حل مسائل البرمجة الكسرية الخطية (LFP) بإستعمال طريقة تقييد دالة المقام ومقارنتها مع طريقة التحويلات الخطية

م.م. فاطمة عبد الباري حسين / رئاسة جامعة بغداد

المستخلص

يعد إستخدام الطرق والاساليب العلمية الحديثة من المواضيع المهمة في حل العديد من المشاكل التي تواجه بعض القطاعات منها الصناعية – الخدمية – الصحية ودائماً ما يلجأ الباحث الى أستعمال الطرائق العلمية الحديثة التي تمتاز بالدقة والوضوح والسرعة في الوصول الى الحل الأمثل وبالوقت نفسه تكون سهلة من حيث الفهم والتطبيق .

في هذا البحث تمت دراسة مقارنة بين طريقتين من طرائق الحل لنماذج مسألة البرمجة الكسرية الخطية (LFP) وهي : طريقة التحويلات الخطية لـ Charnes&Cooper وطريقة تقييد دالة المقام وذلك من خلال تطبيقهما على معمل المدافيء النفطية والطباخات الغازية ، حيث تبين بعد التوصل الى النتائج النهائية أن طريقة تقييد دالة المقام تعد الأفضل من حيث السهولة بالتطبيق وكذلك السرعة في خطوات الحل للوصول الى الحل الأمثل فضلاً عن كونها لا تحتاج الى إضافة متغير عشوائي ولا الى إضافة قيد جديد الى الأنموذج كما هي الحال بطريقة التحويلات الخطية لـ Charnes & Cooper

المصطلحات الرئيسية للبحث/ البرمجة الكسرية الخطية (LFP) – البرمجة الخطية (LP) – طريقة التحويلات الخطية لـ Charnes & Cooper – طريقة تقييد دالة المقام – طريقة السمبلكس – طريقة M العظمى .

مجلة العلوم
الاقتصادية والإدارية
العدد 94 المجلد 22
الصفحات 480-493

1- المقدمـــة

تعتبر الأساليب الكمية أو ما يعرف ببحوث العمليات من العلوم التطبيقية الحديثة في مجالات متعددة منها الادارة ، حيث أنها تعتمد على مجموعة من الطرائق والأساليب العلمية التي تساعد متخذ القرار على إختيار القرار الأمثل لحل المشكلة من بين الحلول المتعددة لها وذلك بالاستعانة بأدوات وأساليب كمية تساعد على إتخاذ القرار الأمثل ومن هذه الأدوات أسلوب البرمجة الكسرية الخطية (LFP) . [4]

تعد مسألة البرمجة الكسرية الخطية (LFP) من المسائل المهمة التي تعنى وتهتم بالعديد من المسائل منها تخطيط الانتاج ، الحسابات المالية ، التخطيط المؤسسي ، الرعاية الصحية ، وغيرها . [18]

وهي حالة خاصة من مسائل البرمجة الأمثلية حيث أن دالة الهدف فيها تكون نسبة بين دالتين خطيتين (بسط ومقام) وقيود المسألة عبارة عن معادلات ومتراجحات خطية ، وقد حظي هذا النوع من المسائل على الكثير من الأهتمام والبحث . [20]

نشأت (LFP) عندما ظهرت الحاجة الضرورية والملحة لتحسين الكفاءة لبعض الأنشطة مثلاً الأرباح المكتسبة من قبل شركة لكل وحدة واحدة من نفقات العمل وكذلك تكلفة الأنتاج لكل وحدة من السلع المنتجة ، واتخاذ القرار الأمثل كأن يكون تعظيم الأرباح أو تقليل التكاليف أو زيادة الطاقة الأنتاجية وذلك لأن القرار النهائي يتخذ على أثر قرارات سابقة للمشكلة ، الاشكالية الوحيدة في مسألة (LFP) هي أنه حتى الآن لم يتم تصنيع حزمة برامجيات خاصة ومتقدمة لحل وتدريس مسألة (LFP) . [7] ، [10]

هناك العديد من طرائق الحل لمسألة (LFP) من بينها طريقة التحويلات الخطية التي أقترحها وطورها كلاً من الباحثين Charnes & Cooper عام (1962-1973) . [8]،[9]

أما في العام (1964) قام الباحث Swarup بادخال طريقة خوارزمية النوع المبسط لحل مسائل البرمجة الكسرية الخطية والتي تعتمد على طريقة السمبلكس . [15]

في عام (1972) قام الباحثين Bitran & novae بإيجاد طريقة مقترحة لحل مسائل البرمجة الكسرية الخطية (LFP) وقد حضيت هذه الطريقة على قبول واسع في حينها . [12]

في العام (1987) استخدم عدد من الباحثين خوارزمية التقريب لحل مسائل البرمجة الكسرية الخطية (LFP) .[19]

أوجد كل من الباحثين Lai & Liu في العام (1999) الشرط الضروري والكافي في حل مسائل البرمجة الكسرية الخطية (LFP) .[13]

