مقارنة بين طريقة الامكان الاعظم واسلوب بيز لتقدير بعض نماذج عمليات بواسون غير المتجانسة

أ.م. إيمان حسن أحمد / كلية الادارة والاقتصاد / جامعة بغداد
الباحث / آيات صادق جعفر

تاريخ التقديم:2016/6/1
تاريخ القبول:2016/7/31

المستخلص :-

تعد عمليات بواسون غير المتجانسة احدى المواضيع الاحصائية التي اصبح لها اهمية في جميع العلوم ولها تطبيقات واسعة في مختلف المجالات كنظرية صفوف الانتظار والانظمة القابلة للاصلاح وانظمة الحاسوب والاتصالات ونظرية المعولية وغيرها ، كما تستخدم عمليات بواسون غير المتجانسة في نمذجة الظواهر التي تحدث بصورة غير ثابتة بمرور الزمن (الحوادث التي تتغير بتغير الزمن) .

تناول هذا البحث بعض المفاهيم الاساسية التي تتعلق بعمليات بواسون غير المتجانسة كما تم التطرق فيه الى نموذجين للعملية البواسونية غير المتجانسة والتي هي أنموذج قانون القوة (انموذج ويبل) وأنموذج $Musa-okumoto$ و لتقدير معلمات النماذج المذكورة اعلاه تم استخدام طريقة الإمكان الأعظم (ML) و أسلوب بيز في تقدير معالم النماذج المستخدمة في هذا البحث ولإيجاد الطريقة الامثل في التقدير تم اللجوء الى اسلوب المحاكاة حيث قمنا بأختيار اربعة حجوم للعينات (25 و 50 و 75 و 100) لبيان تأثير تغير حجوم العينات على تقدير المعالم وكذلك تم فرض اربعة قيم اولية لكل معلمة من معلمات نماذج البحث ومن اجل المقارنة بين الطرائق المستخدمة في التقدير تم الاعتماد على مقياس متوسط مربعات الخطأ حيث اشارت النتائج الى ان طريقة الامكان الاعظم هي الطريقة الامثل والاكفأ في التقدير حيث اعطت اقل متوسط مربعات خطأ .

المصطلحات الرئيسية للبحث/عمليات بواسون غير المتجانسة ، سلسلة ماركوف مونت كارلو ، خوارزمية متروبولس – هاستنكس .

*البحث مستل من رسالة ماجستير

1. المقدمة Introduction :-

تعتبر عمليات بواسون غير المتجانسة من المواضيع المهمة التي أصبح لها دور في التطور والتقدم العلمي والتكنولوجي .

وعمليات بواسون غير المتجانسة هي حالة عامة لعمليات بواسون المتجانسة حيث تكون عمليات بواسون غير متجانسة (Non Homogeneous Poisson Process) إذا كان المعدل الزمني لحدوث الحوادث (Rate of occurrence of events) $\lambda(t)$ يتغير بتغير الزمن (T) أما إذا كان المعدل الزمني لحدوث الحوادث $\lambda(t)$ لا يتغير بتغير الزمن (T) (أي إن $\lambda(t)$ ثابتة بتغير الزمن) فتسمى العملية البواسونية في هذه الحالة عملية بواسون المتجانسة (Homogeneous Poisson Process).

ونجد لهذا الموضوع أهمية كبيرة في مختلف العلوم وله تطبيقات واسعة في مختلف المجالات والظواهر المرتبطة بتغير الزمن ومن احدى أهم هذه التطبيقات نظرية الانتظار مثل عدد السيارات في نقطة تفتيش في طريق مرور معين أو عدد السيارات في ورشة للتصليح او عدد المكالمات الهاتفية التي تصل الى بدالة للهاتف أو عدد المرضى في مركز صحي معين أو عدد الزبائن في محل للمبيعات . إضافة إلى نظرية الانتظار نظرية المعولية أو نماذج أوقات الفشل للأنظمة القابلة للإصلاح مثال على ذلك عمل محركات السيارات والطائرات وأنظمة الحاسوب وغيرها من التطبيقات والأمثلة والظواهر التي يرتبط حدوثها مع تغير الزمن .

2. هدف البحث *objective of the Research*

هدف البحث هو تقدير معلمات بعض نماذج عمليات بواسون غير المتجانسة والتي تم التطرق لها في متن البحث بأستخدام طريقة الامكان الاعظم (ML) واسلوب بيز ثم اجراء المقارنة بين طريقتي التقدير التي تم استخدامها في البحث وتحديد الطريقة الامثل لتقدير معلمات النماذج ، ويتم ذلك من خلال استخدام مقياس متوسط مربعات الخطأ (MSE) بهدف الوصول الى افضل طريقة لتقدير معلمات النماذج المستخدمة في البحث .

3 . عملية بواسون غير المتجانسة

Non Homogeneous Poisson Process

يطلق على عملية العد $\{N(t), t > 0\}$عملية بواسون غير المتجانسة (NHPP) بدالة كثافة $\lambda(t)$ ، $t > 0$ أذا تحققت الشروط التالية [1] :-

(i) $N(0) = 0$

(ii) العملية $\{N(t), t > 0\}$ لها زيادات مستقلة وغير مستقرة .

(iii) $p\{N(t+h) - N(t) > 2\} = 0(h)$

(iv) $P\{N(t+h) - N(t) = 1\} = \lambda(t) + 0(h)$

حيث ان $0(h)$:- هي كمية تقترب من الصفر في الفترة الزمنية h .

