

دالة خسارة انتروبية مقترحة وتطبيقها

لإيجاد مقدر بيز لمعلمة التوزيع الآسي

أ.م.د. ربا سالم محمد الرسام / كلية الإدارة والاقتصاد / جامعة الموصل
م. صفوان ناظم راشد العكاش / كلية الإدارة والاقتصاد / جامعة الموصل

تاريخ التقديم: 2016/1/25

تاريخ القبول: 2016/9/19

المستخلص:

يهدف هذا البحث إلى إيجاد مقدر بيز تحت دالة خسارة جديدة تجمع بين دالة خسارة متماثلة وأخرى غير متماثلة أطلق عليها دالة الخسارة الانتروبية المقترحة حيث أن هذه الدالة تمثل دمج بين دالة الخسارة الانتروبية ودالة خسارة الخطأ اللوغاريتمي التربيعي وهي غير متماثلة بطبيعتها. وتمت مقارنة مقدرات بيز للتوزيع الآسي تحت الدالة المقترحة وكل من دوال الخسارة المكونة للدالة المقترحة باستخدام معيار متوسط الخطأ التربيعي (MSE) ومقدار التحيز (M_{bias}) إذ تم توليد بيانات عشوائية باستخدام المحاكاة لغرض تقدير معلمات توزيع الآسي وبأحجام مختلفة ($n=10,50,100$) وبتكرار قدره $N=1000$ مع أخذ قيم أولية للمعلمتين α_0, β_0 وقيمة أولية b لتوصلنا إلى مقدر متوازن يجمع بين دالتين خسارة فضلاً عن تحديد حجم العينة الأمثل باستخدام أسلوب بيز وتحت دالة الخسارة الانتروبية المقترحة.

المصطلحات الرئيسية للبحث: مقدر بيز، دالة الخسارة الانتروبية المقترحة، حجم العينة الأمثل.



مجلة العلوم

الاقتصادية والإدارية

العدد 97 المجلد 23

الصفحات 438.457



دالة خسارة انتروبية مقترحة وتطبيقها لإيجاد مقدر بيز لمعلمة التوزيع الأسّي

1- مقدمة:

يعد علم الإحصاء من العلوم المهمة في جميع مجالات الحياة وهو علم قائم بحد ذاته وقد أخذ مكانته بين العلوم المختلفة، وقد اهتم به العديد من الباحثين ويعد الاستدلال الإحصائي احد فروع يهتم بعملية التقدير وفق أساليب مختلفة ومن بينها الأسلوب المعروف بأسلوب بيز (Box and Tio,1973) الذي يوصلنا إلى اتخاذ القرار الأمثل في حل المسائل وبأقل خطأ ممكن وتزداد أهميته عند ارتباطه مع دوال الخسارة $L(\hat{\theta}, \theta)$ (Bolstad,2004) بنوعها المتماثلة التي يكون فيها فوق التقدير (Overestimation) متساوي مع تحت التقدير (Underestimation) ومنها دالة الخسارة التربيعية ودالة خسارة الخطأ اللوغارتمي التربيعي المقترحة من قبل (Brown,1968) ودوال خسارة أخرى (Mood,et al,1974) وكانت هذه الدوال المتماثلة غير مرغوبة من قبل العديد من الباحثين بسبب كونها لا تهتم فيما لو كان المقدر أعلى أو أدنى من القيمة الحقيقية للمعلمة أي ان ما فوق التقدير مساوي لما تحت التقدير، لذلك تم اقتراح الكثير من الدوال غير المتماثلة والمستخدمه بشكل واسع من قبل العديد من الباحثين لأنها تعطي تقديرات أكثر واقعية ولاسيما مع بيانات الحياة ليكون فيها فوق التقدير (Overestimation) غير متساوي مع تحت التقدير (Underestimation) من بينها دالة الخسارة DeGroot المقترحة من قبل (DeGroot,1970) ودالة الخسارة الأسية الخطية (LINEX) المقدمة من قبل (Varian,1975) والتي تم تعديلها من قبل (Zellner,1986) الأكثر استخداماً ودالة الخسارة الانتروبية وهي تعديل لدالة الخسارة (LINEX) المقترحة من قبل (Calabria and Pulcini,1994) وغيرها من الدوال غير المتماثلة التي تمت دراستها (إخلاص،2010) (غزوان،2012)، وتم اقتراح دالة أكثر توازن من دوال الخسارة السابقة والتي تجمع بين دالة الخسارة المتماثلة وغير المتماثلة وهي دالة الخسارة الأسية اللاخطية (NLINEX) من قبل (Saiful Islam,et al.2004) والتي أخذت بنظر العناية دالة الخسارة التربيعية ودالة الخسارة الأسية الخطية لمحاكاة البيانات بشكل أكثر واقعية، لذلك تم اقتراح دالة الخسارة الانتروبية المقترحة والتي تجمع بين دالة خسارة الخطأ اللوغارتمي التربيعي والتي هي دالة متماثلة ودالة الخسارة الانتروبية وهي دالة غير متماثلة لتكون المعدل الموزون بين الدالتين وتعديل لدالة الخسارة الانتروبية وهذا التوازن كان له أهمية في تقليل من الخطأ الموجب أو السالب بين (Overestimation) (Underestimation) لعملية التقدير، وتم إجراء محاكاة بأسلوب المونت كارلو (Monte Carlo) لغرض تقدير معلمة القياس للتوزيع الأسّي تحت دالة الخسارة الانتروبية المقترحة ومقارنتها مع مقدرات أخرى للمعاملة نفسها ولكن تحت دالة الخسارة الانتروبية والخطأ اللوغارتمي التربيعي وذلك باستخدام أسلوب بيز مع تحديد حجم العينة الأمثل من خلال توليد بيانات عشوائية تحت التوزيع نفسه وبأحجام مختلفة (n=10,50,100) وبتكرار قدره N=1000 مع أخذ قيمة أولية لمعلمة الموقع θ للتوزيع وقيم أولية للمعلمتين α_0, β_0 اللتان تمثلان معلمتي التوزيع السابق للمعلمة θ وتم استخدام نظام (MATLAB) و (MAPLE) في الدراسة.

2- دالة الخسارة الانتروبية: Entropy Loss function

الخسارة النسبية $\frac{\hat{\theta}}{\theta}$ تكون أكثر واقعية في العديد من الحالات الطبيعية، وفي هذه الحالة من المفيد

اعتماد دوال الخسارة غير المتماثلة ومنها دالة الخسارة الانتروبية وهي تعديل لدالة الخسارة الأسية الخطية (LINEX) المقترحة من قبل (Varian,1975) و (Zellner,1986) والتي اقترحها (Calabria and Pulcini,1994) ليكون بديل آخر للدالة والصيغة الرياضية لها:

$$L(\hat{\theta}, \theta) = \left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right)^b - b \ln\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right) - 1 \quad \dots\dots\dots(1)$$



دالة خسارة انتروبية مقترحة وتطبيقها للإيجاد مقدر بيز لمعلمة التوزيع الأسّي

الحد أدنى لها عندما $\hat{\theta} = \theta$ ، وقد استخدمت هذه الدالة من قبل (Dey,et al.,1987) وكانت فيها $b=1$ والحالة الأكثر عمومية عندما $b>0$ لتعطي أشكال مختلفة للدالة ويكون فيها خطأ التقدير الموجب $\hat{\theta} > \theta$ (Overestimation) عواقبه أكثر خطورة من خطأ التقدير السالب $\hat{\theta} < \theta$ (Underestimation) والعكس صحيح وإذا كانت $|b|$ ذات قيمة صغيرة جداً فإن الدالة تكون أكثر تماثل تقرب من الصيغة الرياضية الآتية عندما تكون $\hat{\theta}, \theta$ مدروس بمقياس لوغاريتمي وتقريبي (Calabria and Pulcini,1994).

$$L(\hat{\theta}, \theta) \propto \frac{b^2}{2} (\text{Ln}\hat{\theta} - \text{Ln}\theta)^2$$

بالاعتماد على دالة المخاطرة اللاحقة نحصل على مقدر بيز لـ θ تحت دالة الخسارة الانتروبية وفق المعادلة (1) هي:

$$\therefore \hat{\theta}_E = \left[E_{\theta} \left(\frac{1}{\theta^b} \right) \right]^{-\frac{1}{b}} = \left[E_{\theta} (\theta^{-b}) \right]^{\frac{1}{b}} \quad \dots\dots\dots(2)$$

3- دالة خسارة الخطأ اللوغاريتمي التربيعي : The Squared Log Error Loss function تم اقتراح هذه الدالة من قبل (Brown,1968) وهي من دوال الخسارة المتماثلة وتأخذ الصيغة الرياضية الآتية:

$$L(\hat{\theta}, \theta) = \left(\text{Ln} \frac{\hat{\theta}}{\theta} \right)^2 = (\text{Ln}(\hat{\theta}) - \text{Ln}(\theta))^2 \quad \dots\dots\dots(3)$$

هذه الدالة غير محدبة دائماً إذا كانت $\frac{\hat{\theta}}{\theta} \leq e$ ما عدا ذلك ستكون مقعرة وبالاعتماد على دالة المخاطرة

اللاحقة يتم الحصول الى مقدر بيز لـ θ تحت دالة خسارة الخطأ اللوغاريتمي التربيعي (Dey) $(\hat{\theta}_{\text{LogSE}})$ (Lanping,2013)(and Maiti,2011) وفق المعادلة (3) وبالشكل الآتي:

$$\therefore \hat{\theta}_{\text{LogSE}} = \text{EXP}[E_{\theta}(\text{Ln}(\theta))] \quad \dots\dots\dots(4)$$

