Journal of Economics and Administrative Sciences Vol.27 (NO. 125) 2021, pp. 477-492

Journal of Economics and Administrative Sciences (JEAS)

Available online at http://jeasiq.uobaghdad.edu.iq

مقارنة بين طريقة الامكان الاعظم والطريقة البيزية في تقدير انحدار كاما مع تطبيق عملي

الباحث/ لؤي عادل عبد الجبار
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Luay.yahya1989@gmail.com

أ.د قتيبة نبيل نايف
جامعة بغداد/كلية الادارة والاقتصاد
dr.qutaiba@coadec.uobaghdad.edu.iw2

Received:23/9/2020 **Accepted :18/10/2020** **Published : January / 2021**

مستخلص البحث:

يتناول البحث انموذج انحدار كاما على افتراض أن المتغير التابع (Y) يتبع توزيع كاما بمتوسط (μ_i) مرتبط من خلال تركيبة خطية بواسطة دالة الربط الطبيعية $identity\ link: g(\mu) = \mu$. ويحتوي أيضًا على معلمة الشكل (α_i)، والتي تكون غير ثابتة وتعتمد ايضاً على تركيبة خطية بواسطة دالة الربط اللوغارتمية $Log\ link: h(\alpha_i) = log\ log\ (\alpha_i)$، حيث سيتم تقدير معلمات انحدار كاما باستعمال طريقتين للتقدير هما طريقة الامكان الاعظم (Maximu Likelihood Method) والطريقة البيزية (Bayesian Method) واجراء المقارنة بين هذه الطريقتين بأستعمال معيار المقارنة متوسط مربعات الخطأ (MSE) ، حيث تم تطبيق الطريقتين على بيانات حقيقة حول مرض يرقان الاطفال (ابو صفار في الدم) حديثي الولادة وكانت افضل طريقة للتقدير هي طريقة الامكان الاعظم (MLE) لانها اعطت اقل متوسط مربعات الخطأ (MSE).

نوع البحث: ورقة بحثية

المصطلحات الرئيسية في البحث : انحدار كاما، طريقة الامكان الاعظم، الطريقة البيزية ،متوسط مربعات الخطأ (MSE).

***بحث مستل من رسالة ماجستير**

المقدمة (**Introduction**):

يعتبر تحليل الانحدار من أهم الادوات لبناء أنماذج تمثل الظواهر المدروسة وذلك من خلال معرفة العلاقة بين المتغيرات حيث يكون أحد المتغيرات متغير تابع (معتمد) والاخرى تكون متغيرات تفسيرية حيث يقوم الأنموذج بربط هذه المتغيرات بمعادلة رياضية ومن ثم نقدر معالم الأنموذج وبعدها يمكننا التنبؤ بالظاهرة المدروسة ولأستخدام هذا الانموذج يتطلب تحقق شروط فروض المربعات الصغرى اذ يتم تقدير الانموذج من خلال معالمه مباشرة ، اما في حال المتغير المعتمد (Y_i) يتبع توزيع كاما نلجأ الى استعمال دالة الربط بحيث نلجأ الى تقديره من خلال معالمه والتي تمثل كل معلمة معادلة انحدار(تركيبة خطية) حسب دالة الربط التي تم افتراضها ، حيث يكون المتغير المعتمد (Y_i) يتبع توزيع كاما حيث تكون قيمه ضمن الفترة.$(0,\infty)$

تتلخص مشكلة البحث في حال المتغير المعتمد (Y_i) يتبع توزيع كاما نلجأ الى اسلوب دالة الربط بحيث نلجأ الى تقديره من خلال معالمه والتي تمثل كل معلمة معادلة انحدار(تركيبة خطية) حسب دالة الربط التي تم افتراضها .

ان هدف البحث هو تقدير انموذج انحدار كاما (GRM) **بطريقة الامكان الاعظم**(Method Maximum Likelihood) **والطريقة البيزية** (Bayesian Method)) **وتطبيقها على بيانات مرض يرقان الاطفال حديثي الولادة واجراء المقارنة بين الطريقتين بأستعمال معيارالمقارنة متوسط مربعات الخطأ** (MSE)**.**

مراجعة الطرائق والأساليب

توزيع كاما (Gamma Distribution) :

يعد توزيع كاما من احد التوزيعات المستمرة حيث تم تعريفه من قبل الباحثة stacy **(1962) على انه يمكن استخدام توزيع كاما بمرونة كبيرة في تحليل المتغيرات العشوائية الايجابية ويكون معتمد دائما في اوسع المجالات الطبية** [Kalbfleisch, 2011: p] [Bossio , 2015 :p2] **[42.**

اذا كان المتغير العشوائي (y) ياخذ شكل توزيع كاما ذو المعلمتين فتكون دالة الكثافة الاحتمالية (pdf) له كالاتي [Bossio , 2015:p] [Adekanmbi ,2017:p4] **[2:**

$$f(y;\lambda,\alpha)=\frac{\lambda}{\Gamma_{(\alpha)}}(\lambda y)^{\alpha-1}\ exp\,exp\,(-\lambda y) \qquad I_{(0,\infty)}y \qquad \dots (1)$$

حيث ان α **: تمثل معلمة الشكل** (Shape Parameter)**.**

λ **: معلمة القياس** (Scale Parameter)**.**

$\Gamma_{(.)}=(n-1)!$ **: دالة كاما**

وان $\alpha,\lambda>0$

خصائص توزيع كاما:

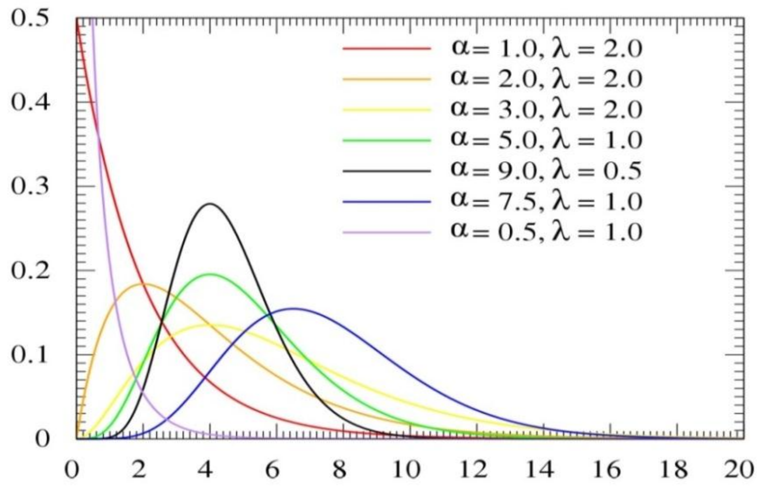
$$Y_i \sim G(\alpha,\lambda) \qquad \dots (3)$$