وبذلك تكون العملية البواسونية $\{N(t), t > 0\}$ تتبع توزيع بواسون بدالة كتلة احتمالية هي [16] :-

$$P[N(b) - N(a) = n] = \frac{[\mu(t)^n] e^{-\mu(t)}}{n!} \quad ; \; n = 1,2,\ldots \qquad \ldots(1)$$

حيث ان:- $\mu(t)$ تمثل دالة القيمة المتوسطة ($Mean - value\ function$) ومعلمة العملية البواسونية غير المتجانسة وهو قابل للأشتقاق وكما يلي [6] :-

$$\lambda(t) = \frac{\partial \mu(t)}{dt}$$

حيث $\lambda(t)$:- تمثل المعدل الزمني للحدث $(Rate\ of\ occurrence)$ ويكون متغيرا بتغير الزمن .

وان العلاقة بين دالة القيمة المتوسطة ودالة المعدل الزمني هي [3] :-

$$\mu(t) = E[N(t)] = \int_0^t \lambda(u)du\,, \qquad t \geq o$$

4. النماذج *The Models*

هناك الكثير من الباحثين الذين استخدموا او اقترحوا اشكالا عدة من الدوال لعمليات بواسون غير المتجانسة (كمعدل زمني لحدوث الحوادث التي تعتمد على الزمن في حدوثها).
وسيتم تناول نموذجين من نماذج عمليات بواسون غير المتجانسة وهذه النماذج هي :-

4- 1. انموذج قانون القوة *Power Law Model*

تم اقتراح هذا النموذج في عام 1966 كدالة للمعدل الزمني للحوادث ويعرف هذا النموذج ايضا بأنموذج ويبل $(Weibull)$ [7] وتكون دالة الشدة لهذا النموذج كما في الشكل التالي [8] :-

$$.\lambda(t) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{t}{\beta}\right)^{(\alpha-1)} \quad , \ \alpha, \beta > 0 \quad , \ t \geq 0 \qquad \ldots(2)$$

وان دالة المتوسط للنموذج هي [5] :-

$$\mu(t) = \left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha} \qquad \ldots(3)$$

حيث ان :-

α : تمثل معلمة الشكل (Shape Parameter) .

β: تمثل معلمة القياس $(Scale\ \ Parameter)$.

وعند تعويض كل من دالة الشدة ودالة المتوسط لهذا النموذج في دالة الشدة الاحتمالية لعمليات بواسون غير المتجانسة نحصل على دالة بالشكل التالي :-

$$f_n(t) = \frac{(\alpha/\beta)\,(t/\beta)^{(\alpha-1)}\,([t/\beta]^{\alpha}\,)^{(n-1)}\,exp([-(t/\beta)]^{\alpha})}{\Gamma(n)} \qquad ;\ t>0$$

حيث يطلق على هذه الدالة توزيع كاما العام $(GGAM(n, \beta, \alpha))$ ومن خصائصه عندما $\beta = 1$ فأنه يتحول الى $\text{GAM}(n, \beta)$ اما عندما $n = 1$ فأنه يتحول الى $\text{Wei}(\alpha, \beta)$.

كما تجدر الاشارة الى ان لدالة الشدة في نموذج قانون القوة سلوك مختلف اعتمادا على معلمة الشكل α فاذا كانت $\alpha = 1$ فذلك مؤشر على ان المعدل الزمني للحالة هو كمية ثابتة ولا يتغير بتغير الزمن . اما اذا كانت α □ 1 فيدل ذلك على وجود زيادة في المعدل الزمني للحدث .
اما اذا كانت $\alpha<1$ فمعنى ذلك ان المعدل الزمني للاحداث في تناقص مع الزمن .

2-4 . أنموذج *Musa Okumoto*

في عام 1989 اقترح الباحثان $(Musa\ , Okumoto)$ هذا النموذج بمعلمتين [10] حيث ان دالة الشدة له :

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{t+\alpha} \qquad ;\ \alpha,\beta > 0\quad ,\ t \geq 0 \qquad \dots(4)$$

ودالة المتوسط للنموذج هي [5]

$$\mu(t) = \beta \log\left(1 + \frac{t}{\alpha}\right) \qquad \dots(5)$$

5 . طرائق التقدير *Methods of Estimation*

هناك العديد من الطرائق التي تم استخدامها من قبل الكثير من الباحثين [1] و[2] و[4] و[5] و[7] لتقدير معلمات نماذج عمليات بواسون غير المتجانسة سواء كانت طرق معلمية او لا معلمية او اسلوب بيز وغيرها الكثير من طرائق التقدير ، وفي هذا البحث سوف يتم استخدام طريقتين وهما طريقة الامكان الاعظم (Ml) و اسلوب بيز في تقدير معلمات النموذجين التي تم التطرق لهما .

1 – 5 . طريقة الامكان الاعظم

Method Of Maximum Likelihood

تعد هذه الطريقة احدى الطرائق الاكثر استخداما في تقدير معلمات نماذج عملية بواسون غير المتجانسة لما تمتلكه من خواص تميزها عن بقية الطرائق ومن هذه الخواص خاصية التقدير المتحيز بأقل تباين ممكن (Minimum Variance Unbiased estimators) وخاصية الثبات (invarianmt Property) ، ويمكن تعريف مقدرات هذه الطريقة بأنها قيم المعلمات التي تجعل دالة الامكان للمشاهدات في نهايتها العظمى . لتكن $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ مفردات عينة عشوائية بحجم (n) مسحوبة من مجتمع يمتلك دالة كثافة احتمالية معلومة فأن دالة التوزيع المشترك للمشاهدات هي كما يلي [2] -:

$$f_n(t_1,t_2,\dots,t_n) = \prod_{i=1}^{n} \lambda(t_i) e^{[-\mu(t_n)]} \qquad \dots(6)$$

5- 1 – 1 تقدير معلمات انموذج قانون القوة (انموذج ويبل) [4]

