# مقدر بيز لمعلمة القياس للتوزيع الطبيعي تحت افتراض توزيعات أولية مختلفة

أ.م.د. جنان عباس ناصر العبيدي / الكلية التقنية الإدارية / بغداد

**المستخلص**:

في هذا البحث ، استعملنا طريقة بيز لتقدير معلمة القياس للتوزيع الطبيعي.بافتراض ثلاثة أنواع مختلفة من التوزيعات عندما يكون التوزيع الأولي لمعلمة القياس توزيع جذر مربع معكوس كاما وعندما يكون التوزيع الأولي توزيع **non-informative** والتوزيع الأولي لعائلة الدالة المرافقة الطبيعية **the natural conjugate family of priors)** ، حيث اعتمد تقدير بيز على مربع دالة الخسارة،ومقارنته مع طرائق التقدير الكلاسيكية لتقدير معلمة القياس للتوزيع الطبيعي مثل طريقة الإمكان الأعظم وطريقة العزوم .عدة حالات لمعلمة القياس للتوزيع الطبيعي استخدمت لتوليد البيانات ولإحجام مختلفة من العينات ( صغيرة ، متوسطة ، كبيرة).استحصلت النتائج باستخدام أسلوب المحاكاة،بكتابة برامج باستخدام **MATLAB-R2008a**.تبين نتائج المحاكاة بان مقدر بيز عندما يكون التوزيع الأولي لمعلمة القياس توزيع مربع جذر توزيع كاما **(SRIG)** بالمعلمتين **(a=3,b=1)** عندما تكون $(\sigma = \theta = 0.5)$ ، وبالمعلمتين **(a=b=3)** عندما تكون $(\theta = 1)$ ،وبالمعلمتين **(a=2,b=3)** عندما تكون $(\theta = 2)$ ، وبالمعلمتين **(a=1,b=3)** عندما تكون $(\theta = 4)$ يعطي اصغر قيمة لمتوسط مربع الأخطاء ( **MSE**) و متوسط الخطأ النسبي المطلق **(MAPE)** ولكل إحجام العينات.

**المصطلحات الرئيسية للبحث**/ خصائص التوزيع الطبيعي،طريقة الإمكان الأعظم، طريقة العزوم، طريقة بيز ، التوزيع الأولي **SRIG**، التوزيع الأولي **non-informative** ،التوزيع الأولي لعائلة الدالة المرافقة الطبيعية، متوسط مربع الأخطاء **(MSE)** ،متوسط الخطأ النسبي المطلق **(MAPE)**.

مجلة العلوم
الاقتصادية والإدارية
العدد 92 المجلد 22
الصفحات 452ـ 473

## 1. المقدمة

يعد التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية الشائعة الاستخدام في النظرية الإحصائية وتطبيقاتها لان اغلب الظواهر الطبيعية تتبع هذا التوزيع.ونتناول في هذا البحث عدة طرائق لتقدير معلمة القياس (الانحراف المعياري) للتوزيع الطبيعي . وقد تناول العديد من الباحثين دراسة التوزيع الطبيعي من خلال طرائق التقدير لمعلمتي الموقع (المتوسط) والقياس (التباين) نذكر منهم بإيجاز تجنبا للإطالة :-

فقد استخدم الباحث Mitchell [3] عام (1994) أسلوب بيز لاشتقاق تقديرات المتوسط الشرطي والتباين الشرطي لمعلمة المتوسط للتوزيع الطبيعي، عندما تكون معلمة التباين معلومة وعلى افتراض إن التوزيع الأولي لمعلمة المتوسط يخضع للتوزيع الآسي المضاعف (Double exponential distribution). وقد بين تقريب التقدير بفترة لكل من المتوسط الشرطي والتباين الشرطي لمعلمة المتوسط بصيغة تقريبية.

وكذلك استخدم الباحث Zhang [13] عام (1997) أسلوب بيز لاشتقاق تقديرات بيز الخطية التجريبية لمعلمة الموقع (المتوسط ) لعائلة التوزيعات الطبيعية عندما تكون معلمة القياس معلومة ومساوية للواحد. وقد اعتمد على سرعة تقارب مقدر بيز الخطي من أفضل مقدر خطي تم افتراضه. فقد اشتق مقدرات بيز التجريبية العامة التي تكون اصغر الأعظم (Minmax) ومثلى بصورة محاذية. وتمت مقارنتها مع المقدرات المقلصة المستحصلة للباحث Stein عام 1956 والمقدرات المستحصلة من قبل الباحثين Stein و James عام 1961.وناقش اشتقاق تقدير دالة الكثافة المختلطة.