1- الوسط الحسابي [Bossio , 2015 :p] **[2 :**

$$E(Y_i)=\frac{\alpha}{\lambda} \qquad \dots (4)$$

2- التباين : [Bossio , 2015 :p] **[2**

$$V(Y_i) = \frac{\alpha}{\lambda^2} = \mu^2\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \sigma^2 E(Y_i)^2 \qquad \dots (5)$$



ويمكن كتابة الدالة الكثافة الاحتمالية (Pdf) لتوزيع كاما بدلالة معلمة الشكل (α) والوسط الحسابي (μ) وكالاتي [4Adekanmbi ,2017:p] :

$$\mu = \frac{\alpha}{\lambda} \qquad \dots (6)$$

$$\lambda = \frac{\alpha}{\mu} \qquad \dots (7)$$

$$f(\mu,\alpha) = \frac{1}{y\Gamma_{(\alpha)}}\left(\frac{\alpha}{\mu}y\right)^{\alpha}\ exp\ exp\left(-\frac{\alpha}{\mu}y\right) \qquad I_{(0,\infty)}y \qquad \dots (8)$$

1-**انحدار كاما:**

يعتبر انموذج انحدار كاما (GRM) امتداداً لموضوع النماذج الخطية المعممة (Generalized Linear Models) (GLM) اذ ان النماذج الخطية المعممة تختلف عن الانحدار الخطي المعروف كون ان القيم المتوقعة μ_i للمتغير العشوائي Y تستبدل بدالة الربط $g(\mu_i) = \eta$ حيث ان η هي تركيبة خطية من المتغيرات التفسيرية والفائدة من دالة الربط هو ان يكون التباين مستقرا في جميع حالاته ، بالاضافة الى انه يمكن اختيار توزيع الخطأ الخاص بالانموذج بصورة يكون مستقل وبعكس الانحدار الخطي الذي يجب دائما ان يكون توزيع الخطأ توزيع طبيعياً ، تعتمد فئة نماذج انحدار كاما على افتراض أن المتغير التابع هو توزيع كاما وأن متوسطه مرتبط بمعادلة انحدار من خلال مؤشر خطي (تركيبة خطية) بواسطة دالة ربط. يمكن أن تكون دالة الربط هي الدالة الطبيعية أو الدالة المعكوسة أو دالة اللوغاريتم. يتضمن الانموذج أيضًا معلمة الشكل ، والتي قد تكون ثابتة أو تعتمد بمعادلة انحدار من خلال مؤشر خطي (تركيبة خطية) ودالة ربط ايضاً ، كدالة لوغاريتم ،ويتم تطبيق انموذج انحدار كاما في مجموعة واسعة من التطبيقات التجريبية كماهو الحال في عملية تحديد اطار العمل في شركات التأمين ويعتمد في اوسع المجالات الطبية وايضا في حالات الدخول الى المستشفيات بسبب الامراض النادرة وجاءت تسمية انموذج انحدار كاما بهذه التسمية كون متغير الاستجابة (Y_i) يتبع توزيع كاما حيث تكون قيمه ضمن الفترة : [Bossio , 2015:p2] $(0,\infty)$

2- **انماذج انحدار كاما:**

لتكن $Y_i \sim G(\mu_i,\alpha)$ حيث ان : $i = 1,2,\dots\dots,n$ هي متغيرات عشوائية مستقلة و α معلمة الشكل وتكون هنا قيمة ثابتة وبالتالي فان معادلة انحدار كاما هي عبارة عن الوسط الحسابي للمتغير Y وكالاتي [Adekanmbi ,2017:p] [5-3McCullagh,1989 :p287-296]**:**

$$\eta_i = g(\mu_i) = \acute{x}_i\beta \qquad \dots (9)$$

$\beta = (\beta_0,\beta_1,\dots\dots,\beta_p)$ **: متجه معلمات الانحدار المجهولة 1*p.**

$x_i = (x_{i1},\dots\dots\dots,x_{ip})$ **: متجه لـ p من المتغيرات المستقلة 1*p.**

η_i : هي تركيبة خطية.
$g(.)$: دالة الربط
حيث هنالك ثلاث دوال ربط ((Link function لانموذج انحدار كاما وهي [3Adekanmbi ,2017:p] :
1- دالة الربط اللوغارتمية $log\ link : g(\mu) = log\ log\ (\mu)$
2- دالة الربط الطبيعية $identity\ link : g(\mu) = \mu$
3- دالة الربط العكسية $inverse\ link : g(\mu) = \frac{1}{\mu}$

في حالة معلمة الشكل α غير ثابتة وهذا ماسيتم دراسته في هذا البحث أي يمكن نمذجتها كما في معادلة (9) حيث ان انحدار كاما يسمح بالنمذجة المشتركة لمعلمات المتوسط والشكل لمتغير توزيع كاما اي ان $Y_i \sim G(\mu_i, \alpha_i)$ حيث ان : $i = 1,2, \dots \dots, n$ ، وكالاتي [53Cuervo , 2001 : p]:

$$\eta_{1i} = g(\mu_i) = \acute{x}_i \beta \qquad \dots (10)$$
$$\eta_{2i} = h(\alpha_i) = \acute{z}_i \gamma \qquad \dots (11)$$

$\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots\dots, \beta_p)$: هي متجهات معلمات الانحدار المتعلقة بالمتوسط.
$\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \dots\dots, \gamma_k)$: متجه معلمات الانحدار المتعلقة بالشكل.
$g(\mu)$: دالة الربط للمتوسط.
$h(\alpha)$: دالة الربط للشكل (عادة تكون دالة الربط اللوغارتيمي).
η_{1i} , η_{2i} : التنبؤات(التركيبات) الخطية.
$x_i = (x_{i1}, \dots \dots, x_{ip})$: متجه لـ p من المتغيرات المستقلة 1*p.
$z_i = (z_{i1}, \dots \dots, z_{ik})$: متجه لـ k من المتغيرات المستقلة 1*k.