أقترح العالم S.F.Tantawy في عام (2008) طريقة تكرارية لحل مسائل (LFP) ، حيث بين بأن هذه الطريقة بالإمكان أن تستخدم في تحليل الحساسية عندما يتم إدخال معلمة عددية في معاملات دالة الهدف. [21]

في العام (2011) أستخدم الباحث رشيد بشير طريقة لاكرانج لحل مسائل البرمجة الكسرية الخطية (LFP) وتطويرها من خلال ايجاد صيغ رياضية يمكن بواسطتها ايجاد الحل مباشرة دون استخدام الاشتقاقات التفاضلية المعقدة .[5]

أما في العام (2013) قام كل من الباحثين احمد محمود وندى يوسف بايجاد الحل الامثل مسائل البرمجة الكسرية الخطية (LFP) باستعمال خوارزمية جينية مقترحة وتطبيقها على معمل الغزل والنسيج في الموصل .[1]

ولكن كل الطرائق التي تم ذكرها بعد تحليلها تبين أنها تمتاز بالأسهاب ومطولة جداً وتستغرق وقت طويل في الحل. [16]

هذا البحث يتناول استعمال طريقة تقييد دالة المقام على معمل المدافيء النفطية والطباخات الغازية ومقارنة النتائج مع نتائج الحل بطريقة التحويلات الخطية لــ Charnes & Cooper ، كما سيتم توضيحه في الجانب النظري والجانب التطبيقي .

2- مشكلة البحث

يسعى مدير المعمل الى رفع نسبة الانتاج نسبة لتكاليف الصنع في ظل الظروف الحالة المتمثلة بقلة الطلب على المدافيء في موسم الصيف وذلك من خلال تطبيق الطرائق العلمية الحديثة التي تساعد على اتخاذ القرار الصحيح .

3- الهدف من البحث

يهدف البحث الى ايجاد الحل الامثل لمسألة البرمجة الكسرية الخطية (LFP) وذلك بأستعمال طريقة تقييد دالة المقام وطريقة التحويلات الخطية لـ Charnes & Cooper ومقارنة نتائج الحل للطريقتين وبيان ايهما أفضل من حيث العمليات الحسابية وجهد الوقت .

4- الجانب النظري

4-1- الصيغة العامة لمسألة البرمجة الكسرية الخطية (L.F.P) [10]

وتكون بالشكل الآتي :

$$Q(X) = \frac{P\ (X)}{D\ (X)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} Pj\ Xj + P0}{\sum_{j=1}^{n} dj\ Xj + d0} \longrightarrow \text{Max (Min)} \qquad \dots (1)$$

Subject to

$$\sum_{j=1}^{n} aij\ Xj\ (\leq\ =\ \geq\ )\, bi \quad , i = 1,2,\dots,m \qquad \dots (2)$$

$$X_j \geq 0 \quad , j = 1,2,\dots,n \qquad \dots (3)$$

Where $D(x) > 0 \quad \forall\, X \in S$

$S = \{\, X \in R^n : Ax \leq b\ ,\ X \geq 0 \,\}$ مجموعة غير خالية ومقيدة

حيث أن

X_j : متجه متغيرات القرار لدالة الهدف وقيود النموذج الرياضي

P_j : معاملات متغيرات القرار في دالة هدف البسط

d_j : معاملات متغيرات القرار في دالة هدف المقام

P_0 : الحد المطلق في دالة هدف البسط

d_0 : الحد المطلق في دالة هدف المقام

a_{ij} : معاملات متغيرات القرار لقيود المسألة

b_i : القيمة المطلقة (الموارد المتاحة) لقيود المسألة

4-2- طريقة التحويلات الخطية [8]،[10]،[14] لـ Charnes & Cooper

في عام 1962 بين كل من العالمين A.Charnes & W.W.Cooper أن أي مسألة برمجة كسرية خطية (LFP) مع مجموعة محددة من الحلول الممكنة بالأمكان تحويلها الى مسألة برمجة خطية (L.P) من خلال الخطوات الآتية :

4-2-1- خطوات الحل

1- إدخال متغيرات جديدة يرمز لها بالرمز (t_j) للمسألة الكسرية الموضحة بالمعادلات (1) _ (3) وتكون بالصيغة

$$t_j = \frac{Xj}{D\ (X)} \quad , j = 1,2,\dots,n$$

حيث أن

$$t_0 = \frac{1}{D\ (X)}$$

وأن

$$D(X) = \sum_{j=1}^{n} dj\ Xj\ +\ d0 > 0$$

2- بإستخدام المتغيرات الجديدة (t_j) نستطيع كتابة دالة الهدف العامة Q(X) المبينة في المعادلة رقم (1) بالصيغة الآتية :

$$L(t) = \sum_{j=1}^{n} Pj\ tj \longrightarrow \text{Max (Min)}$$

3- لكي تكتمل العلاقة بين المتغيرات الأصلية (X_j) والمتغيرات الجديدة (t_j) يجب أن نضرب المعادلة $D(X) = \sum_{j=1}^{n} dj\ Xj + d0$ بالمقدار $\frac{1}{D\ (X)}$ وبعدها تضاف المعادلة كقيد إضافي للمسألة الخطية الجديدة ويكون بالصيغة الآتية :