4- دالة الخسارة الانتروبية المقترحة : Proposed Entropy Loss function

وبالتأكيد على أن العديد من المسائل والحالات العلمية المختلفة يكون التعبير عن خطأ التقدير بشكل نسبي $\frac{\hat{\theta}}{\theta}$ (المقدر $\hat{\theta}$ نسبة إلى المعلمة θ) أكثر واقعية وعادة يعبر عن هذا الخطأ بالرمز D. أما دالة الخسارة للخطأ D فتكون في هذه الحالة دالة غير متماثلة بالاستناد إلى الصيغة الأولية المقترحة من قبل (Varian,1975) ويعبر عنها كالآتي:

$$\left. \begin{aligned} L(D) &= k (D)^b + \gamma (\text{Ln}(D))^2 - \gamma \text{Ln}(D) - k \\ \text{or} \\ L(\hat{\theta}, \theta) &= k \left(\frac{\hat{\theta}}{\theta} \right)^b + \gamma (\text{Ln}(\frac{\hat{\theta}}{\theta}))^2 - \gamma \text{Ln}(\frac{\hat{\theta}}{\theta}) - k \end{aligned} \right\} ; b, k > 0 \quad \dots\dots\dots(5)$$



دالة خسارة انتروبية مقترحة وتطبيقها للإيجاد مقدر بيز لمعلمة التوزيع الأسّي

وكما نعلم ولكي تكون دالة الخسارة اقل ما يمكن $L(D)=0$ فيجب أن تكون $\hat{\theta} = \theta$ ومن ثم فإن $D=1$ وبالتعويض عن قيمة D هذه أي $D=1$ فإن المعادلة (5) تحقق المطلوب $L(D)=0$ أي أن:
إذا كانت $\hat{\theta} = \theta$ أي $D=1$ فإن $L(D)=0$.
والحد الأدنى الذي يجعل $L'(D)|_{D=1} = 0$ (أي من خلال اشتقاق $L(\hat{\theta}, \theta)$ المعرفة في المعادلة (5) وتعويض $D=1$) سوف نحصل على نهاية صغرى للدالة وكالاتي:

$$\left. \frac{\partial L(D)}{\partial D} \right|_{D=1} = k b (D)^{b-1} + 2\gamma (\ln(D)) \frac{1}{D} - \frac{\gamma}{D} - 0 \Big|_{D=1} = 0$$

$$= k b (1)^{b-1} + 2\gamma (\ln(1)) \frac{1}{1} - \frac{\gamma}{1} - 0 = k b + 0 - \gamma - 0 = 0$$

$$\therefore k b - \gamma = 0 \Rightarrow \gamma = k b$$

وبتعويض $\gamma = k b$ بالمعادلة (5) لنحصل على دالة خسارة بصيغة أبسط وبالإمكان التعامل معها وعلى النحو الآتي:

$$L(D) = k (D)^b + k b (\ln(D))^2 - k b \ln(D) - k$$

$$L(D) = k \left[(D)^b + b (\ln(D))^2 - b \ln(D) - 1 \right] ; k, b > 0$$

المعادلة الاتية تمثل دالة الخسارة الانتروبية المقترحة وهي من الدوال غير المتماثلة ويمكن كتابتها بشكل أبسط لتسهيل العمليات الحسابية وكالاتي:

$$L(D) = k \left[\left[\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta} \right)^b - b \ln \left(\frac{\hat{\theta}}{\theta} \right) - 1 \right] + b (\ln(\hat{\theta}) - \ln(\theta))^2 \right] \dots \dots \dots (6)$$

$$\therefore L(\hat{\theta}, \theta) = k \left[(\text{Entropy Loss function}) + b (\text{Squared Log Error Loss function}) \right]$$

ومن ثم فإن دالة الخسارة الانتروبية المقترحة غير المتماثلة (Proposed Entropy Loss function (PE)) هي مزيج أو تركيبة خطية من دالة الخسارة الانتروبية (Entropy Loss function (E)) علماً بأن هذه الدالة هي تعديل لدالة الخسارة الأسية الخطية (LINEX) ودالة خسارة الخطأ اللوغاريتمي التربيعي (The Squared Log Error Loss function (LogSE)). ونلاحظ أن دالة الخسارة الجديدة المقترحة تأخذ حداً وسطاً بين كلتا الدالتين في عملية التقدير (Entropy Loss function (E)) و (The Squared Log Error Loss function (LogSE)).

وحتى نحصل على نهاية صغرى يجب أن تكون المشتقة الثانية لـ $L(D)$ أي $L''(D) > 0$ بتعويض $D=1$ بعدما تم اخذ المشتقة الأولى المذكورة انفا لنحصل على:

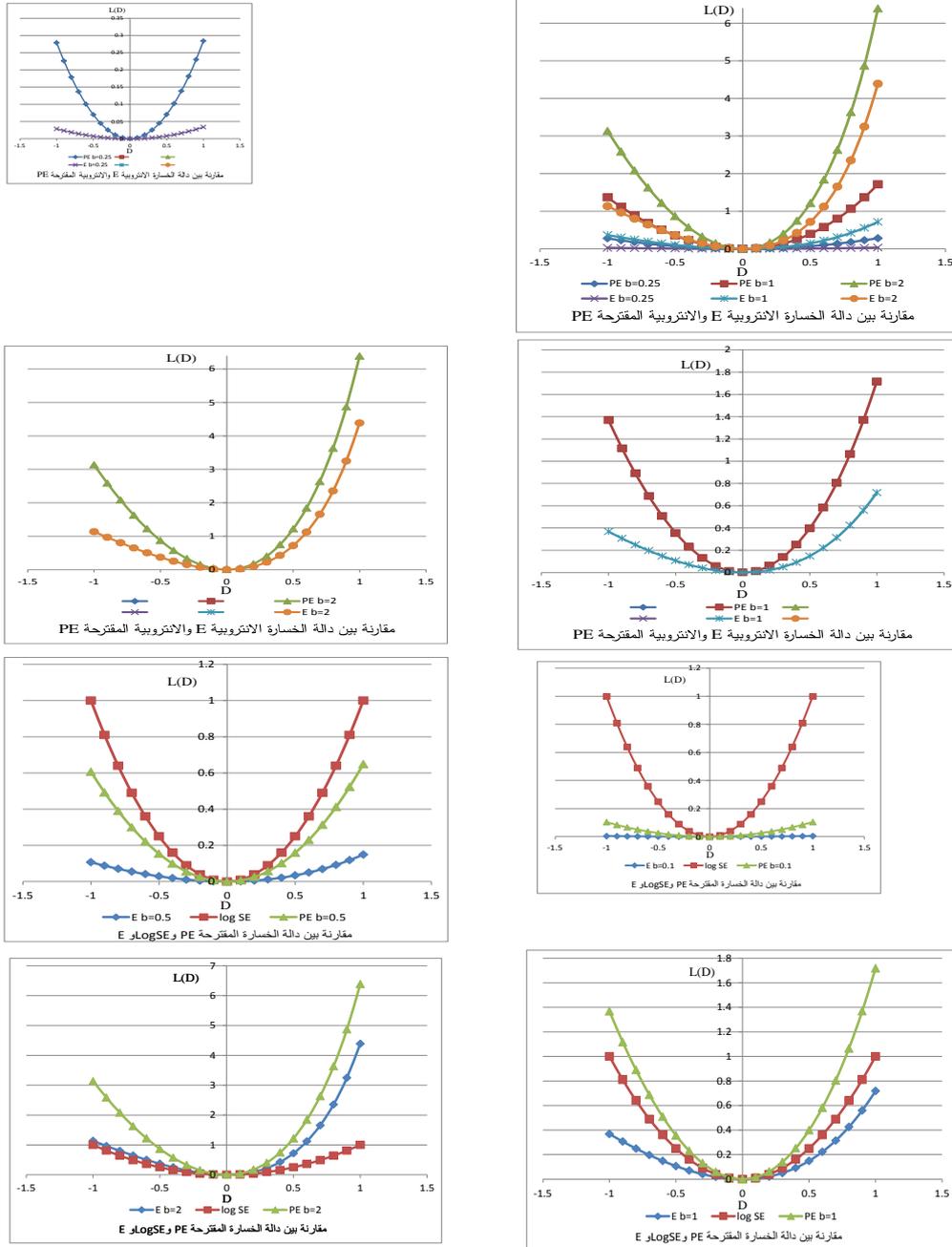
$$\left. \frac{\partial^2 L(D)}{\partial D^2} \right|_{D=1} = k b (b-1) (D)^{b-2} + 2\gamma (-\ln(D) + 1) \frac{1}{D^2} + \frac{\gamma}{D^2} \Big|_{D=1}$$

$$= k b (b-1) + 3\gamma > 0$$

تحقق المطلب المذكور المذكورة انفا للدالة.

ويوضح الشكل (1) رسم لدالة الخسارة المقترحة (PE) مع الدالتين (LogSE) و (E) وفي حالات متعددة عند إعطاء قيم مختلفة لـ b ولتكون الدالة معيار الوزن وتكون الدالة المقترحة عبارة عن المعدل الموزون بين الدالتين تحافظ فيها على التماثل وبشكل أكثر وضوحاً من دالة الخسارة (Entropy Loss function (E)).