3-**طريقة الامكان الاعظم Maximum Likelihood Method)(MLE)**:

تعتبر هذه الطريقة من احد الطرائق المهمة لما لها من تطبيقات واسعة لتقدير معلمات النماذج الاحصائية وتتصف هذه الطريقة بعدة خواص استدلالية منها خاصية الأتساق والثبات وعدم التحييز في أغلب الاحيان أذ يمكن كتابة دالة الامكان لانحدار كاما بالشكل الاتي [52Cuervo , 2001 :p]:

$$\boldsymbol{L} = \prod_{i=1}^{n} f(y; \lambda, \alpha) \qquad \dots (12)$$

$$L = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\Gamma_{(\alpha_i)}} \left(\frac{\alpha_i}{\mu_i}\right)^{\alpha_i} {y_i}^{\alpha_i - 1} exp\left(-\frac{\alpha_i}{\mu_i} y_i\right) \qquad \dots (13)$$

$$\log(L) = \sum_{i=1}^{n} \left\{-\log(\Gamma_{(\alpha_i)}) + \alpha_i \log\left(\frac{\alpha_i y_i}{\mu_i}\right) - \log(y_i) - \left(\frac{\alpha_i}{\mu_i}\right) y_i\right\} \qquad \dots (14)$$

حيث ان

$$\alpha_i = \exp(\acute{z}\gamma) \text{ و } \mu_i = \acute{x}\beta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_j} = \sum_{i=1}^{n} -\frac{\alpha_i}{\mu_i}\left(1 - \frac{y_i}{\mu_i}\right) x_{ij} \quad ; j = 1, \dots, p \qquad \dots (15)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma_k} = \sum_{i=1}^{n} -\alpha_i \left[\frac{d}{d\alpha_i} \log \Gamma_{(\alpha_i)} - \log\left(\frac{\alpha_i y_i}{\mu_i}\right) - 1 + \frac{y_i}{\mu_i}\right] z_{ik} \quad ; k = 1, \dots \dots, r \qquad .(16)$$

من خلال (Hessian Matrix) ,والتي هي مصفوفة الاشتقاق الجزئي من الدرجة الثانية لدالة عددية متعددة المتغيرات وتضم جميع المشتقات الجزئية من الدرجة الثانية الممكنة للدالة [Adekanmbi ,2017:p7] .

$$\frac{\partial^2{}_L}{\partial\beta_k\beta_j}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{{\mu_i}^2}\left(1-\frac{2y_i}{\mu_i}\right)x_{ij}x_{ik}\quad ;j,k=1,\dots\dots p \qquad \dots(17)$$

$$\frac{\partial^2{}_L}{\partial\gamma_k\beta_j}=\sum_{i=1}^{n}-\frac{\alpha_i}{\mu_i}\left(1-\frac{y_i}{\mu_i}\right)x_{ij}z_{ik}\quad ;k=1,\dots\dots r \qquad \dots(18)$$

$$\frac{\partial^2{}_L}{\partial\gamma_k\gamma_j}=\sum_{i=1}^{n}-\alpha_i\left[\frac{d}{d\alpha_i}\log\Gamma(\alpha_i)-\log\left(\frac{\alpha_i y_i}{\mu_i}\right)-1+\frac{y_i}{\mu_i}\right]z_{ij}z_{ik}$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left[\alpha_i\frac{d^2}{d{\alpha_i}^2}\log\Gamma(\alpha_i)-1\right]z_{ij}z_{ik}\qquad ;j,k=1,\dots\dots,r \qquad \dots(19)$$

وباستعمال مصفوفة المعلومات لفيشر (Fisher information matrix) لحساب مصفوفة التباين المرتبطة بتقديرات الاحتمالات القصوى وكما موضح في المعادلات (20) و (24) [Adekanmbi :,2017:p8]

$$I(\beta)=\begin{bmatrix}-E\left(\frac{{\partial_L}^2}{\partial\beta_k\beta_j}\right) & -E\left(\frac{{\partial_L}^2}{\partial\gamma_k\beta_j}\right)\\ -E\left(\frac{{\partial_L}^2}{\partial\gamma_k\beta_j}\right) & -E\left(\frac{{\partial_L}^2}{\partial\gamma_k\gamma_j}\right)\end{bmatrix} \qquad \dots(20)$$

$$-E\left(\frac{{\partial_L}^2}{\partial\beta_k\beta_j}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{{\mu_i}^2}x_{ij}x_{ik} \qquad \dots(21)$$

$$-E\left(\frac{{\partial_L}^2}{\partial\gamma_k\beta_j}\right)=0\quad ,\mathrm{k}=1,\dots,\mathrm{r}\ ;\ \mathrm{j}=1,\dots,p \qquad \dots(22)$$

$$-E\left(\frac{{\partial_L}^2}{\partial\gamma_k\gamma_j}\right)=\sum_{i=1}^{n}{\alpha_i}^2\left[\frac{d^2}{{d_{\alpha_i}}^2}\log\Gamma(\alpha_i)-\frac{1}{\alpha_i}\right]z_{ij}z_{ik}\quad ;\ j,k=1,\dots,r \qquad \dots(23)$$

$$I(\beta)=\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{{\mu_i}^2}x_{ij}x_{ik} & 0\\ 0 & \sum_{i=1}^{n}{\alpha_i}^2\left[\frac{d^2}{{d_{\alpha_i}}^2}\log\Gamma(\alpha_i)-\frac{1}{\alpha_i}\right]z_{ij}z_{ik}\end{bmatrix} \qquad \dots(24)$$

حيث ان مصفوفة المعلومات لفيشر (Fisher information matrix) **هي مصفوفة قطرية حيث تتطابق احدى الكتل** (Blocks) **مع معلمات الانحدار المتوسط والاخرى مع معلمة انحدار الشكل وبالتالي فأن متجهات المعلمات** β, γ **تكون بشكل متعامد ومقدرات الامكان الاعظم** $\hat{\beta}, \hat{\gamma}$ **مستقلة عن بعضها وغير متناظرة .**
ومن خلال معادلة (24) نلاحظ انه لايمكن تقدير معلمات انموذج انحدار كاما (GRM) **بالطرائق الاعتيادية وسوف نستعمل خوارزمية** (Fisher score) **وهي خوارزمية تكرارية للحصول على الحد الاقصى لتقدير احتمال معلمات انموذج انحدار كاما وهي مشابهة لطريقة نيوتن رافسن او خوارزمية المربعات الصغرى التكرارية الموزونة** (Iterative weighted least square) **حيث تستخدم فيها القيمة المتوقعة من مشتقات المصفوفة الثانية ومن خلال الخوارزمية نحصل على تقدير المعلمات** $\hat{\beta}$ و $\hat{\gamma}$ [Cuervo , 2001 :p55-57].

$$\hat{\beta}^{(k+1)} = (XW_1^{(k)}X)^{-1}XW_1^{(k)}Y \qquad \dots (25)$$

اذ ان :

W_1^k : **مصفوفة قطرية عناصرها هي :**

$$W_i^k = \frac{(\mu_i^2)^{(k)}}{\alpha_i^{(k)}} \qquad \dots (26)$$

وان

$$\hat{\gamma}^{(k+1)} = \left(ZW_2^{(k)}Z\right)^{-1}XW_2^{(k)}Y \qquad \dots (27)$$

اذ ان مصفوفة Z **تحتوي على نفس المتغيرات الموجودة في مصفوفة** X [Cuervo , 2001 : p33].