Estimation Parameter Of Power Law Model

ان دالة التوزيع المشترك لأزمنة الحدث $(t_1, t_2, t_3, \dots, t_n)$ لهذا النموذج هي -:

$$f_n(t_1,t_2,t_3,\dots,t_n) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{t_i}{\beta}\right)^{(\alpha-1)} exp[-\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha}] \dots(7)$$

$$f_n(t_1,t_2,t_3,\dots,t_n) = \frac{\alpha^n}{\beta^n} \left(\frac{t_1}{\beta}\right)^{(\alpha-1)} \dots \left(\frac{t_n}{\beta}\right)^{(\alpha-1)} exp\left[-\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i{}^{\alpha})}{(\beta^{\alpha})}\right] \dots(8)$$

بأخذ اللوغاريتم للمعادلة (8) نحصل على :-

$$Ln\ f_n(t_1,t_2,t_3,\dots,t_n) = n\,\mathrm{Ln}\alpha - n\,\mathrm{Ln}\beta + (\alpha-1)\,\mathrm{Ln}(\frac{t_1}{\beta}) + \dots + (\alpha-1)\,\mathrm{Ln}(\frac{t_n}{\beta}) - \frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i{}^{\alpha})}{(\beta^{\alpha})}$$

$$Ln\ f_n(t_1,t_2,t_3,\dots,t_n) = n\,Ln\alpha - n\,Ln\beta + \alpha\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Ln}(\frac{t_i}{\beta}) - \sum_{i=1}^{n}\mathrm{Ln}(\frac{t_i}{\beta}) - \frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i{}^{\alpha})}{(\beta^{\alpha})} \quad \dots(9)$$

ولتقدير المعلمة α نشتق بالنسبة للمعلمة α :-

$$\frac{\partial Ln\ f_n(t_1,t_2,t_3,\dots,t_n)}{\partial\alpha} = \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{t_i}{\beta}\right) - \frac{\sum_{i=1}^{n}t_i{}^{\alpha}\,lnt_i - (ln\beta)\sum_{i=1}^{n}t_i{}^{\alpha}}{\beta^{\alpha}}$$

$$\frac{n}{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^{n}t_i{}^{\alpha}\,lnt_i - (ln\beta)\sum_{i=1}^{n}t_i{}^{\alpha}}{\beta^{\alpha}} - \sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{t_i}{\beta}\right) \quad \dots(10)$$

بمساواة المعادلة (10) للصفر نحصل على :

$$\hat{\alpha} = \frac{n\hat{\beta}^{\hat{\alpha}}}{\sum_{i=1}^{n}t_i{}^{\hat{\alpha}}lnt_i - (ln\hat{\beta})\sum_{i=1}^{n}t_i{}^{\hat{\alpha}} - \hat{\beta}^{\hat{\alpha}}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{t_i}{\hat{\beta}}\right)} \quad \dots(11)$$

ولتقدير المعلمة β نشتق بالنسبة للمعلمة β :-

$$\frac{\partial Ln\ f_n(t_1,t_2,t_3,\dots,t_n)}{\partial\beta} = -\frac{n}{\beta} - \frac{n(\alpha-1)}{\beta} + \frac{\alpha\sum_{i=1}^{n}t_i{}^{\alpha}}{\beta^{\alpha+1}} \quad \dots(12)$$

بمساواة المعادلة (12) للصفر نحصل على :-

$$\frac{n}{\hat{\beta}} = \frac{\hat{\alpha}\sum_{i=1}^{n}t_i{}^{\hat{\alpha}}}{\hat{\beta}^{\hat{\alpha}+1}} - \frac{n(\hat{\alpha}-1)}{\hat{\beta}}$$

$$\therefore \hat{\beta} = \frac{n\hat{\beta}^{\hat{\alpha}+1}}{\hat{\alpha}\sum_{i=1}^{n}t_i{}^{\hat{\alpha}} - n\hat{\beta}^{\hat{\alpha}}(\hat{\alpha}-1)} \quad \dots(13)$$

2-1-5_تقدير معلمات انموذج ***Okumoto – Musa***

دالة التوزيع المشترك لأزمنة الحدث لهذا الانموذج هي كما يلي:

$$f_n = \beta^{n}\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i+\alpha}\right)\exp[-\beta\log(1+\frac{t_n}{\alpha})] \quad \dots(14)$$

بأخذ اللوغارتيم لطرفي الصيغة (14) : -

$$Ln\, f_n = n\, Ln\, \beta + \sum_{i=1}^{n} ln \frac{1}{t_i + \alpha} - \beta\, log(1 + \frac{t_n}{\alpha})$$

$$Lnf_n = n\, Ln\, \beta + \sum_{i=1}^{n} ln\, 1 - \sum_{i=1}^{n} ln\, (t_i + \alpha) - \beta\, log\left(\frac{\alpha + t_n}{\alpha}\right)$$

$$Ln\, f_n = n\, Ln\, \beta - \sum_{i=1}^{n} ln\, (t_i + \alpha) - \beta\, log(\alpha + t_n) + \beta\, log\alpha \quad ...(15)$$

لتقدير المعلمة α نشتق بالنسبة ل α

$$\frac{\partial\, \mathrm{Ln}\, f_n}{\partial \alpha} = -\sum_{i=1}^{n} ln\, (t_i + \alpha) - \beta \log(\alpha + t_n) + \frac{\beta}{\alpha} \quad ...(16)$$

نساوي المعادلة (16) الى الصفر

$$\frac{\hat{\beta}}{\hat{\alpha}} = \sum_{i=1}^{n} ln\, (t_i + \hat{\alpha}) + \hat{\beta} \log(\hat{\alpha} + t_n)$$

$$\hat{\alpha} = \frac{\hat{\beta}}{\sum_{i=1}^{n} ln\, (t_i + \hat{\alpha}) + \hat{\beta} \log(\hat{\alpha} + t_n)} \quad ...(17)$$