الشكل (1) : يوضح دالة الخسارة الانتروبية المقترحة (PE) والدالة الانتروبية (E) والدالة الخطأ اللوغاريتمي التربيعي (LogSE)



1- من الشكل (1) المذكورة انفا نلاحظ اقتراب دالة الخسارة المقترحة (PE) من دالة خسارة الخطأ اللوغاريتمي التربيعي (LogSE) بشكل أكثر من دالة الخسارة الانتروبية (E) عندما تكون قيمة b صغيرة وتكون دالة الخسارة المقترحة (PE) اقرب إلى دالة الخسارة الانتروبية (E) عندما تكون b ذات قيمة كبيرة مع احتفاظ شكلها بالتناظر كما هي الحال في الدالة الخسارة (E).



دالة خسارة انتروبية مقترحة وتطبيقها لإيجاد مقدر بيز لمعلمة التوزيع الأسّي

2- التناظر يزداد كلما كانت $b > 0$ ويكون التناظر واضح إذا كانت b صغيرة أو كبيرة فضلاً عن التقليل من خطأ التقدير الموجب الذي يكون أكثر خطورة ($\hat{\theta} > \theta$) من خطأ التقدير السالب من خلال إعطاء توازن في التقدير بين (**Overestimation**) و (**Undrestimation**) في الحالة b كبيرة عند اقتراب دالة الخسارة المقترحة (PE) من دالة الخسارة (E) أو العكس عند اقترابها من التماثل من دالة الخسارة (LogSE) (Calabria and Pulcini, 1994) لذلك ستكون دالة الخسارة المقترحة (PE) المعدل الموزون بين الدالتين.

3- تكون دالة الخسارة ثابتة أي ان $L(D) > 0$ عندما $D \neq 1$ علماً ان D هي نسبة تتحقق عندما $0 < D < 1$ وتكون $L(D) > 0$ دائماً، فضلاً عن ان قيمها هي ليست على المحور الأفقي وإنما في المستوى لشكل عام حيث ان المماس لمنحنى الدالة يكون موازياً لمحور السنيات.

5- مقدر بيز تحت دالة الخسارة المقترحة.

الآن نجد مقدر بيز تحت دالة الخسارة المقترحة (PE) بنفس الأسلوب المقدم من قبل (Saiful Islam, Roy and Ali, 2004) وذلك بصياغة المسألة الآتية:
مسألة (1):

مقدر بيز للمعلمة θ ($\hat{\theta}_{PE}$) وتحت دالة الخسارة الانتروبية المقترحة (PE) يكون بالصيغة الآتية:

$$\hat{\theta}_{PE} = \text{EXP} \left[\frac{1}{(b+2)} \left[-\text{Ln} \left(E_{\theta} \left(\frac{1}{\theta^b} \right) \right) + 2E_{\theta} (\text{Ln}(\theta)) \right] \right]$$

البرهان:

لإثبات المسألة يتم وضع افتراض بسيط يمكن التعبير عنه على النحو الآتي:
من المعلوم أن مقدر بيز مقدر هو متسق (Consistent) ومن ثم فإن:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E (\text{Ln}(\hat{\theta}) - \text{Ln}(\theta))^r = \lim_{n \rightarrow \infty} E \left(\text{Ln} \left(\frac{\hat{\theta}}{\theta} \right) \right)^r \Rightarrow 0 ; r \geq 2 \quad \dots\dots\dots(7)$$

الآن يتم إيجاد مقدر للمعلمة θ تحت دالة الخسارة الانتروبية المقترحة والموضحة بالمعادلة (6).

$$L(\hat{\theta}, \theta) = k \left[\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta} \right)^b + b (\text{Ln}(\frac{\hat{\theta}}{\theta}))^2 - b \text{Ln}(\frac{\hat{\theta}}{\theta}) - 1 \right] ; k, b > 0$$

وبالاعتماد على نظرية بيز والحصول على التوزيع اللاحق $P(\theta | \underline{X})$ في حالة توفر المعلومات حول المعلمة θ (**Informative**) وبوجود التوزيع السابق المرافق (**Conjugate Prior**) $P(\theta)$ والذي يكون فيه فضاء المعلمة هو $\theta \in \Omega$ ، يتم الحصول على مقدر بيز من دالة المخاطرة اللاحقة التي تمثل التوقع لدالة الخسارة وكالاتي:

$$PR(\hat{\theta}, \theta) = E_{\theta} (L(\hat{\theta}, \theta)) = k E_{\theta} \left[\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta} \right)^b + b (\text{Ln}(\frac{\hat{\theta}}{\theta}))^2 - b \text{Ln}(\frac{\hat{\theta}}{\theta}) - 1 \right] \quad \dots\dots\dots(8)$$

$$PR(\hat{\theta}, \theta) = k \left[\hat{\theta}^b E_{\theta} \left(\frac{1}{\theta^b} \right) + b E_{\theta} ((\text{Ln}(\hat{\theta}) - \text{Ln}(\theta))^2) - b E_{\theta} (\text{Ln}(\hat{\theta}) - \text{Ln}(\theta)) - 1 \right] \quad \dots\dots\dots(9)$$



دالة خسارة انطروبية مقترحة وتطبيقها للإيجاد مقدر بيز لمعلمة التوزيع الأسّي

وان مقدر بيز لـ θ يمثل قيمة θ عندما تكون $PR(\hat{\theta}, \theta)$ أقل ما يمكن وعليه يتم اشتقاق المعادلة (9) نسبة إلى

$$\hat{\theta} \text{ مع مساواة المشتقة بالصفر } \frac{\partial PR(\hat{\theta}, \theta)}{\partial \hat{\theta}} = 0 \text{ وعلى النحو الآتي:}$$

$$\frac{\partial PR(\hat{\theta}, \theta)}{\partial \hat{\theta}} = k \left[b\hat{\theta}^{b-1} E_{\theta} \left(\frac{1}{\theta^b} \right) + \frac{2b}{\hat{\theta}} E_{\theta} (\ln(\hat{\theta}) - \ln(\theta)) - bE_{\theta} \left(\frac{1}{\hat{\theta}} - 0 \right) - 0 \right] = 0$$

وبالقسمة على b و k وضرب الطرفين في $\hat{\theta}$ نحصل على:

$$\hat{\theta}^b E_{\theta} \left(\frac{1}{\theta^b} \right) + 2E_{\theta} (\ln(\hat{\theta}) - \ln(\theta)) - 1 = 0$$

أي أن:

$$\hat{\theta}^b E_{\theta} \left(\frac{1}{\theta^b} \right) = 1 - 2E_{\theta} (\ln(\hat{\theta}) - \ln(\theta))$$

وبأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين نحصل على:

$$b \ln(\hat{\theta}) + \ln \left(E_{\theta} \left(\frac{1}{\theta^b} \right) \right) = \ln(1 - 2E_{\theta} (\ln(\hat{\theta}) - \ln(\theta)))$$

وألان نفرض أن:

$$t = -2E_{\theta} (\ln(\hat{\theta}) - \ln(\theta))$$

وعليه فإن:

$$b \ln(\hat{\theta}) + \ln \left(E_{\theta} \left(\frac{1}{\theta^b} \right) \right) = \ln(1 + t) \cong t$$

وبتوسيع الصيغة $\ln(1 + t)$ على أساس إهمال المراتب العليا من المرتبة الثانية لـ t وفق سلسلة تايلر وبالشكل الآتي:

$$\ln(1 + t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \dots \cong t = -2E_{\theta} (\ln(\hat{\theta}) - \ln(\theta))$$

وعليه فإن:

$$b \ln(\hat{\theta}) + \ln \left(E_{\theta} \left(\frac{1}{\theta^b} \right) \right) = -2E_{\theta} (\ln(\hat{\theta}) - \ln(\theta))$$

أي أن:

$$b \ln(\hat{\theta}) + \ln \left(E_{\theta} \left(\frac{1}{\theta^b} \right) \right) = -2\ln(\hat{\theta}) + 2E_{\theta} (\ln(\theta))$$

وبإعادة ترتيب المعادلة للحصول على قيمة $\hat{\theta}$ نجد أن:

$$(b + 2)\ln(\hat{\theta}) = -\ln \left(E_{\theta} \left(\frac{1}{\theta^b} \right) \right) + 2E_{\theta} (\ln(\theta))$$



دالة خسارة انتروبية مقترحة وتطبيقها لإيجاد مقدر بيز للمعلمة التوزيع الأسّي

أي أن:

$$\left. \begin{aligned} \text{Ln}(\hat{\theta}_{PE}) &= \frac{1}{(b+2)} \left[-\text{Ln} \left(E_{\theta} \left(\frac{1}{\theta^b} \right) \right) + 2E_{\theta}(\text{Ln}(\theta)) \right] \\ \text{or} \\ \hat{\theta}_{PE} &= \text{EXP} \left[\frac{1}{(b+2)} \left[-\text{Ln} \left(E_{\theta} \left(\frac{1}{\theta^b} \right) \right) + 2E_{\theta}(\text{Ln}(\theta)) \right] \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(10)$$

حيث أن:

$E_{\theta}(\cdot)$: يمثل التوقع اللاحق. وهو المطلوب

الآن يتم تقديم العلاقة بين مقدر بيز للمعلمة θ تحت دالة الخسارة الانتروبية والانتروبية المقترحة وفق المسألة الآتية:

مسألة (2):