$\sum_{j=0}^{n} dj\ tj = 1$

4- نضرب كل قيود المسألة الكسرية المشار اليها بالمعادلتين (2) و (3) بالمقدار $\frac{1}{D\ (X)}$ لنحصل على القيود الجديدة الآتية :

$-b_i\ t_0 + \sum_{j=1}^{n} aij\ tj\ (\leq\ =\ \geq\ )0 \quad , i = 1,2,\ldots,m$

$t_j \geq 0 \quad , j = 1,2,\ldots,n$

فتصبح المسألة الخطية بالصيغة الآتية :

$L(t) = \sum_{j=1}^{n} Pj\ tj \longrightarrow Max\ (\ Min\ ) \quad \ldots (4)$

Subject to

$-b_i\ t_0 + \sum_{j=1}^{n} aij\ tj\ (\leq\ =\ \geq\ )0 \quad , i = 1,2,\ldots,m \quad \ldots (5)$

$\sum_{j=0}^{n} dj\ tj = 1 \quad \ldots (6)$

$t_j \geq 0 \quad , j = 1,2,\ldots,n \quad \ldots (7)$

5- يتم حل المسألة الخطية المشار اليها بالمعادلات من (4) _ (7) بالطرائق الرياضية المختلفة الخاصة بحل مسائل البرمجة الخطية وإيجاد قيم كل من المتغيرات (t_j) ومن ثم إيجاد قيم المتغيرات الأصلية (X_j) من خلال المعادلة الآتية:

$$X_j = \frac{tj}{t_\circ}$$

4-3- طريقة تقييد دالة المقام [2]،[6]،[17]

تستخدم هذه الطريقة لحل مسألة البرمجة الكسرية الخطية (LFP) من خلال تكوين مسألتين خطيتين من المسألة الكسرية المعطاة الأولى لدالة هدف البسط مع قيود المسألة الكسرية والثانية لدالة هدف المقام ولنفس القيود ، وبإيجاد الحل الأمثل للمسألة الخطية الأولى يتم الأستفادة من جدول الحل الأمثل لها بجعله الجدول الأولي للمسألة الثانية والاستمرار بخطوات الحل المبين تفاصيلها لاحقاً لحين الوصول الى الحل الأمثل للمسألة الكسرية .

تمتاز هذه الطريقة بأنها تعتمد فقط وبشكل أساسي على الطريقة المبسطة (طريقة السمبلكس) .

4-3-1 خطوات الحل

1- نكون مسألتين خطيتين من المسألة الكسرية المعطاة والموضحة بالمعادلات من (1)_(3) نطلق على الأولى (N) أما المسألة الثانية (M) وكما مبين فيما يأتي :

(N) $\quad Max\ (\ Min\ )\ P(X) = \sum_{j=1}^{n} Pj\ Xj + P0$

Subject to

$\sum_{j=1}^{n} aij\ Xj\ (\leq\ =\ \geq\ )bi \quad , i = 1,2,\ldots,m$

$X_j \geq 0 \quad , j = 1,2,\ldots,n$

والمسألة الثانية

(M) Min (Max) $D(X) = \sum_{j=1}^{n} dj\ Xj + d0$

Subject to

$\sum_{j=1}^{n} aij\ Xj\ (\leq\ =\ \geq\ )bi$, i = 1,2,…,m

$X_j \geq 0$, j = 1,2,…,n

2- نجد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية الأولى (N) من خلال استخدام الطريقة المبسطة (طريقة السمبلكس) ، نفرض أن الحل الأمثل لهذه المسألة هو ($X_\circ$) وأن $MaxQ(X_\circ)=Q_\circ$

3- نستخدم جدول الحل الأمثل لمسألة الخطية الأولى (N) بوصفه جدول الحل الأولي للمسألة الخطية الثانية (M) ونستمر بالحل بطريقة السمبلكس لإيجاد سلسلة من الحلول الممكنة الأساسية المحسنة (X_n) للمسألة (M) وكذلك نجد قيم Q في كل خطوة .

4- إذا كانت $Q(X_k) \leq Q(X_{k+1})$ $\forall\ K = 0,1,2,\ldots,n-1$

وكانت $Q(X_n) \geq Q(X_n+1)$ for some n

نتوقف عن العمليات الحسابية ويصبح (X_n) هو الحل الأمثل للمسألة الكسرية Q ، وأن

$Max\ Q(X) = Q(X_n)$

5- إذا كانت $Q(X_k) \leq Q(X_{k+1})$ $\forall\ K = 0,1,2,\ldots,n$ و (X_{n+1}) هو الحل الأمثل للمسألة الخطية الثانية (M) لبعض n ، نتوقف عن العمليات الحسابية ويصبح (X_{n+1}) هو الحل الأمثل للمسألة الكسرية Q ، وأن

$Max\ Q(X) = Q(X_{n+1})$

4-4- طريقة المبسطة (طريقة السمبلكس)

تعد طريقة السمبلكس من أهم وأشمل طرق حل نماذج البرمجة الخطية لانه يمكن بواسطتها حل جميع نماذج البرمجة الخطية مهما كان عدد المتغيرات فيها [6].