نشتق بالنسبة للمعلمة β

$$\frac{\partial\, Ln\, f_n}{\partial \beta} = \frac{n}{\beta} - log(\alpha + t_n) + log\alpha \quad ...(18)$$

نساوي المعادلة بالصفر

$$\frac{n}{\hat{\beta}} = \log(\hat{\alpha} + t_n) - log\hat{\alpha} \quad ...(19)$$

$$\hat{\beta} = \frac{n}{\log(\hat{\alpha} + t_n) - log\hat{\alpha}} \quad ...(20)$$

5 – 2 . اسلوب التقدير البيزي *Bayesian Estimation Approach*

يعتمد اسلوب بيز في التقدير على المعلومات الاولية حول المعلمات المراد تقديرها حيث يتم اعتبار المعلمات في اسلوب بيز على انها متغيرات عشوائية وليس كميات ثابتة كما هو الحال في الطرائق التقليدية للتقدير ، ويمكن صياغة هذه المعلومات الاولية للمعلمات على شكل دالة توزيع احتمالي تعرف بدالة الكثافة الاحتمالية الاولية (التوزيع السابق) *Prior Distribution* $P(\theta)$. اما معلومات مشاهدات العينة فتتمثل بدالة الامكان للمشاهدات $P(t|\theta)$ حيث يتم ربط هاتين الدالتين مع بعض للحصول على دالة تتضمن جميع المعلومات حول المشكلة والتي تعرف بالدالة الاحتمالية اللاحقة (التوزيع اللاحق) [9] .

حيث يمكن التعبير عن العلاقة بين التوزيع اللاحق والتوزيع السابق ودالة الامكان الاعظم لمشاهدات العينة كما في الشكل التالي :-

$$P(\theta|t)\alpha\, L(t|\theta)P(\theta)$$

حيث ان $P(\theta|t)$ تمثل التوزيع اللاحق للمعلمة (θ)

من العلاقة اعلاه يتضح ان التوزيع اللاحق هو عبارة عن حاصل ضرب دالة الامكان $P(t|\theta)$ في التوزيع السابق $P(\theta)$ ، الا انه في بعض الاحيان قد تواجهنا بعض الصعوبات في ايجاد التوزيعات اللاحقة فقد يتطلب ايجاد التوزيع اللاحق تكامل دوال عالية الابعاد (دوال ذات درجات عالية) لذلك تم اقتراح العديد من الاساليب القصيرة للتكامل المباشر الذي سهلت عملية ايجاد التوزيعات اللاحقة ، ومن اهم هذه الاساليب سلسلة ماركوف مونت كارلو *Markova Chain Monte Carlo (MCMC)* [13]

حيث تم استخدام هذه الطريقة من قبل الباحثين في بداية عام **1990** وتم تطبيقها على نطاق واسع لحل مسائل بيز حيث انها تعتمد على فكرة الحصول على عينة عشوائية من التوزيعات الشرطية للمعالم .

وان اكثر طرائق سلسلة ماركوف مونت كارلو (MCMC) استخداما هما خوارزمية معاينة جبس Gibbs sampling وخوارزمية *Metropolis − Hastings*

6. خوارزمية *Gibbs*

سميت خوارزمية **Gibbs** بهذا الاسم نسبة الى العالم J . W . Gibbs وان خوارزمية Gibbs حالة خاصة من خوارزمية *metropolis − Hastings* وانها عبارة عن خوارزمية تستخدم للحصول على سلسلة من العينات من التوزيع الاحتمالي المشترك حيث ان فكرة خوارزمية جبس هي تحديد التوزيعات الشرطية الكاملة لمعلمات النموذج والاستمرار بأجراء سحبات عشوائية من التوزيعات الشرطية الكاملة لحين الحصول على عينة كبيرة من هذه السحبات التي تقترب الى التوزيع اللاحق المشترك للمعلمات [13] .

6 - 1 مفهوم خوارزمية Gibbs *Concept of Gibbs Sampling*

لتوضيح خطوات معاينة **Gibbs** [12] نفرض ان لدينا نموذج يحتوي على p من المعلمات ونفرض اننا لدينا التوزيعات الشرطية كاملة حيث نفرض مجموعة من القيم الاولية ولتكن

$$\theta^0 = (\theta_1^0\,, \dots, \theta_p^0)$$

نضع **j = 0**
ثم نبدأ بالسحب كما يلي

$$(\theta_{i1} \sim p\,(\theta_1|\,\theta_2^0\,, \dots, \theta_p^0)$$

$$(\theta_{i2} \sim p\,(\theta_2|\,\theta_1^0\,,\theta_3^0\,, \dots, \theta_p^0)$$

..

$$(\theta_{ip} \sim p\,(\theta_p|\,\theta_2^0\,, \dots, \theta_{p-1}^0)$$

وبهذا اكتمل تكرارا لمعاينة جبس وعليه فقد تم الحصول على :-
$()\theta_1^1 , \dots , \theta_p^1$

نجعل j=j+1 ونعود الى الخطوة 3 وبعد تكرار الخطوات اعلاه m من المرات سوف يتم الحصول على
$\theta_1^m , \dots , \theta_p^m$

6-2 معاينة *Gibbs* لنماذج عملية بواسون غير المتجانسة

Gibbs Sampling For Non Homogeneous Poisson Process

6 – 2 – 1 انموذج قانون القوة (انموذج ويبل) *Power Law Model* [11]