مقدر بيز تحت دالة الخسارة الانتروبية (E) والانتروبية المقترحة (PE) مرتبطة بالمعادلة الآتية:

$$\hat{\theta}_{PE} = \text{EXP} \left[\frac{1}{(b+2)} \left(-\text{Ln}(\hat{\theta}_E^{-b}) + 2E_{\theta}(\text{Ln}(\theta)) \right) \right]$$

حيث أن $\hat{\theta}_E$ و $\hat{\theta}_{PE}$ مقدرات بيز تحت دالة الخسارة الانتروبية والانتروبية المقترحة على التوالي:
البرهان:

إن مقدر بيز لـ θ والموضح في المعادلة (2) تحت دالة الخسارة الانتروبية الموضحة في المعادلة (1) هو:

$$\hat{\theta}_E^{-b} = E_{\theta} \left(\frac{1}{\theta^b} \right)$$

وبتعويض المعادلة المذكورة انفا في المعادلة (10) التي تمثل مقدر بيز تحت دالة الخسارة الانتروبية المقترحة لنحصل على:

$$\begin{aligned} \text{Ln}(\hat{\theta}_{PE}) &= \frac{1}{(b+2)} \left[-\text{Ln}(\hat{\theta}_E^{-b}) + 2E_{\theta}(\text{Ln}(\theta)) \right] \\ \therefore \hat{\theta}_{PE} &= \text{EXP} \left[\frac{1}{(b+2)} \left[-\text{Ln}(\hat{\theta}_E^{-b}) + 2E_{\theta}(\text{Ln}(\theta)) \right] \right] \end{aligned} \dots\dots\dots(11)$$

وهو يحقق البرهان.

والمسألة الآتية توضح العلاقة بين مقدر بيز لـ θ تحت دالة الخسارة الانتروبية المقترحة ودالة خسارة الخطأ اللوغاريتمي التربيعي.

مسألة (3):

مقدر بيز تحت دالة الخسارة الانتروبية المقترحة (PE) والخطأ اللوغاريتمي التربيعي (LogSE) مرتبطة بالمعادلة:

$$\hat{\theta}_{PE} = \text{EXP} \left[\frac{1}{(b+2)} \left(-\text{Ln} \left(E_{\theta} \left(\frac{1}{\theta^b} \right) \right) + 2 \text{Ln}(\hat{\theta}_{\text{LogSE}}) \right) \right]$$

حيث أن $\hat{\theta}_{PE}$ و $\hat{\theta}_{\text{LogSE}}$ مقدرات بيز تحت دالة الخسارة الانتروبية المقترحة والخطأ اللوغاريتمي التربيعي على التوالي:



دالة خسارة انتروبية مقترحة وتطبيقها لإيجاد مقدر بيز لمعلمة التوزيع الأسّي

البرهان:

من دالة الخسارة الانتروبية المقترحة سوف نحصل على مقدر بيز للمعلمة θ والموضحة في المعادلة (10) علماً أن دالة الخسارة (LogSE) الموضحة في المعادلة (3) تم الوصول إلى مقدر $\hat{\theta}$ وفق المعادلة (4) والتي تكون فيها:

$$\text{Ln}(\hat{\theta}_{\text{LogSE}}) = E_{\theta}(\text{Ln}(\theta))$$

وباستخدام النتيجة الآتية في المعادلة (10) لنحصل على:

$$\text{Ln}(\hat{\theta}_{\text{PE}}) = \frac{1}{(b+2)} \left[-\text{Ln} \left(E_{\theta} \left(\frac{1}{\theta^b} \right) \right) + 2\text{Ln}(\hat{\theta}_{\text{LogSE}}) \right]$$

$$\hat{\theta}_{\text{PE}} = \text{EXP} \left[\frac{1}{(b+2)} \left[-\text{Ln} \left(E_{\theta} \left(\frac{1}{\theta^b} \right) \right) + 2\text{Ln}(\hat{\theta}_{\text{LogSE}}) \right] \right] \dots\dots\dots(12)$$

وهذا يحقق البرهان.

والمسألة الآتية تمثل العلاقة بين مقدر بيز للمعلمة θ تحت دالة الخسارة الانتروبية (E) والانتروبية المقترحة (PE) والخطأ اللوغاريتمي التريبي (LogSE).
مسألة (4).

مقدر بيز تحت دالة الخسارة الانتروبية (E) والانتروبية المقترحة (PE) والخطأ اللوغاريتمي التريبي (LogSE) مرتبطة بالمعادلة:

$$\hat{\theta}_{\text{PE}} = \text{EXP} \left[\frac{1}{(b+2)} \left[-\text{Ln}(\hat{\theta}_E^{-b}) + 2\text{Ln}(\hat{\theta}_{\text{LogSE}}) \right] \right]$$

حيث أن $\hat{\theta}_E$ و $\hat{\theta}_{\text{PE}}$ و $\hat{\theta}_{\text{LogSE}}$ تشير إلى مقدرات بيز تحت دالة الخسارة E و PE و LogSE على التوالي:
البرهان.

من المعادلة (11) التي تمثل مقدر بيز تحت دالة الخسارة E و PE والموضحة بالصيغة أدناه:

$$\hat{\theta}_{\text{PE}} = \text{EXP} \left[\frac{1}{(b+2)} \left[-\text{Ln}(\hat{\theta}_E^{-b}) + 2E_{\theta}(\text{Ln}(\theta)) \right] \right]$$

ولدينا مقدر بيز تحت دالة الخسارة LogSE والموضحة بالمعادلة (4) يمكن إضافة نتيجتها إلى المعادلة (11) لنحصل على:

$$\therefore \hat{\theta}_{\text{PE}} = \text{EXP} \left[\frac{1}{(b+2)} \left[-\text{Ln}(\hat{\theta}_E^{-b}) + 2\text{Ln}(\hat{\theta}_{\text{LogSE}}) \right] \right] \dots\dots\dots(13)$$

وهذا يحقق البرهان ويمكن الاعتماد على المعادلة (12) وتعويض نتيجتها بالمعادلة (11) لتحقيق الهدف المطلوب أيضاً.

6- خصائص مقدر بيز تحت دالة الخسارة المقترحة

1- مقدر بيز تحت دالة الخسارة الانتروبية المقترحة والموضحة في المعادلة (10) أو (13) علماً أن $E_{\theta}(\cdot)$ تمثل توقع التوزيع اللاحق في حالة توفر المعلومات (Informative) أو عدم توفر المعلومات (Non-Informative) حول المعلمة θ .

2- وجود علاقة بين مقدر بيز تحت دالة الخسارة الانتروبية (E) والانتروبية المقترحة (PE) والموضحة بالمعادلة (11) والتي تكون فيها $\hat{\theta}_{\text{PE}}$ و $\hat{\theta}_E$ مقدرات بيز تحت هذه الدوال على التوالي.



دالة خسارة انتروبية مقترحة وتطبيقها لإيجاد مقدر بيز لمعلمة التوزيع الآسي

3- وجود علاقة بين مقدر بيز تحت دالة الخسارة الانتروبية المقترحة (PE) والخطأ اللوغاريتمي التربيعي (LogSE) والموضحة في المعادلة (12) والتي تكون فيها $\hat{\theta}_{PE}$ و $\hat{\theta}_{LogSE}$ مقدرات بيز تحت هذه الدوال على التوالي.

4- وجود العلاقة بين مقدر بيز تحت دالة الخسارة الانتروبية (E) والانتروبية المقترحة (PE) والخطأ اللوغاريتمي التربيعي (LogSE) والموضحة في المعادلة (13) والتي تكون فيها $\hat{\theta}_E$ و $\hat{\theta}_{PE}$ و $\hat{\theta}_{LogSE}$ والتي تمثل مقدرات بيز تحت هذه الدوال على التوالي علماً أن $\hat{\theta}_{PE}$ يمثل المعدل الموزون بين $\hat{\theta}_{LogSE}$ و $\hat{\theta}_E$ عند إضافة الثابت b.

5- التناظر يكون واضح إذا كانت b صغيرة أو كبيرة وإعطاء توازن في التقدير بين (Overestimation) و (Underestimation) لذلك ستكون دالة الخسارة المقترحة (PE) المعدل الموزون بين الدالتين مع الجمع بين دوال متماثلة وغير متماثلة ويكون تعديل لدالة الخسارة الانتروبية. ولتوضيح إمكانية استخدام مقدر بيز تحت دالة الخسارة الانتروبية المقترحة سوف نتناول مثال لتقدير معلمة القياس للتوزيع الآسي وتحديد حجم العينة الأمثل وكالاتي:
مثال: تقدير معلمة القياس للتوزيع الآسي مع تحديد حجم العينة الأمثل لها.
افتراض أن (X_1, X_2, \dots, X_n) عينة عشوائية بحجم n مأخوذة من التوزيع الآسي بمعلمة θ ، حيث أن دالة الكثافة لها هو:

$$P(x | \theta) = P(x; \theta) = \theta e^{-\theta x} \quad ; x > 0 \quad \dots\dots\dots(14)$$

وعليه فإن دالة الإمكان للمعلمة θ ستكون كالاتي:

$$P(\underline{X} | \theta) = \theta^n e^{-\theta t} \quad \dots\dots\dots(15)$$

$$\text{حيث أن: } t = \sum_{i=1}^n x_i$$

أما التوزيع السابق المرافق (Conjugate Prior) حول المعلمة θ سيتبع توزيع كاما بالمعلمتين α_0, β_0 وبالصيغة الاتية:

$$P(\theta) = \frac{\beta_0^{\alpha_0}}{\Gamma(\alpha_0)} \theta^{\alpha_0-1} e^{-\beta_0 \theta} \quad ; \theta \geq 0 \quad \dots\dots\dots(16)$$