ان الوصول الى الحل النهائي الأمثل للمشكلة المتمثل في تعظيم دالة الهدف أو تصغيره عند استخدام هذه الطريقة يتم على خطوات نظامية متتابعة تبدأ بالحل الممكن الأولي (An initial Basic feasible solution) مروراً بالحل الأفضل لغاية الوصول الى الحل الأمثل (optimal solution) [4].

حيث يتم تحويل الانموذج الرياضي الى الصيغة القانونية وذلك بإضافة المتغيرات الوهمية (slack Variable) ويرمز لها بالرمز (S_i) بعدها يصمم جدول السمبلكس حيث ان المرحلة الأولى منه تكون عن طريق تثبيت البيانات من الصيغة القياسية للأنموذج الرياضي الخطي ، ويتم المباشرة في الحل الممكن اذا استوفى هذا الجدول شرط $b_i \geq 0$ أي ان جميع المتغيرات الأساسية (S_i) غير سالبة ، وبعدها يتم تحديد المتغير الداخل للأساس والمتغير الخارج منه بأتباع عدد من الخطوات بالامكان الأطلاع عليها بمراجعة المصدر رقم [2] و [3] .

5-4- طريقة Big- M

تستخدم هذه الطريقة عندما تكون قيود المسألة الخطية مختلطة أي $\sum_{j=1}^{n} aij\ Xj\ (\leq\ =\ \geq\ )bi$

حيث يتم الأستعانة بمتغيرات أخرى تسمى المتغيرات الاصطناعية (Artificial Variable) ويرمز لها بالرمز (R_i) وتظهر في دالة الهدف بمعاملات M – اذا كانت دالة الهدف من نوع Max ومعاملات M + اذا كانت دالة الهدف من نوع Min ، ويتم تحديد المتغير الداخل للأساس بأخذ أكبر معامل موجب لـ M ، أما المتغير الخارج من الأساس فهو الذي يقابل أقل نسبة لقسمة عناصر عمود الحل على عناصر عمود المتغير

الالداخل في حال كون دالة الهدف من نوع Min ، والعكس في حالة كون دالة الهدف من نوع Min . ويستمر بخطوات الحل لحين التخلص من كل المتغيرات الاصطناعية .[2] ، [11]

5- الجانب التطبيقي

تم اخذ بيانات معمل المدافيء النفطية والطباخات الغازية / بغداد / الزعفرانية ولمدة اسبوع عمل ، حيث ان المعمل ينتج نوعين من المنتجات (المدافيء – الطباخات) بأستعمال ثلاثة عناصر انتاجية هي (المواد الأولية – اليد العاملة – ساعات العمل) والمتاح منها مبين في الجداول الاتي ، كما وان هناك تكلفة انتاج لكل وحدة منتجة وتكلفة اضافية ، علماً ان المعمل يعمل بنظام الشفت الواحد وان ساعات العمل اليومية (6 ساعات) أما اجمالي عدد العاملين في المعمل (95 عامل) موزعين كالآتي (55 عامل لانتاج المدافيء – 40 عامل لانتاج الطباخات) .

جدول رقم (5-1) المواد الاولية اللازمة لانتاج وحدة واحدة

ت	المادة الاولية	وحدة القياس	الكمية اللازمة لانتاج وحدة واحدة من		الكمية المتاحة
			المدافيء	الطباخات	
-1	طاقم مدفأة	عدد	1	-	200
-2	طاقم طباخ	عدد	-	1	110
-3	حديد ستنلس ستيل	كغم	1.3	2	600
-4	باودر طلاء	كغم	0.31	0.2	90

اما الوقت المستغرق لانتاج وحدة واحدة من كل منتج يتم حسابه وفقاً لمسار الانتاج المبين في الجدول الآتي :

جدول رقم (5-2) مسار الانتاج والوقت اللازم لانتاج وحدة واحدة

ت	نوع المنتج / مسار الأنتاج	وحدة القياس	المدفأة	الطباخ
-1	قسم الكابسات	ساعة	1	-
-2	قسم اللحام المنقط	ساعة	0.5	0.5
-3	قسم الطلاء	ساعة	2	0.25
-4	قسم التجميع	ساعة	1	0.75
-5	قسم الفحص النهائي والتغليف	ساعة	0.5	0.5
	مجموع الاوقات	ساعة	5	2

يتم حساب الوقت المتاح للعاملين في المعمل من خلال المعادلة الآتية :

الوقت المتاح = عدد العاملين × عدد ايام العمل × ساعات العمل في اليوم × السماحات

$= 0.85 \times 6 \times 5 \times 95$

= 2423 ساعة

أما كلفة التصنيع وسعر البيع لكل منتج مبينة في الجدول ادناه ، علماً ان هناك كلفة اضافية تشمل تجهيزات العاملين ووقود تبلغ قيمتها 49 الف دينار .