ان من اهم متطلبات معاينة Gibbs وجود التوزيعات الشرطية الكاملة لمعالم النماذج وللحصول عليها يجب اولا ايجاد التوزيع اللاحق الذي يتم الحصول عليه نتيجة ضرب التوزيع السابق بدالة الامكان حيث يمكن التعبير عن دالة الامكان لهذا النموذج كما يأتي :-

$$L(t|\theta) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{(\alpha-1)} \exp[-\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha}]$$

اما بالنسبة للتوزيع السابق لمعالم هذا النموذج فسوف يتم اعتماد على ان التوزيع السابق لمعلمتي النموذج α و β هو التوزيع المنتظم **Uniform Distribution**

وكما ذكرنا اعلاه بعد ضرب دالة الامكان بدوال التوزيعات السابقة لمعالم النموذج نحصل على التوزيع اللاحق لهذا النموذج وكما يلي :-

$$P(\alpha,\beta\ |t) = \left(\frac{\alpha}{\beta^{\alpha}}\right)^n \left[\prod_{i=1}^{n} t_i^{\alpha-1}\right] e^{\left[-\left(\frac{t_n}{\beta}\right)^{\alpha}\right]} \quad \dots (21)$$

والان وبعد ان تم الحصول على التوزيع اللاحق لمعالم النموذج فالخطوة القادمة هي ايجاد التوزيعات الشرطية الكاملة لكل معلمة من معالم النموذج والتي هي كما في الشكل التالي

$$P(\alpha|\beta,t) = exp\left(n\log(\alpha) - n\alpha\log(\beta) + (\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\log(t_i) - \left(\frac{t_n}{\beta}\right)^{\alpha}\right) (22)$$

$$P(\beta|\alpha,t) = \exp\left(-n\alpha\log(\beta) - \left(\frac{t_n}{\beta}\right)^{\alpha}\right) \quad \dots (23)$$

6- 2 – 2 انموذج *Okumoto – Musa* [11]

ذكرنا سابقا من أجل أستخدام معاينة جبس يجب اولا ايجاد التوزيعات الشرطية الكاملة من خلال التوزيعات اللاحقة والتي يتم الحصول عليها من حاصل ضرب دالة الامكان بدوال التوزيعات السابقة حيث ان دالة الامكان لهذا النموذج هي كما في الشكل التالي :-

$$L(t|\theta) = \beta^n \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i + \alpha}\right) exp[-\beta\log(1 + \frac{t_n}{\alpha})]$$

وان التوزيع السابق لمعالم النموذج α وβ هو التوزيع المنتظم **Uniform Distribution** .

وبعد ضرب دالة الامكان للمشاهدات للنموذج مع التوزيع السابق لمعالم النموذج نحصل على التوزيع اللاحق و كما في الشكل الاتي :

$$P(\alpha,\beta\,|t) = \beta^{n}\Big(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i+\alpha}\Big)\, e^{\left(-\beta \log\left[1+\frac{t_n}{\alpha}\right]\right)} \qquad \ldots(24)$$

وبعد ان تم ايجاد التوزيع اللاحق لهذا النموذج يمكن الان الحصول على التوزيعات الشرطية الكاملة لكل معلمة من معالمات النموذج والتي يعبر عنها كما يلي :-

$$P(\alpha|\beta,t) = \exp\Big(-\sum_{i=1}^{n}\log(t_i+\alpha) - \beta \log\left(1+\frac{t_n}{\alpha}\right) \qquad \ldots(25)$$

$$P(\beta|\alpha,t) = exp\big(n\, log\,(\beta)\big) - \beta\, log\left(1+\frac{t_n}{\alpha}\right) \qquad \ldots(26)$$

وبعد الحصول على التوزيعات الشرطية الكاملة نلاحظ ان جميعها ليست توزيعات معروفة او واضحة لكي نحصل منها مباشرة على سحبات عشوائية بأستخدام خوارزمية معاينة **Gibbs** لذلك لابد من استخدام خوارزمية Metropolis – Hastings حيث انها مشابهة لخوارزمية Gibbs الا انها يمكن ان تستخدم للتوزيعات الشرطية التي تمتلك دوال غير معروفة .

7. خوارزمية Metropolis – Hastings

ان خوارزمية Metropolis – Hastings هي خوارزمية رفض - قبول حيث يتم اقتراح قيمة معينة وبعدها يتم اتخاذ القرار ولتوضيح عمل هذه الخوارزمية يتم اتباع الخطوات الاتية [15] :-

1- نأخذ قيمة اولية θ_j حيث $j = 0$

2- نولد قيمة مقترحة $\acute{\theta}$ تتبع التوزيع المقترح (نستخدم التوزيع السابق لكل نموذج)

3- احتمالية قبول الخوارزمية يتم التعبير عنه كمايلي

$$\mathbf{q}(\theta_j\,,\acute{\theta}_j) = \min\Big\{\frac{\psi_1(\acute{\theta}_j\ ,\theta_{-j})}{\psi_1(\theta_j\ ,\theta_{-j})}, 1\Big\} \qquad \ldots(27)$$

حيث ان البسط $\psi_1\left(\acute{\theta}_j\ ,\theta_{-j}\right)$ يمثل قيمة المعلمة المقترحة المعوضة في معادلة التوزيع الشرطي .

والمقام $\psi_1\left(\theta_j\ ,\theta_{-j}\right)$ يمثل القيمة المقدرة عن طريق معادلة التوزيع الشرطي .