وللحصول على التوزيع اللاحق سوف نعتمد على المعادلة (15) و(16) وفق نظرية بيز والموضحة بالصيغة الرياضية الاتية:

$$P(\theta | \underline{X}) \propto P(\theta)P(\underline{X} | \theta) \propto \theta^{\alpha_0-1} e^{-\beta_0 \theta} \theta^n e^{-\theta t} \propto \theta^{(\alpha_0+n)-1} e^{-\theta(\beta_0+t)}$$

وعليه فإن التوزيع اللاحق يتبع:

$$\theta | \underline{X} \sim \text{Gamma}(\alpha_0 + n, \beta_0 + t)$$

ويمكن كتابتها بالصيغة الاتية:

$$P(\theta | \underline{X}) = \frac{(\beta_0 + t)^{(\alpha_0+n)}}{\Gamma(\alpha_0 + n)} \theta^{(\alpha_0+n)-1} e^{-\theta(\beta_0+t)} \quad \dots\dots\dots(17)$$

علماً أن التوقع والتباين للتوزيع اللاحق سيكون:

$$E_{\theta}(\theta | \underline{X}) = \frac{(\alpha_0 + n)}{(\beta_0 + t)} \quad ; \quad \text{Var}(\theta | \underline{X}) = \frac{(\alpha_0 + n)}{(\beta_0 + t)^2}$$



دالة خسارة انتروبية مقترحة وتطبيقها للإيجاد مقدر بيز لمعلمة التوزيع الأسّي

وللحصول على مقدر بيز تحت دالة الخسارة الانتروبية المقترحة (PE) يتم باستخدام (13) والتي يمكن توضيحها فيما يأتي:

$$\hat{\theta}_{PE} = \text{EXP} \left[\frac{1}{(b+2)} \left[-\text{Ln}(\hat{\theta}_E^{-b}) + 2\text{Ln}(\hat{\theta}_{\text{LogSE}}) \right] \right]$$

حيث أن:

$$\hat{\theta}_E^{-b} = E_{\theta} \left(\frac{1}{\theta^b} \right) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\theta^b} P(\theta | \underline{X}) d\theta$$

وبالتعويض عن التوزيع اللاحق لـ θ المعرف في المعادلة (17) نحصل على:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_E^{-b} = E_{\theta} \left(\frac{1}{\theta^b} \right) &= \frac{(\beta_0 + t)^{(\alpha_0 + n)}}{\alpha_0 + n} \int_0^{\infty} \theta^{(\alpha_0 + n - b) - 1} e^{-\theta(\beta_0 + t)} d\theta \\ &= \frac{(\beta_0 + t)^{(\alpha_0 + n)}}{\alpha_0 + n} \frac{\alpha_0 + n - b}{(\beta_0 + t)^{(\alpha_0 + n - b)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \hat{\theta}_E^{-b} &= \frac{(\beta_0 + t)^b \alpha_0 + n - b}{\alpha_0 + n} \\ \therefore \hat{\theta}_E &= \left(\frac{(\beta_0 + t)^b \alpha_0 + n - b}{\alpha_0 + n} \right)^{-\frac{1}{b}} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(8)$$

أما:

$$\begin{aligned} \text{Ln}(\hat{\theta}_{\text{LogSE}}) &= E_{\theta} (\text{Ln}(\theta)) = \int_0^{\infty} \text{Ln}(\theta) P(\theta | \underline{X}) d\theta \\ &= \frac{(\beta_0 + t)^{(\alpha_0 + n)}}{\alpha_0 + n} \int_0^{\infty} \text{Ln}(\theta) \theta^{(\alpha_0 + n) - 1} e^{-\theta(\beta_0 + t)} d\theta \end{aligned}$$

فلو فرضنا أن:

$$Z = (\beta_0 + t) \quad ; \quad N = (\alpha_0 + n)$$

وبإجراء التحويلات نحصل على:

$$y = \theta Z \Rightarrow \theta = \frac{y}{Z} \Rightarrow d\theta = \frac{1}{Z} dy$$

إذن:

$$\text{Ln}(\hat{\theta}_{\text{LogSE}}) = \frac{Z^N}{N} \int_0^{\infty} \text{Ln} \left(\frac{y}{Z} \right) \left(\frac{y}{Z} \right)^{N-1} e^{-y} \frac{1}{Z} dy = \frac{Z^N}{N} \int_0^{\infty} \text{Ln} \left(\frac{y}{Z} \right) y^{N-1} e^{-y} \left(\frac{1}{Z} \right)^{N-1} \frac{1}{Z} dy$$

$$\text{Ln}(\hat{\theta}_{\text{LogSE}}) = \frac{Z^N}{N} \int_0^{\infty} \text{Ln} \left(\frac{y}{Z} \right) y^{N-1} e^{-y} \frac{1}{Z^N} dy = \frac{1}{N} \int_0^{\infty} (\text{Ln}(y) - \text{Ln}(Z)) y^{N-1} e^{-y} dy$$

$$\therefore \text{Ln}(\hat{\theta}_{\text{LogSE}}) = \frac{1}{N} \int_0^{\infty} \text{Ln}(y) y^{N-1} e^{-y} dy - \text{Ln}(Z) \quad ; \quad \sqrt{N} = \int_0^{\infty} y^{N-1} e^{-y} dy$$



فإن:

$$\Psi(N) = \frac{\partial}{\partial N} \text{Ln} \int_0^{\infty} \frac{1}{N} \text{Ln}(y) y^{N-1} e^{-y} dy$$

وهي دالة (Digamma function) (Lanping,2013) إذن.

$$\text{Ln}(\hat{\theta}_{\text{LogSE}}) = \frac{1}{N} \int_0^{\infty} \frac{1}{N} \text{Ln}(y) y^{N-1} e^{-y} dy - \text{Ln}(Z) = \frac{N'}{N} - \text{Ln}(Z) = \Psi(N) - \text{Ln}(Z)$$

وبالتعويض عن N و Z نحصل على:

$$\left. \begin{aligned} \therefore \text{Ln}(\hat{\theta}_{\text{LogSE}}) &= \Psi(\alpha_0 + n) - \text{Ln}(\beta_0 + t) \\ \therefore \hat{\theta}_{\text{LogSE}} &= \text{EXP}(\Psi(\alpha_0 + n) - \text{Ln}(\beta_0 + t)) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(19)$$

وعليه يمكن الحصول على مقدر بيز تحت دالة الخسارة الانتروبية المقترحة (PE) وفق المعادلة (13) للتوزيع الآسي وبالشكل الآتي:

$$\left. \begin{aligned} \text{Ln}(\hat{\theta}_{\text{PE}}) &= \frac{1}{(b+2)} \left[-\text{Ln} \left(\frac{(\beta_0 + t)^b \alpha_0 + n - b}{\alpha_0 + n} \right) + 2(\Psi(\alpha_0 + n) - \text{Ln}(\beta_0 + t)) \right] \\ \hat{\theta}_{\text{PE}} &= \text{EXP} \left[\frac{1}{(b+2)} \left[-\text{Ln} \left(\frac{(\beta_0 + t)^b \alpha_0 + n - b}{\alpha_0 + n} \right) + 2(\Psi(\alpha_0 + n) - \text{Ln}(\beta_0 + t)) \right] \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(20)$$

والآن يتم إيجاد حجم العينة الأمثل (Lindley,1972) باستخدام أسلوب بيز وتحت دالة الخسارة المقترحة (PE) بعد توفر مقدر بيز ل-θ وفق المعادلة (20) نسبة للتوزيع الآسي وذلك من خلال دالة الكلفة الكلية TC_(n) التي تجمع بين الكلفة الخطية ودالة المخاطرة اللاحقة (Cochran,1977) والتي يتم الحصول عليها وفق المعادلة (8) وعلى النحو الآتي:

$$\begin{aligned} \text{TC}_{(n)} &= C_{(n)} + \text{PR} = C_0 + C n + \text{PR}(\hat{\theta}, \theta) \\ \therefore \text{PR}(\hat{\theta}, \theta) &= E_{\theta}(\text{L}(\hat{\theta}, \theta)) = k E_{\theta} \left[\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta} \right)^b + b (\text{Ln}(\frac{\hat{\theta}}{\theta}))^2 - b \text{Ln}(\frac{\hat{\theta}}{\theta}) - 1 \right] \\ &= k \left[\hat{\theta}^b E_{\theta} \left(\frac{1}{\theta^b} \right) + b (\text{Ln}(\hat{\theta}))^2 - 2b \text{Ln}(\hat{\theta}) E_{\theta}(\text{Ln}(\theta)) + b E_{\theta}(\text{Ln}(\theta))^2 \right. \\ &\quad \left. - b E_{\theta} \text{Ln}(\hat{\theta}) + b E_{\theta}(\text{Ln}(\theta)) - 1 \right] \end{aligned} \dots\dots\dots(21)$$