جدول رقم (3-5) الكلفة الكلية وسعر البيع لكل وحدة واحدة

ت	نوع المنتج	وحدة القياس	الكلفة الكلية بـ (الف دينار)	سعر البيع بـ (الف دينار)
1-	مدفأة	عدد	135	150
2-	طباخ	عدد	90	100

1-5- صياغة الإنموذج الرياضي للمسألة

نفرض أن

X_1 : يمثل عدد الوحدات المنتجة من المدافيء

X_2 : يمثل عدد الوحدات المنتجة من الطباخات

الغرض من هذا البحث هو تعظيم الكمية المنتجة نسبة الى التكاليف وهذا يعني أن دالة هدف البسط تمثل $MaxP(X) = X_1 + X_2$ ، أما دالة هدف المقام تمثل تقليل الكلفة $Min\ D(X) = 135\ X_1 + 90\ X_2 + 49$

وعليه فإن الأنموذج الرياضي لمسألة البرمجة الكسرية الخطية (LFP) يكون بالشكل الآتي :

$$Max\ Q(X) = \frac{X_1 + X_2}{135\ X_1 + 90\ X_2 + 49}$$

Subject to

$$\left.\begin{array}{rl} X_1 & \leq 200 \\ X_2 & \leq 110 \\ 1.3\ X_1 + 2\ X_2 & \leq 600 \\ 0.31\ X_1 + 0.2\ X_2 & \leq 90 \end{array}\right\} \text{قيود المواد الأولية}$$

$$5\ X_1 + 2\ X_2 \leq 2423 \quad \text{قيد ساعات العمل}$$

$$55\ X_1 + 40\ X_2 \leq 95 \quad \text{قيد اليد العاملة}$$

$$X_1 , X_2 \geq 0 \quad \text{قيد عدم السالبية}$$

2-5- حل الإنموذج الرياضي لمشكلة البحث بطريقة التحويلات الخطية لـ Charnes & Cooper

بعد تطبيق خطوات الحل بطريقة التحويلات الخطية والتي تم إيضاح خطواتها بالفقرة (2-4) على إنموذج مسألة البرمجة الكسرية الخطية الذي تم بناءه بالفقرة (1-5) ، تم التوصل الى إنموذج البرمجة الخطية (LPP) الآتي :

$$Max\ L(t) = t_1 + t_2$$

Subject to

$$\begin{array}{rl} t_1 - 200\ t_0 & \leq 0 \\ t_2 - 110\ t_0 & \leq 0 \\ 1.3\ t_1 + 2\ t_2 - 600\ t_0 & \leq 0 \\ 0.31\ t_1 + 0.2\ t_2 - 90\ t_0 & \leq 0 \\ 5\ t_1 + 2\ t_2 - 2423\ t_0 & \leq 0 \\ 55\ t_1 + 40\ t_2 - 95\ t_0 & \leq 0 \\ 135\ t_1 + 90\ t_2 + 49\ t_0 & = 1 \\ t_1 , t_2 ، t_0 & \geq 0 \end{array}$$

الآن نُكون جدول الحل الأولي بأستعمال طريقة السمبلكس لمسألة البرمجة الخطية أعلاه ، وكما في الشكل الآتي :

جدول رقم (5-2-1) الحل الأولي للمسألة الخطية بطريقة (Big - M)

		t_1	t_2	t_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	R	
P_j	Basis	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	R.H.S
0	S_1	1	0	-200	1	0	0	0	0	0	0	0
0	S_2	0	1	-110	0	1	0	0	0	0	0	0
0	S_3	1.3	2	-600	0	0	1	0	0	0	0	0
0	S_4	0.31	0.2	-90	0	0	0	1	0	0	0	0
0	S_5	5	2	-2423	0	0	0	0	1	0	0	0
0	S_6	55	40	-95	0	0	0	0	0	1	0	0
-M	R	135	90	49	0	0	0	0	0	0	1	1
	$L\text{-}P_j$	-1-135M	-1-90M	- M	0	0	0	0	0	0	0	- M

وبحل مسألة البرمجة الخطية في الجدول (5-2-1) بأستعمال طريقة (Big - M) ، نصل الى الحل الأمثل في الجدول التكراري الخامس وكما مبين في الجدول رقم (5-2-2) ادناه :

جدول رقم (5-2-2) الحل الأمثل للمسألة الخطية بطريقة (Big - M)

		t_1	t_2	t_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	R	
P_j	Basis	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	R.H.S
1	t_2	1.4767	1	0	0	0	0	0	0	0.0047	0.0090	0.0090
0	S_2	3.2331	0	0	0	0	1	0	0	-0.9466	0.4096	0.4096
0	S_3	24.0365	0	0	0	1	0	0	0	-5.1473	2.2655	2.2655
0	S_4	3.8681	0	0	0	0	0	1	0	-0.7716	0.3407	0.3407
0	S_5	105.7907	0	0	0	0	0	0	1	-20.7581	9.2036	9.2036
0	t_0	0.0428	0	1	0	0	0	0	0	-0.0086	0.0038	0.0038
0	S_1	9.5633	0	0	1	0	0	0	0	-1.7127	0.7612	0.7612
	$L\text{-}P_j$	0.4767	0	0	0	0	0	0	0	0.0047	0.0090	0.0090
	Big- M	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0

من الجدول رقم (5-2-2) أعلاه نلاحظ أن الحل الأمثل للمسألة بالشكل الآتي :