4- نولد متغير عشوائي يتبع التوزيع المنتظم **u~ u(0,1)**

5- اذا كان $u \le q(\theta_j, \acute{\theta}_j)$ نجعل $\acute{\theta}_j = \theta_{j+1}$ اما اذا كان u اكبر من معيار القبول فنجعل $\theta_j = \theta_{j+1}$

6- نجعل **j = j+1** ثم نذهب الى الخطوة **1**

8. المحاكاة

ان لاستخدام اسلوب المحاكاة دور كبير ومهم في معالجة الكثير من المشاكل والمعضلات المعقدة في مختلف التطبيقات ومنها التطبيقات الاحصائية مما ادى الى اعتماد هذا الاسلوب من قبل العديد من الباحثين في الكثير من الدراسات التي تتناول سلوك نماذج او توزيعات احصائية معينة .

كما يتم تعريف المحاكاة على انها أسلوب رياضي لحل المشكلات المعقدة التي تبرز خلال المعاينة ، اذ يتم تصميم عينة من المجتمع النظري المفترض لتمثيل الظاهرة بدلا من المجتمع الحقيقي .

ولوجود العديد من المشكلات والنظريات الاحصائية التي ليس من السهل تحليلها بأستعمال البرهان الرياضي ، لذا يلجأ الباحثون الى ترجمة هذه النظريات على شكل مجتمعات حقيقية ثم يتم سحب عدد من العينات العشوائية منها ليتم التوصل الى الحلول المثلى لمثل هذه المشكلات. وبما ان الحصول على عينات من المجتمع الحقيقي المدروس يعد امرا في غاية الصعوبة لما يتطلبه من جهد ووقت وكلفة لذلك لجأ اغلب الباحثين الى استخدام اسلوب المحاكاة وخصوصا بعد التطور الكبير الذي حصل في مجال البرمجة والحاسوب الالكتروني .

اذ ان من المبادئ الاساسية للمحاكاة وضع برنامج بأستخدام الحاسبة الالكترونية لتمثيل او تقليد سلوك الواقع الحقيقي ، حيث في هذا البحث تم استعمال بعض الدوال الجاهزة والدوال البرمجية في برنامج الـ (Matlab 2014a) في توليد البيانات لغرض المقارنة بين الطرائق بأختلاف احجام العينات والقيم الافتراضية للمعلمات .

8 -1 **مراحل تجربة المحاكاة** : -

المرحلة الاولى :- وتتضمن هذه المرحلة مايلي :

1-اختيار احجام العينات حيث قمنا بأختيار اربعة حجوم للعينات وهي (25 ، 50 ، 75 ، 100) لبيان تأثير التغير الحاصل عي احجام العينة على تقدير معلمات النماذج المستخدمة .

2- اختيار القيم الافتراضية اذ قمنا بفرض اربع قيم لكل معلمة من معلمات النماذج التي تم استخدامها في هذا البحث والتي هي كما يلي :-

الجدول التالي يبين القيم الافتراضية للأنموذج الاول :-

جدول (1) يبين قيم المعلمات الافتراضية للانموذج الاول

	1	2	3	4
α	0.5	1	1.5	0.2
β	0.8	2	3.5	1

الجدول التالي يبين القيم الافتراضية للنموذج الثاني :-

جدول (2) يبين القيم الافتراضية لمعلمات الانموذج الثاني

	1	2	3	4
α	1.5	0.5	2.5	1
β	2	3	3.5	2

المرحلة الثانية:

يتم في هذه المرحلة توليد بيانات عشوائية تخضع لعمليات بواسون غير المتجانسة ويتم ذلك بأستخدام طريقة الرفض والقبول كونها احدى طرائق المحاكاة الاكثر استخداما في توليد المتغيرات العشوائية .
حيث ان الخوارزمية الخاصة بتوليد عمليات بواسون غير المتجانسة هي كما يلي [14] :-
الخطوة الاولى: نضع To =0 and T* =0
الخطوة الثانية: نولد متغير عشوائي يتبع التوزيع الاسي E بمتوسط $\bar{\lambda}$
الخطوة الثالثة: T* = T* + E
الخطوة الرابعة: نولد متغير عشوائي يتبع التوزيع المنتظم $U \sim U\ (0,1)$
الخطوة الخامسة : اذا $U > \lambda(T^*)/\bar{\lambda}$ نعود الى الخطوة الثانية والا نجعل $T_i = T^*$.

المرحلة الثالثة :- في هذه المرحلة يتم الحصول على تقديرات معلمات النماذج المستخدمة بأستخدام الطرائق التي تم التطرق اليها في الجانب النظري .
المرحلة الرابعة :- نقوم في هذه المرحلة بأجراء المقارنة بين طرائق التقدير بأستخدام معيار متوسط مربعات الخطأ لمعرفة الطريقة الامثل لتقدير معلمات كل نموذج من النماذج المستخدمة .
حيث ان هذا المقياس يشير الى مدى دقة التقدير وان تناقص قيمته تشير الى جودة ودقة المقدرات ويتم حسابه كما يلي :-

$$\text{MSE}\ (\hat{\theta}) = \frac{\sum_{i=1}^{R} (\hat{\theta} - \theta\ )^2}{R} \qquad \dots (28)$$

حيث $\hat{\theta}$ تمثل القيمة التقديرية للمعلمات
R : تمثل عدد التكرارات والتي هي 1000 تكرار
2-8 عرض وتحليل النتائج :- وسيتم عرض النتائج كما في الجداول التالية :

الجدول رقم (3) يبين متوسطات مربعات الخطأ لتقديرات المعلمات α و β للأنموذج الاول انموذج قانون القوة (انموذج Weibull) لتجربة مكررة 1000 مرة

N=25	alf =0.5	beta =0.8	alf =1	beta =2	alf =1.5	beta =3.5	alf =0.9	beta =1
Weibull	alf	beta	alf	beta	alf	beta	alf	beta
MLE	4.3243e-004	3.818e-006	6.42e-004	5.95e-006	8.334e-004	6.2082e-006	7.6538e-004	3.7246e-006
Bayes	0.1836	0.2062	0.2324	0.4840	0.2160	0.2041	0.2093	0.2849

