .

26- Vonesh , E. F,(1990) , "Modeling Peritonitis Rates and Associated Risk Factors for Individuals on Continuous Ambulatory Peritoneal Dialysis" , Statistics in Medicine , Vol. 9 , PP: 263-271 .

27- Winkelmann , R (2008) , "Economic Analysis of Count Data" , 5th ed. , Springer, Verlag Berlin Heidelberg, Germany .

28- Woltman Heather , Feldstain Andrea , Mackay J. Christine , Rocchi Meredith (2012), "An Introduction to Hierarchical Linear Modeling" , Tutorials in Quantitative Methods for Psychology, Vol. 8(1) , pp: 52-69 .

29- W. J. Browne , D. Draper , (2006) , "A comparison of Bayesian and Likelihood-based Methods for Fitting Multilevel Models " , Bayesian Analysis, 1, No. 3, pp. 473-514 .

A comparison between Bayesian Method and Full Maximum Likelihood to estimate Poisson regression model hierarchy and its application to the maternal deaths in Baghdad

Abstract:

This research aims to compare Bayesian Method and Full Maximum Likelihood to estimate hierarchical Poisson regression model.

The comparison was done by simulation using different sample sizes (n = 30, 60, 120) and different Frequencies (r = 1000, 5000) for the experiments as was the adoption of the Mean Square Error to compare the preference estimation methods and then choose the best way to appreciate model and concluded that hierarchical Poisson regression model that has been appreciated Full Maximum Likelihood Full Maximum Likelihood with sample size (n = 30) is the best to represent the maternal mortality data after it has been reliance value parameter to the distribution obtained through a program of (easy fit) (μ = 3.9167), and then we take the hypothetical values for this one smaller parameter (μ = 2.50) greater than the other (μ = 4.50) so as to obtain more accurate results, so it has been applied to real data that have been obtained from the Ministry of Health where he was recording the number of deaths mothers over five years and on a quarterly basis, were three circles healthier choice in Baghdad, since the validity of each circle represents the total will be so (20) watch for each group and the total aggregate Views will be (60).

Key Word: **Maternal Mortality, Hierarchical Poisson Regression Model , Full Maximum likelihood , Bayesian Method .**