W_2^k : **مصفوفة قطرية عناصرها هي :**

$$W_i^k = \frac{1}{d_i^{(k)}} \qquad \dots (28)$$

اذ ان

$$di = \alpha_i^{-2}\left[\frac{d^2}{d_{\alpha_i^2}} log\, log\, \Gamma_{(\alpha_i)} - \frac{1}{\alpha_i}\right]^{-1} \qquad \dots (29)$$

والمخطط الانسيابي رقم (1) يوضح خطوات الخوارزمية التكرارية لطريقة الامكان الاعظم (من قبل الباحث):

4- الطريقة البيزية ((Bayesian Method:

تستند نظرية بيز على فرض ان المعلمات المطلوب تقديرها تكون بشكل متغيرات عشوائية لاكميات ثابتة حيث يتم تقدير هذه المعلمات باستخدام المعلومات السابقة (التوزيعات السابقة) (prior distribution) مضافاً اليها المعلومات الحالية (المشاهدة) وتمثل هذه المعلومات بدالة الامكان وبربط هاتين الدالتين نحصل على دالة تعرف بالدالة الاحتمالية اللاحقة (التوزيع اللاحق) (posterior distribution) والتي تضم جميع المعلومات حول الظاهرة المدروسة [[Al jassim , 2012 : p 9-10.

ضرب الدالتين { (Likeilhood) دالة الامكان (prior distribution) التوزيع السابق

→ التوزيع اللاحق (posterior distribution)

$$h\,(\beta,\gamma/y) \propto L(\beta,\gamma/y).\,g(\beta,\gamma) \qquad \ldots(30)$$

نلاحظ من المعادلة (30) بأن التوزيع اللاحق هو ضرب دالة الامكان في التوزيع السابق وفي النماذج الخطية المعممة نجد صعوبة في الحصول على التوزيعات اللاحقة وقد تم اقتراح اساليب لايجاد التوزيعات اللاحقة ومنها اساليب سلسلة ماركوف مونت كارلو (MCMC) (Markova chain monte Carlo) ومن احدى طرائق سلسلة ماركوف مونتي كارلو (MCMC) هي خوارزمية (Gibbs sampling) وخوارزمية (Metropolis-Hastings) [Cuervo , 2001 : p53]:

4-1 خوارزمية Gibbs :

اطلق عليها اسم خوارزمية Gibbs نسبة الى العالم J.W Gibbs عام (1984) وهي طريقة من اشهر طرائق سلسلة ماركوف مونتي كارلو (MCMC) وأيضاً حالة خاصة من خوارزمية (-Metropolis Hastings) ومفهوم خوارزمية Gibbs هو الوصول الى عينة كبيرة تقترب الى التوزيع اللاحق المشترك للمعلمات من خلال اجراء سحبات عشواية من التوزيعات الشرطية الكاملة والتي سبق وان تم تحديدها لمعلمات الانموذج المستخدم وهذه الخوارزمية هي حالة خاصة من خوارزمية (Metropolis-Hastings) وعندما يكون لدينا توزيع احتمالي شرطي غير معروف بحيث لانستطيع الحصول على سحبات عشواية كما في خوارزمة Gibbs لذلك نستخدم خوارزمية (Metropolis-Hastings) لانه عن طريقها نستطيع ان نقوم بسحبات عشوائية من التوزيعات الشرطية التي لديها دوال غير معروفة [Walsh , 2002 :p16].

4-2 مفهموم خوارزمية Gibbs :

لنفرض ان لدينا انموذج يحتوي على S من المعلمات ولدينا كافة التوزيعات الشرطية كاملة فان معاينة او خوارزمية Gibbs ستكون كالاتي [Andrieu , 2003 :p22] :

1- نفرض قيم ابتدائية ولتكن :

$$\phi^{0} = (\phi_1{}^{0}, \phi_2{}^{0}, \ldots, \phi_s{}^{0})$$

2- نجعل عداد وليكن j=0

3- ثم نقوم بالسحب كالاتي :

$$\phi_1{}^{j+1} \sim p\left(\frac{\phi_1}{\phi_2{}^{j}, \ldots, \phi_s{}^{j}}\right)$$

$$\phi_2{}^{j+1} \sim p\left(\frac{\phi_2}{\phi_1{}^{j+1}, \phi_3{}^{j}, \ldots, \phi_s{}^{j}}\right)$$

$$\phi_3{}^{j+1} \sim p\left(\frac{\phi_3}{\phi_1{}^{j+1}, \phi_2{}^{j+1}, \phi_4{}^{j}, \ldots, \phi_s{}^{j}}\right)$$

.

.

$$\phi_s{}^{j+1} \sim p\left(\frac{\phi_s}{\phi_1{}^{j+1}, \phi_2{}^{j+1}, \ldots, \phi^{j+1}}\right)$$

ومن خلال اكتمال التكرار لمعاينة جبس نحصل على

$$\phi^{j+1} \sim p(\phi_1{}^{j+1}, \phi_2{}^{j+1}, \ldots, \phi_s{}^{j+1})$$

4- نجعل j=j+1 ونرجع الى الخطوة 3 .

3-4 **صياغة** Gibbs **لانموذج انحدار كاما**:

من اهم الشروط الواجب توفرها في معاينة Gibbs هو وجود التوزيعات الشرطية الكاملة لمعلمات الانموذج ولكي نحصل عليها يجب ايجاد التوزيع اللاحق وذلك بافتراض ان التوزيع الاولي(السابق) للمعلمات (β, γ) هو احد التوزيعات المتماثلة وان توزيع كل منهما مستقل عن الاخر وتكون دالة الكثافة الاحتمالية الاولية المشتركة $p(\beta, \gamma)$ كما موضحة في معادلة (31) [Cuervo , 2001 :p60-61]:

$$\begin{pmatrix}\beta\\ \gamma\end{pmatrix} \sim N\left[\begin{pmatrix}b_0\\ g_0\end{pmatrix}, (B_0\ C\ C\ G_0\ )\right] \qquad \dots(31)$$

حيث ان:

$b_0 , g_0 , B_0 , C , G_0$: معالم فوقية (hyperparameters).