$t_0 = 0.0038$

$t_1 = 0$

$t_2 = 0.0090$

$L(t) = 0.0090$

من خلال النتائج المذكورة آنفاً نستطيع إيجاد الحل الأمثل لإنموذج المسألة الكسرية Q(X) بإستخدام العلاقة الرياضية الآتية :

$$X_j = \frac{tj}{t0} \quad , j = 1,2$$

$$X_1 = \frac{t1}{t0} \longrightarrow X_1 = 0$$

$$X_2 = \frac{t2}{t0} \longrightarrow X_2 = 2.3684$$

$$\longrightarrow \text{Max } Q(X) = \frac{X_1 + X_2}{135\,X_1 + 90\,X_2 + 49}$$

Max Q(X) = 2.3684/262.156

= 0.00903

3-5- حل الإنموذج الرياضي لمشكلة البحث باستخدام طريقة تقييد دالة المقام

بعد تطبيق خطوات الحل بطريقة تقييد دالة المقام والتي تم إيضاح خطواتها بالفقرة (3-4) على إنموذج مسألة البرمجة الكسرية الخطية الذي تم بناءه بالفقرة (5-1) ، تم الحصول على إنموذجين للبرمجة الخطية (LPP) هما (N) و(M) وكما مبين أدناه :

(N) $\quad$ $\text{Max } P(X) = X_1 + X_2$

Subject to

$X_1 \leq 200$
$X_2 \leq 110$
$1.3\ X_1 + 2\ X_2 \leq 600$
$0.31\ X_1 + 0.2\ X_2 \leq 90$
} قيود المواد الأولية

$55\ X_1 + 40\ X_2 \leq 95$ قيد اليد العاملة

$5\ X_1 + 2\ X_2 \leq 2423$ قيد ساعات العمل

$X_1 , X_2 \geq 0$ قيد عدم السالبية

(M) $\quad$ $\text{Min } D(X) = 135\ X_1 + 90\ X_2 + 49$

Subject to

$X_1 \leq 200$
$X_2 \leq 110$
$1.3\ X_1 + 2\ X_2 \leq 600$
$0.31\ X_1 + 0.2\ X_2 \leq 90$
} قيود المواد الأولية

$55\ X_1 + 40\ X_2 \leq 95$ قيد اليد العاملة

$5\ X_1 + 2\ X_2 \leq 2423$ قيد ساعات العمل

$X_1 , X_2 \geq 0$ قيد عدم السالبية

وبحل المسألة الخطية الأولى (N) بأستعمال طريقة السمبلكس ، حيث أن جدول الحل الأولي مبين فيما يأتي :

جدول رقم (3-5-1) الحل الأولي للمسألة الخطية الأولى (N) بطريقة السمبلكس

		X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6		
P_j	Basis	1	1	0	0	0	0	0	0	R.H.S	Ratio
0	S_1	1	0	1	0	0	0	0	0	200	200
0	S_2	0	1	0	1	0	0	0	0	110	-
0	S_3	1.3	2	0	0	1	0	0	0	600	461.53
0	S_4	0.31	0.2	0	0	0	1	0	0	90	290.32
0	S_5	55	40	0	0	0	0	1	0	95	1.73
0	S_6	5	2	0	0	0	0	0	1	2423	484.6
	$P-P_j$	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	

نلاحظ أن المتغير S_5 سيغادر الأساس والمتغير X_1 سيدخل الأساس ، وبالاستمرار بخطوات الحل بطريقة السمبلكس نصل الى جدول الحل الامثل لمسألة البرمجة الخطية الأولى (N) والذي يمثل الجدول التكراري الثالث وكما مبين فيما يأتي :

جدول رقم (5-3-2) الحل الأمثل للمسألة الخطية (N) الأولى بطريقة السمبلكس

		X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6		
P_j	Basis	1	1	0	0	0	0	0	0	R.H.S	Ratio
0	S_1	1	0	1	0	0	0	0	0	200	
0	S_2	-1.3750	0	0	1	0	0	-0.0250	0	107.6250	
0	S_3	-1.4500	0	0	0	1	0	-0.0500	0	595.2500	
0	S_4	0.0350	0	0	0	0	1	-0.0050	0	89.5250	
1	X_2	1.3750	1	0	0	0	0	0.0250	0	2.3750	
0	S_6	2.2500	0	0	0	0	0	-0.0500	1	2418.2500	
	$P-P_j$	0.3750	0	0	0	0	0	0.0250	0	2.3750	Q_0= 0.00904

الآن نعد أن الجدول رقم (5-3-2) هو جدول الحل الأولي للمسألة الخطية الثانية (M) وكما مبين في الجدول الآتي :