N=50	alf =0.5	beta =0.8	alf =1	beta =2	alf =1.5	beta =3.5	alf =0.9	beta =1
Weibull	alf	beta	alf	beta	alf	beta	alf	beta
MLE	4.0445e-004	3.975e-006	4.13e-004	1.74e-006	4.133e-004	2.8720e-006	4.7436e-004	3.8152e-006
Bayes	0.1486	0.1862	0.2032	0.7387	0.2240	0.4149	0.2082	0.1985

N=75	alf =0.5	beta =0.8	alf =1	beta =2	alf =1.5	beta =3.5	alf =0.9	beta =1
Weibull	alf	beta	alf	beta	alf	beta	alf	beta
MLE	3.9797e-004	4.915e-006	4.36e-004	3.01e-006	5.047e-004	8.8550e-007	3.9796e-004	4.7312e-006
Bayes	0.1796	0.1786	0.1780	0.4548	0.2037	0.3123	0.1578	0.2698

N=100	alf =0.5	beta =0.8	alf =1	beta =2	alf =1.5	beta =3.5	alf =0.9	beta =1
Weibull	alf	beta	alf	beta	alf	beta	alf	beta
MLE	3.9682e-004	4.004e-006	3.13e-004	3.59e-006	1.652e-004	3.1233e-006	3.7395e-004	4.4016e-006
Bayes	0.1720	0.1796	0.1659	0.3818	0.1835	0.1628	0.1435	0.2373

من الجدول رقم (3) الخاص بقيم متوسطات مربعات الخطأ لتقديرات معلمات الأنموذج الاول α و β نجد ان متوسطات مربعات الخطأ لطريقة الامكان الاعظم لمعلمتي النموذج المراد تقديرهما اصغر من متوسطات مربعات الخطأ للطريقة البيزية منها نستنتج ان طريقة الامكان الاعظم هي الافضل والاكفأ في تقدير معلمات النموذج الاول (انموذج ويبل) ولكافة احجام العينات التي تم فرضها والتي هي (25 ، 50 ، 75 ، 100) .

جدول رقم (4) يبين متوسطات مربعات الخطأ لتقديرات المعلمات α و β للأنموذج الثاني (انموذج Musa Okumoto) لتجربة مكررة 1000 مرة

N=25	alf =1.5	beta =2	alf =0.5	beta =3	alf =2.5	beta =3.5	alf =1	beta =2
MU-OKU	alf	beta	alf	beta	alf	beta	alf	beta
MLE	2.519e-013	2.479e-010	2.17e-013	9.665e-011	1.639e-013	6.1230-011	2.68e-013	1.351e-010
Bayes	1.0338	2.3600	0.0652	6.2883	4.1747	9.1101	0.3564	2.4166

N=50	alf =1.5	beta =2	alf =0.5	beta =3	alf =2.5	beta =3.5	alf =1	beta =2
MU-OKU	alf	beta	alf	beta	alf	beta	alf	beta
MLE	2.328e-013	3.085e-010	2.88e-013	4.501e-010	2.57e-013	3.669e-010	2.31e-013	4.28e-010
Bayes	1.0423	2.1511	0.0820	6.2689	3.8873	9.0861	0.3442	2.4053

N=75	alf =1.5	beta =2	alf =0.5	beta =3	alf =2.5	beta =3.5	alf =1	beta =2
MU-OKU	alf	beta	alf	beta	alf	beta	alf	beta
MLE	2.817e-013	8.697e-010	2.68e-013	8.527e-010	2.77e-013	1.531e-009	2.59e-013	8.38e-010
Bayes	1.1118	2.3659	0.0914	6.1810	4.0029	9.0146	0.2950	2.3862

N=100	alf =1.5	beta =2	alf =0.5	beta =3	alf =2.5	beta =3.5	alf =1	beta =2
MU-OKU	alf	beta	alf	beta	alf	beta	alf	beta
MLE	2.405e-013	1.462e-009	2.35e-013	1.868e-009	2.447e-013	1.195e-009	2.77e-013	2.733e-009
Bayes	1.1295	2.3632	0.0856	6.2869	4.1626	9.1763	0.3494	2.3848

من الجدول رقم (4) والذي يبين قيم متوسطات مربعات الخطأ لتقديرات معلمات الانموذج الثاني نلاحظ ان متوسطات مربعات الخطأ لمقدرات معالم النموذج بأستخدام طريقة الامكان الاعظم اصغر من متوسطات مربعات الخطأ للطريقة البيزية وذلك يدل على ان طريقة الامكان الاعظم هي الاكفأ في تقدير معلمات النموذج الثاني ولجميع حجوم العينات المفروضة .

9- الاستنتاجات والتوصيات :-

9-1 الاستنتاجات :-

بعد اجراء تجارب المحاكاة تم التوصل الى مايلي :-

من خلال قيم متوسط مربعات الخطأ ولجميع حجوم العينات التي تم فرضها (25 ، 50 ، 75 ، 100) نلاحظ ان طريقة الامكان الاعظم هي الافضل والاكفأ في تقدير معلمات الانموذجين الاول والثاني حيث اعطت اقل متوسط مربعات خطأ مقارنة مع الطريقة البيزية .

9 – 2 التوصيات :-

1- توصي الباحثة بأستخدام طريقة الامكان الاعظم في تقدير معلمات نماذج عمليات بواسون غير المتجانسة لما اعطته من كفاءة عالية ومرونة في التقدير .
2- التعمق اكثر في دراسة نماذج اخرى كمعدلات زمنية لعمليات بواسون غير المتجانسة .
3- توصي الباحثة باستخدام طرائق اخرى لتقدير معلمات دوال المعدل الزمني لعمليات بواسون غير المتجانسة كطرائق بيز الحصين .