وبالرجوع الى المعادلة (30) نرى ان من الصعوبة ايجاد التوزيعات الشرطية الكاملة للمعلمة باستخدام طريقة Gibbs الا بعد استخدام تحويل (Kernel transition) حيث مفهموم هذا التحويل يستند على توليد عينة من اي توزيع معروف وهنا سيكون التوزيع هو التوزيع الطبيعي (Normal distribution) ومن خلال استخدام سلسلة ماركوف مونتي كارلو (MCMC) سوف نولد عينات تقريبية من التوزيع اللاحق وكما يلي [Cuervo , 2016 :p6]:

للمعلمة β المتغيرات المساعدة العاملة (the working observational variables) هي :

$$\tilde{y}_i = h(\mu_i) + h(\mu_i)(y_i - \mu_i) \qquad ; i = 1, \dots, n \qquad \dots(32)$$

اذ ان :

h: تمثل (Taylor approximation) من الدرجة الاولى.

$$h(\mu_i) = \acute{x}_i\beta \qquad \dots(33)$$

$$\mu_i = h^{-1}(\acute{x}_i\beta\ ) \qquad \dots(34)$$

وبالتالي فأن $\beta^{(c)}, \gamma^{(c)}$ هي القيم الحالية (Current values) لـ β, γ ويمكن كتابة المعادلة اعلاه (32) كمايلي:

$$\tilde{y}_i = \acute{x}_i\beta^{(c)} + \acute{h}\left[h^{-1}(\acute{x}_i\beta^{(c)}\ )\right]\left(y_i - h^{-1}(\acute{x}_i\beta^{(c)}\right) \qquad ; i = 1, \dots, n \qquad \dots(35)$$

ويمكن ايجاد التباين للمعادلة اعلاه وكما يلي:

$$var(\hat{y}_i) = \tilde{\sigma}_i^{\,2} = \left[\acute{h}\left[h^{-1}(\acute{x}_i\beta^{(c)}\ )\right]\right]^2 var(y_i) \qquad \dots(36)$$

اذ ان التوزيع الشرطي السابق للمعلمة β بالصورة التالية: $\beta/\gamma \sim N(b, B)$ حيث ان :

$$b = b_0 - CG_0^{\ -1}(\gamma - \gamma_0) \qquad \dots(37)$$

$$B = B_0 - CG_0^{\ -1}C \qquad \dots(38)$$

وباستخدام تحويل (Kernel transition) سوف نحصل على التوزيع الشرطي الكامل للمعلمة β عندما :[60Cuervo , 2001 :p]

$$\tilde{y}_i \sim N\left(\acute{x}_i\beta, \tilde{\sigma}_i^{\,2}\right) \qquad \dots(39)$$

نحصل على

$$q_1\left(\hat{\beta}, \hat{\gamma}\right) = N(b^*, B^*) \qquad \dots(40)$$

اذ ان :

$$b^*\ = B^*(B^{-1}b + X\Sigma^{-1}\tilde{Y}) \qquad \dots(41)$$

$$B^*\ = (B^{-1} + X\Sigma^{-1}X)^{-1} \qquad \dots(42)$$

و ان :

$\tilde{Y}$: مكونات المتغيرات العاملة وتحتوي على $\tilde{y}_{1i} = y_i$

وان :

$$\tilde{y}_{1i} = \acute{x}_i\beta + \frac{y_i}{\mu_i} - 1 \qquad \dots(43)$$

$$\Sigma = diag\left(\tilde{\sigma}_i^{\,2}\right) \qquad \dots(44)$$

وللمعلمة γ سنفرض بان المتغيرات المساعدة العاملة (the working observational variable) هي

$$\tilde{y}_i = g\left(\sigma_i^{\,2(c)}\right) + g\left(\sigma_i^{\,2(c)}\right)\left(t_i - \sigma_i^{\,2(c)}\right) \qquad ; i = 1, \dots, n \qquad \dots(45)$$

اذ ان :

g: تمثل (Taylor approximation) من الدرجة الاولى.

$$g\left(\sigma_i^{2(c)}\right) = \acute{z}_i\gamma \qquad \dots(46)$$

$$\sigma_i^{2(c)} = g^{-1}(\acute{z}_i\gamma\,) \qquad \dots(47)$$

وبالتالي فأن $\beta^{(c)}, \gamma^{(c)}$ هي القيم الحالية لـ β, γ ويمكن كتابة المعادلة (45) كمايلي:

$$\tilde{y}_i = \acute{z}_i\beta^{(c)} + \acute{g}\left[g^{-1}(\acute{z}_i\beta^{(c)}\,)\right]\left(t_i - g^{-1}(\acute{z}_i\beta^{(c)}\right) \quad ; i = 1, \dots, n \qquad \dots(48)$$

ويمكن ايجاد التباين للمعادلة (48) وكما يلي:

$$var(\hat{y}_i) = \tilde{\sigma}_i^{\,2} = \left[\acute{g}\left[g^{-1}\left(\acute{z}_i\gamma^{(c)}\,\right)\right]\right]^2 var(t_i) \qquad \dots(49)$$

اذ ان التوزيع الشرطي السابق للمعلمة γ بالصورة التالية: $\gamma/\beta \sim N(g, G)$ حيث ان :

$$g = g_0 - CB_0^{\,-1}(\beta - \beta_0) \qquad \dots(50)$$

$$G = G_0 - CB_0^{\,-1}C \qquad \dots(51)$$

وموضحة في معادلة (2-36) وباستخدام تحويل (Kernel transition) سوف نحصل على التوزيع الشرطي الكامل للمعلمة γ عندما [61Cuervo , 2001 :p]:

$$\tilde{y}_i \sim N\left(\acute{z}_i\gamma, \tilde{\sigma}_i^{\,2}\right) \qquad \dots(52)$$

وبالتالي سوف نحصل على التوزيع الشرطي الكامل للمعلمة γ

$$q_2\left(\hat{\gamma}, \widehat{\beta}\right) = N(g^*, G^*) \qquad \dots(53)$$

اذ ان :

$$g^* = G^*(G^{-1}g + Z\psi^{-1}\tilde{Y}) \qquad \dots(54)$$

$$G^* = (G^{-1} + Z\psi^{-1}Z)^{-1} \qquad \dots(55)$$

وان : $\tilde{Y}$:مكونات المتغيرات العاملة وتحتوي على $\tilde{y}_{2i} = y_i$

$$\tilde{y}_{2i} = \acute{z}_i\beta + \frac{y_i}{\mu_i} - 1 \qquad \dots(56)$$

$$\psi = diag\left(\tilde{\sigma}_i^{\,2}\right) \qquad \dots(57)$$

وبالتالي سيتم اقتراح قيم β, γ التي ستكون جزء من عينات التوزيعات الشرطية اللاحقة من (53) و (40) في خوازمية (62Metropolis-Hastings) [Cuervo , 20016 :p6] [Cuervo , 2001 :p]:

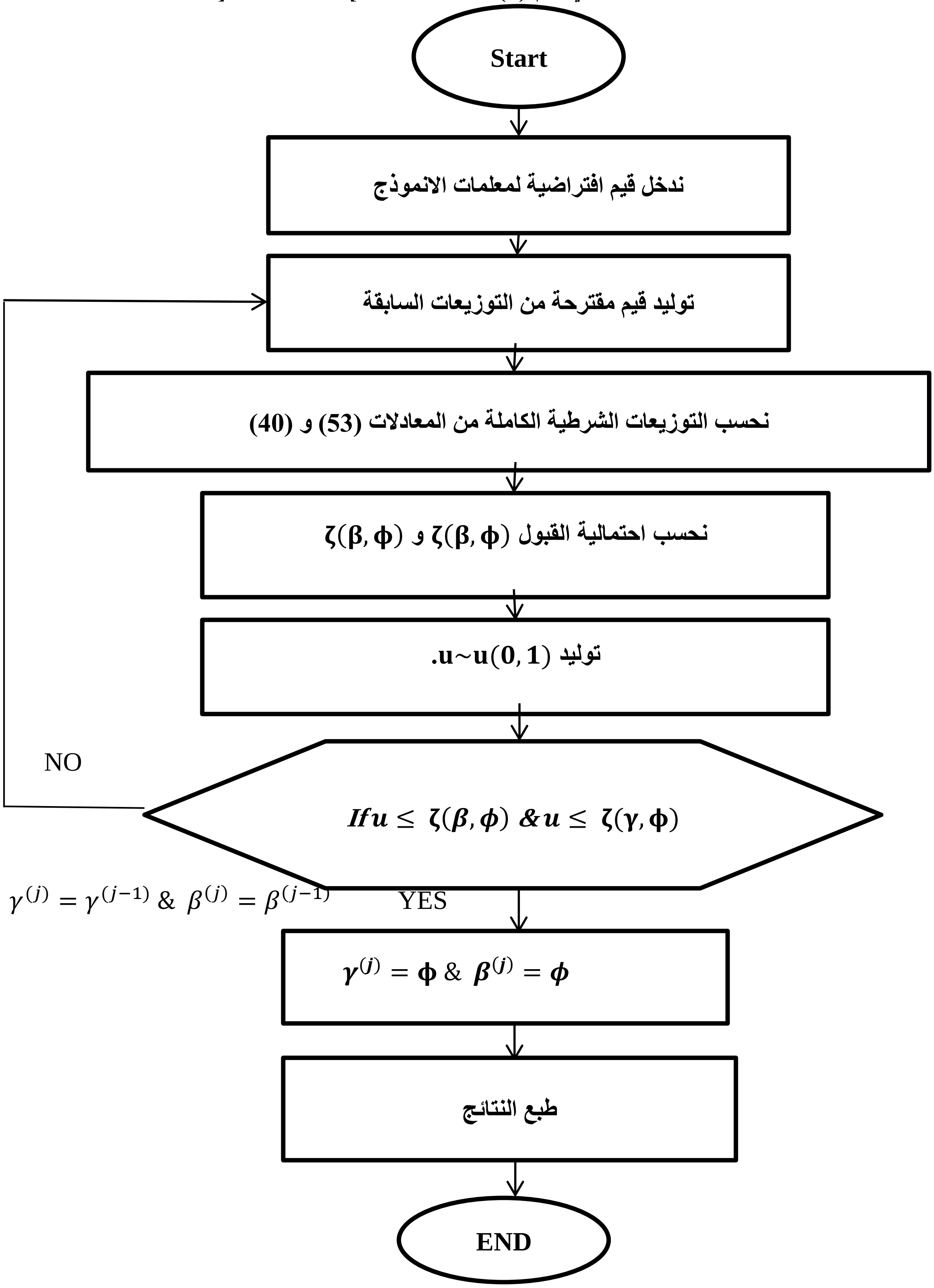
4-4 **خوازمية** (Metropolis-Hastings) **لانحدار كاما**:

-1 اجعل عداد التكرار للمتسلسلة j=1 .
-2 نفرض قيم اولية $\gamma^{(0)}$ and $\beta^{(0)}$ للمعلمات γ and β على التوالي.
-3 نفرض قيمة جديدة ولنسميها ϕ للمعلمة β ويتم توليدها من المعادلة (40).
-4 نفرض قيمة جديدة ولنسميها ϕ للمعلمة γ ويتم توليدها من المعادلة (53).
-5 معيار احتمال قبول الخوارزمية كالاتي :

$$\zeta(\beta,\phi) = min\left\{1, \frac{\prod i\;(\phi_i)\;q(\phi_i,\beta_i)}{\prod i\;(\beta_i)\;q(\beta_i,\phi_i)}\right\}\; and\; \zeta(\gamma,\phi) = min\left\{1, \frac{\prod i\;(\phi_i)\;q(\phi_i,\gamma_i)}{\prod i\;(\gamma_i)\;q(\gamma_i,\phi_i)}\right\}$$

-6 نولد متغير عشوائي يتبع التوزيع المنتظم $u \sim u(0,1)$.
-7 اذا كان $u \leq \zeta(\beta,\phi)$ و $u \leq \zeta(\gamma,\phi)$ نجعل $\beta^{(j)} = \phi$ و $\gamma^{(j)} = \phi$ اما اذا كان $u \geq \zeta(\beta,\phi)$ و $u \geq \zeta(\gamma,\phi)$ نجعل $\beta^{(j)} = \beta^{(j-1)}$ و $\gamma^{(j)} = \gamma^{(j-1)}$.
-8 نجعل $j = j + 1$ ثم نذهب الى الخطوة (2) [62Cuervo , 2001 :p].

المخطط الانسيابي رقم (2) للطريقة البيزية]من قبل الباحث[.



الجانب التطبيقي

نبذة عن مرض يرقان الاطفال (ابو صفار في الدم) حديثي الولادة :

توجد هنالك مادة تسمى البيليروبين (Bilirubin) موجودة في دم الاطفال وان ارتفاعها يؤدي الى مايسمى باليرقان الولادي ، حيث ان هذه المادة ينتجها الجسم بشكل طبيعي وذلك بسبب تكسر كريات الدم الحمراء ومن بعدها يقوم الكبد بالتقاطها وطرحها عن طريق البراز ، عادة يحدث هذا النوع من اليرقان بين اليوم الثاني والسابع ، ويحدث اليرقان نتيجة عدة اسباب واهمها هو ارتفاع في قيم خضاب الدم وخلايا كريات الدم الحمراء (pcv) (packed cell volume) وعند محاولات جسم الطفل التخلص من كمية كريات الدم الحمراء الزائدة التي تنتج عن تحطمها مادة البيليروبين والتي تكون مسؤولة عن اليرقان ، بالاضافة لذلك عدم نضج الكبد عند الطفل حديث الولادة بحيث ان الكبد لايستطيع التخلص من كمية البيليروبين الزائدة في الدم ، اي ان زيادته في هذه المرحلة المبكرة عند للطفل يؤدي الى ظهور لون اصفر في الجلد والعينين وعلى وجه الطفل ثم الصدر والبطن واخيراً القدمين ، وتختلف قيم البيليروبين التي يكون فيها خطرا على الطفل وذلك حسب الوزن وعمر الطفل ، وهنالك حالات اخرى مرضية تتعلق بالكبد والقنوات الصفراوية ، والنسبة الطبيعية للبيليروبين عند الاطفال حديثي الولادة (5.5) ملي جرام – ديسيليتر او اقل] ، p3 [Dakhel: 2011.