جدول رقم (5-3-3) الحل الأولي للمسألة الخطية الثانية (M) بطريقة السمبلكس

		X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6		
d_j	Basis	1	1	0	0	0	0	0	0	R.H.S	Ratio
0	S_1	1	0	1	0	0	0	0	0	200	-
0	S_2	-1.3750	0	0	1	0	0	-0.0250	0	107.6250	-
0	S_3	-1.4500	0	0	0	1	0	-0.0500	0	595.2500	-
0	S_4	0.0350	0	0	0	0	1	-0.0050	0	89.5250	-
90	X_2	1.3750	1	0	0	0	0	0.0250	0	2.3750	95
0	S_6	2.2500	0	0	0	0	0	-0.0500	1	2418.2500	-
	d_j - D	11.25	0	0	0	0	0	-2.25	0	262.75	Q_0= 0.00904

نلاحظ أن المتغير S_5 سيدخل الى الأساس والمتغير X_2 سيغادر الأساس ، ويكون الجدول التكراري الأول للمسألة الخطية الثانية (M) وكما مبين في الجدول الآتي :

جدول رقم (5-3-4) الجدول التكراري الأول للمسألة الخطية الثانية (M) بطريقة السمبلكس

		X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6		
d_j	Basis	1	1	0	0	0	0	0	0	R.H.S	Ratio
0	S_1	1	0	1	0	0	0	0	0	200	
0	S_2	0	1	0	1	0	0	0	0	110	
0	S_3	1.3	2	0	0	1	0	0	0	600	
0	S_4	0.31	0.2	0	0	0	1	0	0	90	
0	S_5	55	40	0	0	0	0	1	0	95	
0	S_6	5	2	0	0	0	0	0	1	2423	
	d_j - D	135	90	0	0	0	0	0	0	476.5	Q_0= 0

الآن نلاحظ أن $Q_0 > Q_1$ ومن خلال الخطوة رقم (4) من خطوات الحل بطريقة تقييد دالة المقام .
سنتوقف عن العمليات الحسابية ويصبح الحل الأمثل للمسألة الكسرية الخطية Q كما يأتي :

$X_1 = 0$
$X_2 = 2.3750$
$\text{Max } Q(X) = 0.00904$

أي أن قيمة دالة البسط $P(X) = 2.3750$
أما قيمة دالة المقام $D(X) = 262.75$
وأن نسبة كمية الانتاج للتكاليف $Q(X) = 0.00904$

6- الإستنتاجات والتوصيات

6-1- الإستنتاجات

1- من خلال النتائج التي تم التوصل اليها بالطريقتين تبين أن على صاحب المعمل أن ينتج في الوقت الراهن منتج واحد وهو الطباخات .

2- بعد حل الأنموذج الرياضي لمسألة البرمجة الكسرية الخطية (LFP) بطريقة التحويلات الخطية لـ Charnes & Cooper وجد أن هناك متغير إضافي وكذلك قيد إضافي في الأنموذج الخطي ، بينما في حالة تطبيق طريقة تقييد دالة المقام فإن الأمر لا يستدعي سوى فصل دالة الهدف الكسرية الى دالتين خطيتين وبنفس قيود المسألة الأصلية .

3- عند تطبيق طريقة التحويلات الخطية لـ Charnes & Cooper فإن متغيرات القرار (X_j) تتحول الى متغيرات أُخرى (t_j) وكذلك هناك متغير عشوائي (t_0) يضاف لكل من دالة الهدف وجميع قيود المسألة الخطية بحيث تتحول كل من دالة هدف وقيود المسألة الكسرية الى صيغة مختلفة تماماً عن صيغتها الأصلية ، بينما في تطبيق طريقة تقييد دالة المقام فإن متغيرات القرار وكذلك دالة الهدف للبسط والمقام تبقى كما هي عليه الأنموذج الكسري الأصلي ولكن يتم فصلهما الى إنموذجين خطين .

4- نلاحظ أن الوصول الى الحل الأمثل لمشكلة البحث من خلال تطبيق طريقة التحويلات الخطية لـ Charnes & Cooper تطلب خمسة جداول تكرارية وكذلك تطلب تطبيق عدد من العلاقات الرياضية لإيجاد قيمة دالة الهدف وقيم متغيرات القرار (X_j) ، بينما عند تطبيق طريقة تقييد دالة المقام فإن الوصول الى الحل الأمثل تطلب ثلاثة جداول تكرارية وقيمة دالة الهدف ومتغيرات القرار تستخرج بشكل مباشر من جدول الحل الأمثل .

5- تم التوصل الى نفس النتائج في الطريقتين وكما مبين في الجدول ادناه

ت	نوع المنتج	الرمز الرياضي	طريقة تقييد دالة المقام	طريقة التحويلات الخطية
1	المدفأة	X_1	0	0
2	الطباخ	X_2	2.3750	2.3684
نسبة كمية الانتاج الى التكاليف			0.00904	0.00903
عدد الجداول التكرارية في الحل			3	5

6- مما ذكر آنفاً فإن إستعمال طريقة تقييد دالة المقام تعد أفضل من طريقة التحويلات الخطية لـ Charnes & Cooper .

6-2- التوصيات

1- نوصي بإعداد حزم برامج مخصصة لحل مسائل البرمجة الكسرية الخطية من دون اللجوء لطرائق التحويلات الخطية .