المصادر:-

1-الحمداني، علي بندر ، 2009 م ، "مقارنة تقديرات طريقتي (ML, WLS) بعض نماذج عمليات بواسون غير المتجانسة " ، رسالة ماجستير في الإحصاء، كلية الإدارة والاقتصاد، جامعة بغداد.
2-الخياط ، باسل يونس ، وسليمان ، مثنى صبحي ، 2007م ، " تحليل احصائي للعملية البواسونية غير المتجانسة الموصوفة بعملية ويبل مع تطبيق " ، المجلة العراقية للعلوم الاحصائية ، العدد 12 ، المجلد 7 ، رقم الصفحة 34-55 .
3-شبيب ، هناء سعد ، 2008 م ، " تقدير المعدل الزمني للعمليات النقطية بأستخدام عمليات بواسون غير المتجانسة " ، رسالة ماجستير في الاحصاء ، كلية الادارة والاقتصاد ، الجامعة المستنصرية .
4-لازم ، جاسم حسن ، 2007م ، " مقارنة طرائق دالة الشدة لعمليات بواسون غير المتجانسة " ، رسالة ماجستير في الاحصاء ، كلية الادارة والاقتصاد ، جامعة بغداد .

5- **Achcar , Jorge A. , Barrios , Juan M. , and Rodrigues , Eliane R. , 2012 , " Comparing The Adequacy Of Some Non-Homogeneous Poisson Models To Estimate Ozone Exceedances in Mexico City " , Journal of Environmental Protection , page 1213-1227.**
6- **Achcar , Jorge A. , Hotta , Luizk , and Vicini , rend L. , 2012 , " Non-Homogeneous Poisson Processes Applied To count Data : A Bayesian Approach Considering Different Prior Distributions " , Journal of Environmental Protection , page 1336-1345 .**
7- **Achcar , Jorge A. , Rodrigues , Eliane R. , and Tzintzun , Guadalupe , 2007 , " Some Non-Homogeneous Poisson Models With Multiple Chang Points To Study The Behaviour Of The Number Of Ozone Exceedances in Mexico City " , Preliminates del Institutode Matematicas , UNAM , NO. 893.**

8- **Bar-Lev , Shaulk , Lavi , Idit , and Reiser ,Benjamin , 1991 , " Bayesian Inference For The Power Law Process " , Ann.Inst. Statist. Math. , Volume 44 , No.4 , page 623-639.**
9- **Ghosh , Jayantak , Delampady , Mohan , Samanta , Tapas , 2006 , " An Introduction to Bayesian Analysis Theory and Method " Springer .**
10- **Musa J. , D. and Okumoto K. , 1984 , " Alogarithmc Poisson Execution Time Model For Software Reliability Measurement " , proceeding of seventh International conference on software Engineering , Orlando , page 230-238 .**
11- **Rodrigues , Eliane R. , Achcar , Jorge A. , and Jara-Ettinger , Julian , 2011 , " A Gibbs Sampling Algorithm To Estimate The Occurrence Of Ozone Exceedances In Mexico City " In.D. popovic , Ed. , Air Quality. Models and Applications , in Iech open Access publishers , page 131-150 .**
12- **Scoollnik , David P.M , (1996) , " An Introduction to Markov Chain Monte Carlo Methods And Their Actuarial Applications " Department of Mathematics and Statistics University of Calgary .**
13- **Walsh B. , 2002 , " Markov Chain Monte Carlo And Gibbs sampling " www.maths.surrey.ac.uk / personal / st / s.Brooks/mcmc/ p.d.f .**
14- **Weron , Rafal , Burnecki , Krzysztof and Hardle , Wolfgang , " An Introduction to Simulation of Risk Processes " Hugo steinhaus Center for Stochastic Methods , Institute of Mathematics , Wroclaw University of Technology .**
15- **Yildirim , Ilker, 2012 , " Bayesian Inference : Metropolis – Hastings Sampling " , Department of Brain and Cognitive Sciences , University Of Rochester .**
16- **Zhao , Wenbiao, and Mettas , Adamantion, 2005 , " Modeling And Analysis Of Repairable Systems With General Repair " , www.reliasft.com / pubs/m07B.p.d.f .**

A Comparison Between Maximum Likelihood Method And Bayesian Method For Estimating Some Non-Homogeneous Poisson Processes Models

Abstract

The Non - Homogeneous Poisson process is considered as one of the statistical subjects which had an importance in other sciences and a large application in different areas as waiting raws and rectifiable systems method , computer and communication systems and the theory of reliability and many other, also it used in modeling the phenomenon that occurred by unfixed way over time (all events that changed by time).

This research deals with some of the basic concepts that are related to the Non - Homogeneous Poisson process , This research carried out two models of the Non - Homogeneous Poisson process which are the power law model , and Musa –okumto , to estimate the parameter of the model that mentioned above , It have been used maximum likelihood method and Bayesian method in the estimation of the parameter that is used in this Research . in order to find the best method in the estimation , we referring to simulation method in which we tested four size of samples (25, 50 , 75, 100) to illustrate the effect of changes in samples size on features estimation , Also we suppose four initial value for every parameter from research models parameter and for making a comparison between the used method in estimation as it depend on mean square error (MSE) . As the result referred to that maximum likelihood method is the best and efficient way in estimation in which it gives the minimum mean square error (MSE).

Key Words : Non-Homogeneous Poisson Processes , Markov Chain Monte Carlo , Metropolis – Hastings.