وصف البيانات Data Description :

تم الاعتماد على بيانات حقيقية حول مرض يرقان الاطفال حديثي الولادة ، حيث توجد الكثير من المتغيرات التي تؤثر على هذا المرض ، وان في هذا البحث اخذنا بعض المتغيرات وذلك باستشارة الاطباء المختصين لهذا المرض ، حيث تم اخذ عينة لـ (67) مصاب باليرقان الولادي من مستشفى العلوية التعليمي للولادة ، المتغير المعتمد (Y) يمثل نسبة البيليروبين في دم الطفل والمتغير(x_1)) يمثل عمر الطفل والمتغير (x_2) يمثل وزن الطفل والمتغير (x_3) يمثل (PCV) نسبة خلايا كريات الدم الحمراء عند الطفل والجدول رقم (1) يوضح البيانات الخاصة بمرض اليرقان الولادي عند الاطفال حديثي الولادة واهم العوامل المؤثرة عليه.

جدول رقم (1) يوضح البيانات الحقيقية لمرضى اليرقان الولادي للاطفال حديثي الولادة واهم العوامل المؤثرة عليه.

n	نسبة البيليروبين	وزن الطفل	عمر الطفل	pcv
1	5.5	2.5	5	0.35
2	7	2	4	0.41
3	15.2	1.4	4	0.77
4	10.5	2	6	0.75
5	14.7	1.3	4	0.77
6	5.7	2.5	5	0.35
7	11.5	1.8	6	0.75
8	7.8	2.4	4	0.45
9	15.6	1.4	3	0.81
10	6.5	2.7	4	0.41
11	9.6	2.5	5	0.63
12	13.9	1.5	2	0.77
13	8.6	2	5	0.52
14	15.4	1.7	2	0.81
15	10.4	2.8	6	0.75
16	5.7	1.5	5	0.35
17	8.7	2	5	0.52
18	11.7	2.8	6	0.75
19	15.1	1.6	2	0.77
20	6.3	2	6	0.41
21	9.5	2.5	5	0.63

22	13.4	1.4	2	0.75
23	5.8	2.5	3	0.35
24	8.6	2.5	4	0.52
25	6	3	5	0.41
26	5.5	3	6	0.35
27	9.2	2.5	5	0.63
28	7.1	1.8	4	0.45
29	16.8	1.7	2	0.81
30	6.4	3	3	0.41
31	8.8	2	4	0.52
32	9.1	2.5	5	0.63
33	14.2	1.5	2	0.77
34	7.2	2.8	4	0.45
35	5.9	3	5	0.35
36	10	2.5	6	0.75
37	7.3	2.8	4	0.45
38	15.7	1.5	2	0.81
39	6.7	3	3	0.41
40	10.1	2.8	6	0.75
41	5.6	3	3	0.35
42	5.7	2.5	3	0.35
43	14.6	1.5	7	0.77
44	8.5	2	5	0.52
45	7.2	2.8	4	0.45
46	12.5	1.7	5	0.75
47	8.4	2	5	0.52
48	16.3	1.5	2	0.81
49	7.4	2.8	4	0.45
50	13.7	3	2	0.75
51	6.1	3	3	0.41
52	9.6	2.5	5	0.63
53	12	2.8	3	0.75
54	7.4	2.5	4	0.45
55	9	2.5	5	0.63
56	16.5	1.5	3	0.81
57	8.5	2	4	0.52
58	6.2	3	3	0.41
59	8.1	2.5	4	0.52
60	5.7	1.5	3	0.35
61	6.8	3	3	0.41
62	14.8	1.4	3	0.77
63	7.5	2.5	4	0.45
64	15.3	1.5	2	0.77
65	10.3	2.8	6	0.75
66	6.2	2.7	5	0.41
67	9.3	2.5	5	0.63

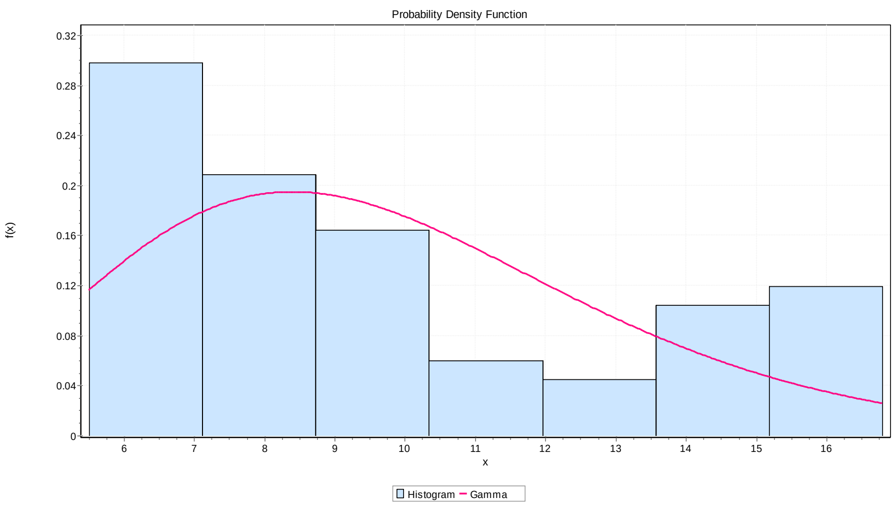
اختبار البيانات:

لمعرفة فيما اذا البيانات الخاصة بمرض يرقان الولادي عند الاطفال حديثي الولادة تتبع توزيع كاما فقد تم اختبار بيانات متغير الاستجابة (Y) للبيانات الحقيقية وتم تطبيق اختباري (Chi-Squared) و (Kolmogorov-Smirnov) باستعمال برنامج (Easy fit) لاختبار حسن المطابقة وتبين ان نسبة البيليروبين (Y) تتبع توزيع كاما ((Gamma distribution وكما موضح في الجدول رقم2)) والشكل رقم (2) .

جدول رقم (2) يبين اختبار حسن المطابقة لتوزيع كاما باستعمال برنامج (Easy fit).

Gamma [#19]				
Kolmogorov-Smirnov				
Sample Size **Statistic** **P-Value** **Rank**	**67** **0.09716** **0.52035** **12**			
α	**0.1**	**0.05**	**0.02**	**0.01**
Critical Value	**0.14693**	**0.16322**	**0.18252**	**0.19584**
Reject?	**No**	**No**	**No**	**No**
Chi-Squared				
Deg. of freedom **Statistic** **P-Value** **Rank**	**5** **7.8021** **0.16748** **32**			
α	**0.1**	**0.05**	**0.02**	**0.01**
Critical Value	**9.2364**	**11.07**	**13.388**	**15.086**
Reject?	**No**	**No**	**No**	**No**

شكل رقم (2) يبين دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع كاما للمتغير المعتمد (Y) للبيانات الحقيقية باستعمال برنامج (Easy fit).