وبتعويض ناتج المعادلة (2) و (4) بدالة المخاطرة اللاحقة الموضحة في المعادلة (21) مع إجراء بعض التبسيطات لها لنحصل على:

$$\therefore E_{\theta}(\text{Ln}(\theta)) = \text{Ln}(\hat{\theta}) \quad ; \quad \therefore E_{\theta} \left(\frac{1}{\theta^b} \right) = \hat{\theta}^{-b}$$



$$PR(\hat{\theta}, \theta) = k \left[1 + b(\text{Ln}(\hat{\theta}))^2 - 2b(\text{Ln}(\hat{\theta})) + b E_{\theta}(\text{Ln}(\theta))^2 - 1 \right]$$

$$\therefore PR(\hat{\theta}, \theta) = k b \left[E_{\theta}(\text{Ln}(\theta))^2 - (\text{Ln}(\hat{\theta}_{PE}))^2 \right] \dots\dots\dots(22)$$

علماً أن:

$$E_{\theta}(\text{Ln}(\theta))^2 = \text{Var}(\text{Ln}(\theta)) + [E_{\theta}(\text{Ln}(\theta))]^2$$

وبتعويض المعادلة (22) بدالة الكلفة الكلية لها لنحصل من خلالها على حجم العينة الأمثل وبالصيغة الآتية:

$$TC_{(n)} = C_0 + C n + k b \left[E_{\theta}(\text{Ln}(\theta))^2 - (\text{Ln}(\hat{\theta}_{PE}))^2 \right] \dots\dots\dots(23)$$

وبتعويض مقدر بيز تحت دالة الخسارة الانتروبية المقترحة (PE) الموضحة في المعادلة (20) في المعادلة (23) لنحصل على:

$$TC_{(n)} = C_0 + C n + k b \left[E_{\theta}(\text{Ln}(\theta))^2 - \left(\frac{1}{(b+2)} \left[-\text{Ln} \left(\frac{(\beta_0 + t)^b \overline{\alpha_0 + n - b}}{\alpha_0 + n} \right) + 2(\Psi(\alpha_0 + n) - \text{Ln}(\beta_0 + t)) \right] \right)^2 \right] \dots\dots\dots(24)$$

يتم الحصول على $E_{\theta}(\text{Ln}(\theta))^2$ وبالصيغة الآتية:

$$E_{\theta}(\text{Ln}(\theta))^2 = \int_0^{\infty} (\text{Ln}(\theta))^2 P(\theta | \underline{X}) d\theta$$

$$= \frac{(\beta_0 + t)^{(\alpha_0 + n)}}{\alpha_0 + n} \int_0^{\infty} (\text{Ln}(\theta))^2 \theta^{(\alpha_0 + n) - 1} e^{-\theta(\beta_0 + t)} d\theta$$

وإذا افترضنا أن:

$$Z = (\beta_0 + t) \quad ; \quad N = (\alpha_0 + n)$$

بإجراء التحويلات بالطريقة السابقة نفسها نحصل على:

$$y = \theta Z \Rightarrow \theta = \frac{y}{Z} \Rightarrow d\theta = \frac{1}{Z} dy$$

$$E_{\theta} \left(\text{Ln} \left(\frac{y}{Z} \right) \right)^2 = \frac{Z^N}{N} \int_0^{\infty} \left(\text{Ln} \left(\frac{y}{Z} \right) \right)^2 \left(\frac{y}{Z} \right)^{N-1} e^{-y} \frac{1}{Z} dy$$

$$= \frac{Z^N}{N} \int_0^{\infty} \left(\text{Ln} \left(\frac{y}{Z} \right) \right)^2 y^{N-1} e^{-y} \left(\frac{1}{Z} \right)^{N-1} \frac{1}{Z} dy$$

$$E_{\theta} \left(\text{Ln} \left(\frac{y}{Z} \right) \right)^2 = \frac{Z^N}{N} \int_0^{\infty} (\text{Ln}(y) - \text{Ln}(Z))^2 y^{N-1} e^{-y} \frac{1}{Z^N} dy$$



دالة خسارة انطروبية مقترحة وتطبيقها لإيجاد مقدر بيز لمعلمة التوزيع الأسّي

$$E_0 \left(\ln \left(\frac{y}{Z} \right) \right)^2 = \frac{1}{N} \int_0^{\infty} (\ln(y))^2 y^{N-1} e^{-y} dy - \frac{2 \ln(Z)}{N} \int_0^{\infty} \ln(y) y^{N-1} e^{-y} dy + \frac{(\ln(Z))^2}{N} \int_0^{\infty} y^{N-1} e^{-y} dy$$

علماً أن:

$$\Psi'(N) = \frac{N''}{N} = \frac{1}{N} \int_0^{\infty} (\ln(y))^2 y^{N-1} e^{-y} dy$$

وهي المشتقة الثانية لـ (Digamma function) (Lanping, 2013) وعليه فإن:

$$E_0 \left(\ln \left(\frac{y}{Z} \right) \right)^2 = \frac{1}{N} \Psi'(N) N - \frac{2 \ln(Z)}{N} \Psi(N) N + (\ln(Z))^2$$

$$= \Psi'(N) - 2 \ln(Z) \Psi(N) + (\ln(Z))^2$$

وبالتعويض عن قيمة N و Z نحصل على.

$$E_0 \left(\ln \left(\frac{y}{Z} \right) \right)^2 = \Psi'(\alpha_0 + n) - 2 \ln(\beta_0 + t) \Psi(\alpha_0 + n) + (\ln(\beta_0 + t))^2$$

وبتعويض النتيجة المذكورة انفاً في المعادلة (22) نحصل على.

$$TC_{(n)} = C_0 + C n + k b [\Psi'(\alpha_0 + n) - 2 \ln(\beta_0 + t) \Psi(\alpha_0 + n) + (\ln(\beta_0 + t))^2 -$$

$$\left. \left(\frac{1}{(b+2)} \left[-\ln \left(\frac{(\beta_0 + t)^b \alpha_0 + n - b}{\alpha_0 + n} \right) + 2(\Psi(\alpha_0 + n) - \ln(\beta_0 + t)) \right] \right)^2 \right]$$

$$TC_{(n)} = C_0 + C n + k b [\Psi'(\alpha_0 + n) - 2 \ln(\beta_0 + t) \Psi(\alpha_0 + n) + (\ln(\beta_0 + t))^2 -$$

$$\left. \left(\frac{1}{(b+2)} \left[-\left(b \ln(\beta_0 + t) + \ln \left(\frac{\alpha_0 + n - b}{\alpha_0 + n} \right) \right) + 2(\Psi(\alpha_0 + n) - \ln(\beta_0 + t)) \right] \right)^2 \right]$$

تمثل دالة الكلفة الكلية التي من خلالها نسعى للوصول إلى حجم العينة الأمثل والتي يمكن كتابتها أيضاً بشكل آخر ولكن باستخدام متسلسلة ماكلورين من خلال أخذ الحدين الأول والثاني للمتسلسلة للصيغة الآتية:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots \quad x > -1$$

$$\ln(\beta_0 + t) = \ln \left(\beta_0 \left(1 + \frac{t}{\beta_0} \right) \right) = \ln(\beta_0) + \ln \left(1 + \frac{t}{\beta_0} \right) = \ln(\beta_0) + \frac{t}{\beta_0} - \frac{t^2}{2\beta_0^2}$$

وبتعويض المعطيات التي تم التوصل إليها بدالة الكلفة الكلية نحصل على.



دالة خسارة انتروبية مقترحة وتطبيقها لإيجاد مقدر بيز لمعلمة التوزيع الأسّي

$$TC_{(n)} = C_0 + C n + k b [\psi'(\alpha_0 + n) - 2(\text{Ln}(\beta_0) + \frac{t}{\beta_0} - \frac{t^2}{2\beta_0^2}) \psi(\alpha_0 + n) +$$

$$\left(\text{Ln}(\beta_0) + \frac{t}{\beta_0} - \frac{t^2}{2\beta_0^2} \right)^2 -$$

$$\left[\frac{1}{(b+2)} \left[- \left(b \left(\text{Ln}(\beta_0) + \frac{t}{\beta_0} - \frac{t^2}{2\beta_0^2} \right) + \text{Ln} \left(\frac{\alpha_0 + n - b}{\alpha_0 + n} \right) \right) + \right. \right. \\ \left. \left. 2 \left(\Psi(\alpha_0 + n) - \left(\text{Ln}(\beta_0) + \frac{t}{\beta_0} - \frac{t^2}{2\beta_0^2} \right) \right) \right] \right]^2$$

نلاحظ من المعادلة المذكورة انفاً التي تمثل دالة الكلفة الكلية أنها تعتمد على المتغير X الموجودة في ($t = \sum_{i=1}^n x_i$) ولغرض التخلص منه ومن المعلمات المجهولة سوف اخذ التوقع لدالة مع استخدام أسلوب

الدالتا لغرض التقريب وتبسيط الحل (الخياط، باسل يونس، 1991) وعلى النحو الآتي:

$$E(TC_{(n)}) = C_0 + C n + k b [\psi'(\alpha_0 + n) - 2(\text{Ln}(\beta_0) + \frac{E(t)}{\beta_0} - \frac{E(t^2)}{2\beta_0^2}) \psi(\alpha_0 + n) +$$

$$\left(\text{Ln}(\beta_0) + \frac{E(t)}{\beta_0} - \frac{E(t^2)}{2\beta_0^2} \right)^2 -$$

$$\left[\frac{1}{(b+2)} \left[- \left(b \left(\text{Ln}(\beta_0) + \frac{E(t)}{\beta_0} - \frac{E(t^2)}{2\beta_0^2} \right) + \text{Ln} \left(\frac{\alpha_0 + n - b}{\alpha_0 + n} \right) \right) + \right. \right. \\ \left. \left. 2 \left(\Psi(\alpha_0 + n) - \left(\text{Ln}(\beta_0) + \frac{E(t)}{\beta_0} - \frac{E(t^2)}{2\beta_0^2} \right) \right) \right] \right]^2$$