7- المصـــادر :

أ. المصـــادر العربيـــة

1- السبعاوي، احمد محمود و العزيز ، ندى يوسف ، (2013) ، "خوارزمية جينية مقترحة لحل مسائل البرمجة الكسرية الخطية مع التطبيق" ، المجلة العراقية للعلوم الاحصائية ، العدد 25 .
2- الشـــمرتي ، حامـــد ســـعد نـــور ، (2010) ، "بحـــوث العمليـــات " مفهومـــاً وتطبيقـــاً "، الطبعة الاولى ، مكتبة الذاكرة ، العراق – بغداد .
3- الطراونـة ، محمد وعبيدات ، سليمان ، (2009) ، "مقدمـة في بحوث العمليات"، الطبعة الاولى ، دار المسيرة للنشر والتوزيع والطباعة ، عمان – الاردن .
4- المهتدي ، اكرم محمد عرفان، (2010) ، " الاساليب الكمية في اتخاذ القرارات الادارية (بحوث العمليات) " ، الطبعة الاولى ، دار صفاء للنشر والتوزيع ، عمان – الاردن .
5- رحيمـة ، رشيد بشير ، (2011) ، " صياغة وحل نماذج البرمجة الكسرية الخطية باستخدام طريقة لاكرانج المطورة " ، مجلة علوم ذي قار ، المجلد 2 ، العدد 4 .
6- شعبان ، عبد الكريم هـادي، (2008) ، " تطبيقات في الاساليب الكمية وبحوث العمليات مشاكل .... وحلول " ، الطبعة الأولى ، مطبعة الغري الحديثة، العراق – النجف الاشرف .
7- لايذ، واثق حياوي ، (2012) ، " إتخاذ القرارات ذات الدوال الكسرية بأستخدام طريقة برمجة الأهداف" ، مجلة الهندسة ، العدد 8 ، مجلد 18 .

ب. المصـــادر الأجنبيـــة

8- A.Charnes & W.W.Cooper , (1962) , " programming with linear fractional function " , Naval Research Logistics Quarlerly , VoL:9 , P.P:181-186 .
9- A.Charnes & W.W.Cooper , (1973) , " An explicit general solution in linear fractional programming " , Naval Research Logistics Quarlerly , No:3 , VoL:20 , P.P:449-467 .
10- E.B.Bajalinove, (2003) , " linear fractional programming : Theory, Methods , Applications and softwar , Kluwer Academic Publishers .
11- F.S.Hillier & G.J.Lieberman, (2001), " Introduction to Operations Research " , the MCGraw-Hill Companies .
12- G.R.Bitran and A.G.Novaes , (1972), "linear programming with a fractional objective function" University of Saopauio, Brazil, VoL:21, P.P:22-29 .
13- H.C.Lai & et al , (1999) , " Necessary and sufficient conditions for minmax fractional programming " , Jornal of Mathematical Analysis and Applications , VoL: 230 , NO:2 , P.P:311-328 .
14- I.M.Stancu-Minasian , (1997) , " fractional programming : Theory , Methods and Applications , Kluwer Academic Publishers .
15- K.Swarup , (1964) , " linear fractional function programming " , Operation Research , VoL:13 , NO:6 , P.P:1026-1036 .

16- M.B.Hasan & S.Acharjee , (2011) , " solving LFP by conerting into asingle LP " , International Journal of Operation Research , VoL:8 , NO:3 , P.P:1-14 .
17- P.Pandion & M.Jayalakshmi , (2013) , "on solving linear fractional programming problems " , Modern Applied Science , VoL:7 , NO:6 , P.P:90-100.
18- S.C.Sharma & A.Bansal, (2011) , " An Integer solution of fractional programming problem " , Gen.Math.Notes , VoL:4 , NO:2 , P.P:1-9 .
19- S.Hashizume & et al , (1987) , " Approximation algorithms for combinatorial fractional programming problems " , Mathematical programming , VoL:37 , NO:3 , P.P:255-267 .
20- S.Tantawy , (2008) , " A new procedure for solving linear fractional programming problem " , Mathematical and computer modeling , VoL:48 , P.P:969-973 .
21- S.Tantawy , (2008) , " An interactive method for solving linear fractional programming with sensitiving analysis " , Mathematical and computer modeling , VoL:13 , NO:8 , P.P:147-151 .

solving linear fractional programming problems (LFP) by Using denominator function restriction method and compare it with linear transformations method

Abstract

The use of modern scientific methods and techniques, is considered important topics to solve many of the problems which face some sector, including industrial, service and health. The researcher always intends to use modern methods characterized by accuracy, clarity and speed to reach the optimal solution and be easy at the same time in terms of understanding and application.

the research presented this comparison between the two methods of solution for linear fractional programming models which are linear transformation for Charnas & Cooper , and denominator function restriction method through applied on the oil heaters and gas cookers plant , where the show after reaching the final results that denominator function restriction method the foremost function is best in terms of easy application as well as the speed in the footsteps of the solution to reach the optimal solution as well as they don't need to add random variable and to add a new constraint to the model as is the case in the linear transformation method for Charnas & Cooper .

Key Words :- linear fractional programming (LFP) , linear programming (LP) , linear transformation for Charnas & Cooper , denominator function restriction method , simplex method , Big-M method .