تحليل النتائج:

بعدما تم تعريف و وصف البيانات الحقيقية ، تم استعمال برنامج (R) للحصول على تقدير معلمات انحدار كاما باستخدام البيانات الحقيقية ، حيث سيتم استخدام طريقة الامكان الاعظم وطريقة بيز على البيانات الحققية والمقارنة بين الطريقتين باستعمال معيار متوسط مربعات الخطأ :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left[Y_i - \widehat{Y}_i\right]^2 = MSE$$

وكانت افضل طريقة للتقدير هي طريقة الامكان الاعظم (MLE) لانها اعطت اقل ((MSE ، اذ تم الحصول على النتائج الموضحة في جدول رقم (3) :

	Mean parameters				Shape parameters				
method	$\widehat{\beta}_0$	$\widehat{\beta}_1$	$\widehat{\beta}_2$	$\widehat{\beta}_3$	$\widehat{\gamma}_0$	$\widehat{\gamma}_1$	$\widehat{\gamma}_2$	$\widehat{\gamma}_3$	MSE
MLE	4.880768	1.395821-	0.4775916-	17.032938	3.999783	0.132894-	0.284218-	3.211480-	0.961348
BAYES	0.376945	0.245724-	0.1192638-	17.911187	11.46735	0.648861-	0.200359-	6.813867-	1.138183

جدول رقم (3) يوضح القيم التقديرية للمعلمات و (MSE) عند البيانات الحقيقية.

الاستنتاجات:

1- تم التوصل الى ان متغير الاستجابة (Y) للبيانات الحقيقية يتبع توزيع كاما

2- طريقة الامكان الاعظم هي افضل طريقة لتقدير انموذج انحدار كاما لبيانات مرضى اليرقان حديثي الولادة وذلك لانها اعطت اقل (MSE)

3- نلاحظ ان نتائج التطبيق العملي اظهرت لدينا تقديرات جيدة لمعلمات الانموذج ونلاحظ ايضاً ان بالنسبة لمعلمات المتوسط التقديرية (Mean parameters) والتي هي نفسها القيم التقديرية $(\widehat{Y}_i)$ لمتغير الاستجابة (Y_i) بان المتغيران المستقلان X1,X2 لهما تأثير عكسي على متغير الاستجابة وهو نسبة البيليروبين في دم الاطفال حديثي الولادة على عكس المتغير المستقل X3 الذي له تغير طردياً مع متغير الاستجابة

التوصيات :

1- ضرورة تطبيق طريقة الامكان الاعظم في تقدير معلمات انحدار كاما فهي افضل من الطريقة البيزية كونها اعطت اقل (MSE).

2- في الدراسات المستقبلية يمكن استعمال دالة الربط اللوغاريتمية لمعلمة المتوسط لتوزيع كاما (μ_i)، $\log link : g(\mu) = \log \log (\mu)$ او دالة الربط العكسية $inverse\ link : g(\mu) = \frac{1}{\mu}$ في تقدير معلمات انحدار كاما.

References:

1- Adekanmbi, D. B. (2017), "Generalized Gamma Regression Models with Application to CD4 Cell Counts Data of Aids Patients" , International Journal of Applied Mathematics & Statistical Sciences (IJAMSS), 6(4), 19-36.

2- Al jassim S.H , Al Saray A.H , (2012) , " The Theory of Statistical Decisions and Its Applications", Al-Jazeera Printing and Publishing, Baghdad, Iraq

3- Andrieu, C., De Freitas, N., Doucet, A., & Jordan, M. I. (2003),"An introduction to MCMC for machine learning", Machine learning, 50(1-2),5-43.

4- Bossio, M. C., & Cuervo, E. C. (2015), "Gamma regression models with the Gammareg R package", Comunicaciones en EstadÃstica, 8(2), 211- 223.

5- Cuervo, E. C, & Gamerman, D. (2005), "Bayesian methodology for modeling parameters in the two parameter exponential family" , Revista Estadística, 57(168-169), 93-105.

6- Cuervo, E. C, Corrales, M., Cifuentes, M. V., & Zarate, H. (2016), "On gamma regression residuals".

7- Cuervo, E. C. (2001), "Modelagem da variabilidade em modelos lineares generalizados" (Doctoral dissertation, Tese de D. Sc., IM– UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil).

8- Dakhel , T.R , (2011) , " Use of characteristic analysis to determine the importance of factors affecting the newborn with jaundice", Al-Rafidain University College for Sciences Journal, (27), 177-194

9- De Jong, P., & Heller, G. Z. (2008),"Generalized linear models for insurance data",Cambridge Books.

10- Kalbfleisch, J. D., & Prentice, R. L. (2011), "The statistical analysis of failure time data", (Vol.360).JohnWiley&Sons.

11- McCullagh, P., & Nelder, J. A. (1989), "Generalized Linear Models" 2nd Edition,Chapman,and,Hall. London,UK.

12- Walsh, B. (2002), "Markov Chain Monte Carlo and Gibbs Sampling" ,[URL:] http://nitro. biosci. arizona. edu/courses/EEB596/handouts. Gibbs. Pdf.

Comparison Between Maximum Likelihood and Bayesian Methods For Estimating The Gamma Regression With Practical Application

researcher. Luay Adel Abdaljabbar
Ministry of Higher Education and Scientific Research
Luay.yahya1989@gmail.com

Prof. Dr .Qutaiba Nabeel Nayef
University of Baghdad College of Administration and Economics
dr.qutaiba@coadec.uobaghdad.edu.iw2

Received:23/9/2020 Accepted :18/10/2020 Published : January / 2021

Abstract:

In this paper, we will illustrate a gamma regression model assuming that the dependent variable (Y) is a gamma distribution and that its mean (μ_i) is related through a linear predictor with link function which is identity link function g(μ) = μ .It also contains the shape parameter (α_i) which is not constant and depends on the linear predictor and with link function which is the log link : $h(\alpha_i) = log\ log\ (\alpha_i)$, and we will estimated the parameters of gamma regression by using two estimation methods which are The Maximum Likelihood and the Bayesian and a comparison between these methods by using the standard comparison of average squares of error (MSE), where the two methods were applied to real data on the disease of jaundice of children newborns(Infant Jaundice) and it was the best method of estimation It is the Maximum Likelihood because it gave less (MSE).

Type of research: research paper.
Key word : Gamma Regression, Maximum Likelihood Method, Bayesian Method, mean squares error (MSE).

*** The research is drawn from a master's thesis**