علماً أن $t \sim G(n, \theta)$ و $\frac{1}{\theta} \sim IG(\beta_0, \alpha_0)$ إذن :

$$E(t) = E_\theta(E_x(t)) \quad ; \quad E_x(t) = \frac{n}{\theta}$$

$$\therefore E(t) = E_\theta\left(\frac{n}{\theta}\right) = nE_\theta\left(\frac{1}{\theta}\right) = \frac{n\beta_0}{\alpha_0 - 1}$$

$$\therefore E(t^2) = \text{Var}(t) + (E(t))^2 = \frac{\beta_0^2}{(\alpha_0 - 1)^2(\alpha_0 - 2)} + \left(\frac{n\beta_0}{\alpha_0 - 1}\right)^2 \quad ; \alpha_0 > 2$$



دالة خسارة انتروبية مقترحة وتطبيقها لإيجاد مقدر بيز لمعلمة التوزيع الآسي

وعليه فإن:

$$E(TC_{(n)}) = C_0 + C n + k b[\psi'(\alpha_0 + n) - 2A \psi(\alpha_0 + n) + A^2 -$$

$$\left(\frac{1}{(b+2)} \left[- \left(b A + \text{Ln} \left(\frac{\alpha_0 + n - b}{\alpha_0 + n} \right) \right) + 2((\Psi(\alpha_0 + n)) - A) \right] \right)^2 \quad (25)$$

علماً أن:

$$A = \text{Ln}(\beta_0) + \frac{E(t)}{\beta_0} - \frac{E(t^2)}{2\beta_0^2} = \text{Ln}(\beta_0) + \frac{n\beta_0}{\alpha_0 - 1} - \frac{\beta_0^2}{(\alpha_0 - 1)^2(\alpha_0 - 2)} + \left(\frac{n\beta_0}{\alpha_0 - 1} \right)^2$$

7- الجانب التجريبي

لغرض إجراء مقارنة بين مقدرات بيز تحت دالة الخسارة الانتروبية المقترحة والانتروبية والخطأ اللوغارتمي على وفق المعادلة (18) و(19) و(20) المذكورة انفا الخاصة بالتوزيع الآسي لتقدير المعلمة θ ، تم توليد بيانات عشوائية وبأحجام عينة مختلفة ($n=10,50,100$) وبتكرار قدره $N=1000$ مع اخذ قيمة أولية لمعلمة الموقع θ وقيمة أولية للمعلمتين α_0, β_0 فضلاً عن قيم الأولية لمعلمة الشكل لدالة الخسارة (b, k) وتم استخدام معيار متوسط مربع الخطأ (MSE) ومقدار التحيز (M_{bias}) للمقارنة مع إيجاد حجم العينة البيزي الأمثل بالاعتماد على المعادلة (25) تحت دالة الخسارة الانتروبية المقترحة بقيمة كلفة معاينة لكل وحدة ($C=0.001$) وتم استخدام نظام (MATLAB) و(MAPLE) في العمل والجداول الاتية توضح النتائج.

الجدول (1): مقارنة مقدرات بيز تحت دالة الخسارة (PE) و(E) و(LogSE) بقيم أولية وتكون $\alpha_0 \geq \beta_0$

$\theta=1 \quad k=1 \quad b=1$				$\theta=1 \quad k=1 \quad b=2$			
N	مقارنة معيار	$\hat{\theta}_{LogSE}$	$\hat{\theta}_{PE}$	$\hat{\theta}_E$	$\hat{\theta}_{LogSE}$	$\hat{\theta}_{PE}$	$\hat{\theta}_E$
10	MSE	0.8212	0.8325	0.8556	0.8028	0.8375	0.8737
	Mbias	0.0164	0.0125	0.0068	0.0170	0.0074	0.0037
		0.1266	0.1100	0.0776	0.1260	0.0744	0.0249
50	MSE	0.9474	0.9505	0.9565	0.9524	0.9616	0.9709
	Mbias	0.0008556	0.0006693	0.0003674	0.0008537	0.0003658	0.0000871
		0.0292	0.0259	0.0192	0.0292	0.0191	0.0091
100	MSE	0.9742	0.9758	0.9789	0.9750	0.9798	0.9846
	Mbias	0.0002197	0.0001727	0.0000961	0.0002195	0.0000957	0.0000232
		0.0148	0.0131	0.0098	0.0148	0.0098	0.0048
$\theta=2 \quad k=1 \quad b=1$				$\theta=3 \quad k=1 \quad b=3$			
n	مقارنة معيار	$\hat{\theta}_{LogSE}$	$\hat{\theta}_{PE}$	$\hat{\theta}_E$	$\hat{\theta}_{LogSE}$	$\hat{\theta}_{PE}$	$\hat{\theta}_E$
10	MSE	1.5392	1.5604	1.6037	2.2381	2.4209	2.5510
	Mbias	0.0100	0.0082	0.0053	0.0059	0.0017	0.0004
		0.0980	0.0892	0.0719	0.0746	0.0408	0.0197
50	MSE	1.8804	1.8864	1.8985	2.8097	2.8592	2.8927
	Mbias	0.0004063	0.0003402	0.0002262	0.0002161	0.0000718	0.0000192
		0.0201	0.0184	0.0150	0.0146	0.0084	0.0044
100	MSE	1.9366	1.9397	1.9461	2.8991	2.9249	2.9423
	Mbias	0.0001010	0.0000847	0.0000565	0.0005323	0.0001793	0.0000488
		0.0100	0.0092	0.0075	0.0073	0.0042	0.0022



دالة خسارة انطروبية مقترحة وتطبيقها لإيجاد مقدر بيز لمعلمة التوزيع الأسّي

الجدول (2): مقارنة مقدرات بيز تحت دالة الخسارة (PE) و (E) و (LogSE) بقيم أولية وتكون $\alpha_0 < \beta_0$

		$\theta=1 \quad k=1 \quad b=1$			$\theta=1 \quad k=2 \quad b=2$		
n	مقياس المقارنة	$\hat{\theta}_{LogSE}$	$\hat{\theta}_{PE}$	$\hat{\theta}_E$	$\hat{\theta}_{LogSE}$	$\hat{\theta}_{PE}$	$\hat{\theta}_E$
10	MSE	1.2397	1.2568	1.2917	1.2315	1.2847	1.3402
	Mbias	0.1433	0.1508	0.1663	0.1527	0.1774	0.2033
	Mbias	-0.2934	-0.3044	-0.3259	-0.3030	-0.3366	-0.3689
50	MSE	1.0480	1.0514	1.0581	1.0532	1.0634	1.0737
	Mbias	0.0053	0.0057	0.0067	0.0051	0.0065	0.0080
	Mbias	-0.0681	-0.0712	-0.0772	-0.0671	-0.0763	-0.0853
100	MSE	1.0231	1.0248	1.0282	1.0240	1.0290	1.0341
	Mbias	0.0013	0.0014	0.0016	0.0013	0.0016	0.0020
	Mbias	-0.0346	-0.0362	-0.0394	-0.0346	-0.0393	-0.0441
		$\theta=2 \quad k=2 \quad b=1$			$\theta=3 \quad k=2 \quad b=3$		
n	مقياس المقارنة	$\hat{\theta}_{LogSE}$	$\hat{\theta}_{PE}$	$\hat{\theta}_E$	$\hat{\theta}_{LogSE}$	$\hat{\theta}_{PE}$	$\hat{\theta}_E$
10	MSE	1.9657	1.9928	2.0482	2.7085	2.9297	3.0871
	Mbias	0.0079	0.0088	0.0109	0.0009	0.0020	0.0036
	Mbias	-0.0456	-0.0526	-0.0661	0.0027	-0.0252	-0.0426
50	MSE	1.9722	1.9785	1.9912	2.9357	2.9874	3.0225
	Mbias	0.0000664	0.0000913	0.0001566	0.00001057	0.00001522	0.00005693
	Mbias	-0.0062	-0.0078	-0.0110	0.0028	-0.0031	-0.0070
100	MSE	1.9893	1.9925	1.9990	2.9476	2.9738	2.9914
	Mbias	0.00001076	0.00001623	0.00003120	0.00000259	0.00000301	0.00001325
	Mbias	-0.0028	-0.0036	-0.0052	0.0015	-0.0015	-0.0035

الجدول (3): مقارنة مقدرات بيز تحت دالة الخسارة (PE) و (E) و (LogSE) باستخدام حجم العينة الأمثل

		$\theta=2 \quad n=100 \quad \alpha_0 < \beta_0$							
K	b	مقياس المقارنة	$\hat{\theta}_{LogSE}$	$\hat{\theta}_{PE}$	$\hat{\theta}_E$	n^*	$\hat{\theta}_{LogSE}$	$\hat{\theta}_{PE}$	$\hat{\theta}_E$
1	1	MSE	1.9853	1.9885	1.9950	45	2.1484	2.1560	2.1713
		Mbias	0.00001150	0.00001710	0.00003236		0.00000924	0.00002193	0.00006322
		Mbias	-0.0028	-0.0036	-0.0053		-0.0030	-0.0047	-0.0080
2	2	MSE	1.9940	2.0038	2.0136	57	2.0988	2.1168	2.1348
		Mbias	0.00001046	0.00003069	0.00006292		0.0000091	0.0000497	0.0001220
		Mbias	-0.0027	-0.0052	-0.0076		-0.0030	-0.0071	-0.0111
3	3	MSE	2.0097	2.0276	2.0396	87	2.2802	2.3035	2.3192
		Mbias	0.0000097	0.0000532	0.0001035		0.00000044	0.00002602	0.00006457
		Mbias	-0.0026	-0.0070	-0.0099		-0.0007	-0.0051	-0.0080



دالة خسارة انتروبية مقترحة وتطبيقها لإيجاد مقدر بيز لمعلمة التوزيع الآسي

2	1	MSE M _{bias}	1.9964 0.00001057 -0.0027	1.9997 0.00001593 -0.0035	2.0062 0.00003066 -0.0051	55	1.9840 0.00002348 -0.0048	1.9898 0.00003986 -0.0063	2.0014 0.00008532 -0.0092
	2	MSE M _{bias}	1.9947 0.00001043 -0.0027	2.0045 0.00003062 -0.0052	2.0144 0.00006280 -0.0076	98	2.0048 0.00000635 -0.0025	2.0149 0.00002513 -0.0050	2.0250 0.00005616 -0.0075
	3	MSE M _{bias}	1.9979 0.0000105 -0.0027	2.0157 0.0000555 -0.0071	2.0276 0.0001070 -0.0100	-	-	-	-
$\theta = 5 \quad n = 100 \quad \alpha_0 \geq \beta_0$									
K	b	مقارنة معياري	$\hat{\theta}_{LogSE}$	$\hat{\theta}_{PE}$	$\hat{\theta}_E$	n*	$\hat{\theta}_{LogSE}$	$\hat{\theta}_{PE}$	$\hat{\theta}_E$
1	1	MSE M _{bias}	4.8169 0.00002182 0.0047	4.8248 0.00001876 0.0043	4.8405 0.00001334 0.0036	45	5.2990 0.00008514 0.0092	5.3177 0.00007329 0.0086	5.3555 0.00005236 0.0072
	2	MSE M _{bias}	4.8559 0.00002149 0.0046	4.8798 0.00001312 0.0036	4.9039 0.00000683 0.0026	57	5.1847 0.00005639 0.0075	5.2290 0.00003453 0.0059	5.2736 0.00001812 0.0043
	3	MSE M _{bias}	4.8545 0.00002151 0.0046	4.8978 0.00000789 0.0028	4.9268 0.00000256 0.0016	86	4.6515 0.00003100 0.0056	4.6996 0.00001134 0.0034	4.7320 0.00000366 0.0019
2	1	MSE M _{bias}	4.8410 0.00002162 0.0046	4.8648 0.00001320 0.0036	4.8887 0.00000687 0.0026	57	5.9777 0.00004333 0.0066	6.0288 0.00002669 0.0052	6.0802 0.00001415 0.0038
	2	MSE M _{bias}	4.8486 0.00002156 0.0046	4.8724 0.00001316 0.0036	4.8964 0.00000685 0.0026	98	4.7142 0.00002345 0.0048	4.7378 0.00001431 0.0038	4.7616 0.00000744 0.0027
	3	MSE M _{bias}	4.8616 0.00002146 0.0046	4.9049 0.00000787 0.0028	4.9340 0.00000255 0.0016	-	-	-	-

الاستنتاجات:

- 1- تعد دالة الخسارة الانتروبية المقترحة تركيبة خطية (المعدل الموزون) تجمع بين دالة الخسارة الانتروبية غير المتماثلة مع دالة خسارة الخطأ اللوغارتمي التربيعي المتماثلة ليكون تعديل لدالة الخسارة الانتروبية.
- 2- يكون مقدر بيز للتوزيع الآسي تحت دالة الخسارة الانتروبية المقترحة أكثر كفاءة عند حجم العينة صغيرة بقيم أولية مختلفة فيها $\alpha_0 < \beta_0$ وقيمة موجبة لـ k ، b فإن $(MSE_{LogSE} < MSE_{PE} < MSE_E)$ و $(M_{bias(LogSE)} < M_{bias(PE)} < M_{bias(E)})$ والعكس يكون أكثر كفاءة عند حجم العينة كبيرة بقيم أولية مختلفة فيها $\alpha_0 \geq \beta_0$ وقيمة موجبة لـ k ، b فإن $(MSE_E < MSE_{PE} < MSE_{LogSE})$ ، $(M_{bias(E)} < M_{bias(PE)} < M_{bias(LogSE)})$.
- 3- عندما تكون $\theta \geq 1, b \geq 1$ وقيمة k ثابتة يكون مقدر بيز للتوزيع الآسي تحت دالة خسارة الخطأ اللوغارتمي التربيعي أكثر كفاءة بقيم أولية مختلفة فيها $\alpha_0 < \beta_0$ ومقدر بيز تحت دالة الخسارة الانتروبية المقترحة أقرب إليها والعكس مقدر بيز تحت دالة الخسارة الانتروبية أكثر كفاءة بقيم أولية مختلفة فيها $\alpha_0 \geq \beta_0$ ومقدر الدالة المقترحة أقرب إليها.



دالة خسارة انتروبية مقترحة وتطبيقها لإيجاد مقدر بيز لمعلمة التوزيع الآسي

4- الحصول على حجم العينة البيزي الأمثل تحت دالة خسارة الانتروبية المقترحة نسبة إلى التوزيع الآسي للمعلمة θ .

المصادر:

1. الخياط، باسل يونس ذنون، (1991)، "الاحتمالية والمتغيرات العشوائية"، مديرية دار الكتب للطباعة والنشر، جامعة الموصل.
2. اخلاص علي حمروي، (2010)، "مقارنة مقدرات بيز القياسية لمعلمة توزيع باريتو باستعمال دوال خسارة مختلفة"، رسالة ماجستير غير منشورة، كلية الادارة والاقتصاد-جامعة بغداد.
3. غزوان رفيق غدير، (2012)، "مقارنة مقدرات بيز لمعلمة دالتي المعولية ومعدل الفشل لتوزيع رالي باستعمال دوال خسارة متوازنة وغير متوازنة"، رسالة ماجستير غير منشورة، كلية الادارة والاقتصاد-الجامعة المستنصرية.
4. Bolstad, W.M., (2004), "Introduction to Bayesian Statistics", A John Wiley & Sons, INC., Publication, Wiley- Interscience.
5. Box, G. E. P. and Tiao, G. C., (1973), "Bayesian Inference in Statistical Analysis", Addition –Wesley Publishing Company, California, London.
6. Brown, L., (1968), "Inadmissibility of the usual estimation of scal parameters in problems with unknown location and scale parameters", Ann Mathematics statistics, Vol.(39), No.(1), pp 29-48.
7. Calabria, R. and Pulcini, G., (1994), "An engineering approach to Bayes estimation for the Weibull distribution", Micro-electron, Reliab. Vol.(34), No.(5), pp 789-802.
8. Cochran, W.G., (1977), "Sampling Techniques, Third Edition", John Wiley and Sons.
9. DeGroot, M.H., (1970), "Optimal statistical decisions", Mc Graw-Hill Inc.
10. Dey, D.K., Ghosh, M. and Sriniva, S., (1987), "Simultaneous estimation of parameters under entropy Loss", Journal statistical Plan. And Infer. Vol.(15), pp 347-363.
11. Dey, S. and Maiti, S.S., (2011), "Bayesian Inference on the Shape parameter and future observation of exponentiated family of distributions", Journal of Probability and Statistics, Vol.(17), No.(10), pp 457-472.
12. Lanping Li, (2013), "Minimax Estimation of Parameter of Generalized Exponential Distribution under Square Log Error Loss and MLINEX Loss function", Research Journal of Mathematics and Statistics, Vol.(5), No.(3), pp 24-27.
13. Lindley, D.V., (1972), "Bayesian statistics a Review", Philadelphia Society for Industrial and Applied Mathematics.
14. Mood, A. ,Graybill, F.A. and Bose, D. , (1974), "Introduction to the theory of statistics", Mc Gram-Hill series in probability and statistics.
15. Saiful Islam, A.F.M., Roy, M. and Ali, M.M., (2004), "A Non-Linear exponential (NLINEX) Loss function in Bayesian", Journal of the Korean Data and information science society, Vol. (15), No. (4), pp 899-910.
16. Varian, H.R., (1975), "A Bayesian approach estate assessment", in studies in Bayesian Econometrics and statistics in Honour of Leonard J. sarage. eds. Stephen E. Fienberg Arnold Zellner. Amsterdam, North Holland, pp: 195-805.
17. Zellner, A., (1986), "Bayesian estimation & prediction Using Asymmetric loss function", Journal of American statistics Association, Vol. (81), No.(394), pp 446-451.



**Proposed Entropy Loss function and application to find
Bayesian estimator for Exponential distribution parameter**

Abstract:

The aim of this paper to find Bayes estimator under new loss function assemble between symmetric and asymmetric loss functions, namely, proposed entropy loss function, where this function that merge between entropy loss function and the squared Log error Loss function, which is quite asymmetric in nature. then comparison a the Bayes estimators of exponential distribution under the proposed function, whoever, loss functions ingredient for the proposed function the using a standard mean square error (MSE) and Bias quantity (M_{bias}), where the generation of the random data using the simulation for estimate exponential distribution parameters different sample sizes ($n=10,50,100$) and ($N=1000$), taking initial values for the parameters α_0, β_0 and initial value b , to get to estimator balanced add between two loss function ,moreover, the optimal sample size determination under proposed entropy loss function.

Key word/