وتناول الباحث Bernado [2] عام (2006) قرار بيز لايجاد الحل النظري لنقطة تقدير التباين للتوزيع الطبيعي عندما يكون المتوسط للتوزيع الطبيعي غير معلوم ، وحدد التقدير بالاعتماد على دالة خسارة تربيعية قياسية ، ثم قارن هذا المقدر مع بقية المقدرات المستحصلة بالطرائق التقليدية. وتوصل إلى صيغة وحيدة لهذا المقدر الأمثل.

وطبق الباحث Oliphant [5] عام (2006) منظور بيز لتحديد ماهو معلوم حول المتوسط والتباين والانحراف المعياري المستحصل من مجموعة البيانات التي تمتلك متوسط وتباين مشترك . فقد استخدم أسلوب أعظم انتروبي (Maximum-entropy) لمناقشة مقدرات دالة الإمكان الأعظم ،والتي يجب إن تكون مماثلة للمقدرات المستحصلة من دالة أعظم انتروبي ولنفس مجموعة البيانات ،إذا كانت البيانات مستقلة Non- informative.فقد اشتق التوزيع الأولي (Gaussian) ومتطابقة التوزيع من التوزيع الطبيعي للمتوسط والتباين ،ثم استخدم قاعدة بيز لحساب دالة الكثافة الاحتمالية اللاحقة للمتوسط والانحراف المعياري، وكذلك دالة الكثافة الاحتمالية اللاحقة للمتوسط والتباين بدلالة الإحصاءات الكافية للمتوسط $(\bar{x})$ والتباين $(c)$ وبين بان المقدار $\sqrt{n-1}\left(\frac{\mu-\bar{x}}{\sqrt{c}}\right)$ يتوزع وفقا لتوزيع $t\text{-student}$ بدرجة حرية $df=(n-1)$ وان المقدار $\sigma\sqrt{\frac{2}{nc}}$ يتوزع وفقا لتوزيع $generalized-gammma$ بالمعلمتين $(c=-2, a=\frac{n-1}{2})$ وان المقدار $\frac{2}{nc}\sigma^2$ يتوزع وفقا لتوزيع $inverted-gammma$ بالمعلمة $(a=\frac{n-1}{2})$.

فقد قام الباحثين Venkatesan و Nathiya [9,8] عام (2008a , 2008b) بدراسة التوزيع اللاحق لمعلمتي التوزيع الطبيعي معلمة الموقع ومعلمة القياس بتوزيعات الأولية مقترحة بدلا من توزيع Non-informative أو Normal-Gamma. كالتوزيع الآسي المضاعف وتوزيع Half-Normal.فقد استعملا هذين التوزيعين لايجاد مقدرات معلمتي التوزيع الطبيعي بالاعتماد على شكل المنحي . وتوصلا إلى مقدر معلمة المتوسط عند استعمال التوزيع الآسي المضاعف يمتلك اقل تباين مقارنة مع مقدر معلمة المتوسط عند استعمال توزيع Half-Normal، بافتراض إن معلمة القياس تكون مساوية للصفر.

فقد قام الباحثين Venkatesan و Nathiya [10] عام (2010) بدراسة لتحسين مقدرات بيز الشرطية لمعلمة القياس (التباين) على افتراض إن التوزيع الأولي لمعلمة القياس يخضع للتوزيع الطبيعي .
ثم طور الباحثين Venkatesan و Nathiya [11] عام (2011) خوارزمية جديدة لتنفيذ التكامل العددي لمعلمة المتوسط ($\mu$) من المدى $-\infty < \mu < \infty$ ، و المنوال اللاحق (posterior Mode) إذ تم ايجاد تقديرات بيز لكلتا المعلمتين للمتتابعة الطبيعية بافتراض التوزيع Standard Normal-inverted gamma.وقد اعتمد معيار متوسط مربعات الخطأ (MSE) لمقارنة بين نتائج المحاكاة ولحالات مختلفة من التوزيع الطبيعي .
ثم درس الباحثين Venkatesan و Nathiya [12] عام (2011) تحليل بيز لايجاد التوزيع اللاحق لمتابعة تخضع للتوزيع الطبيعي وفقا لثلاثة حالات، الأولى عندما تكون معلمة الموقع (المتوسط) مجهولة ومعلمة القياس (التباين) معلومة ،على افتراض ان التوزيع الأولي لمعلمة الموقع يخضع للتوزيع الآسي المضاعف (Double exponential distribution). والثانية عندما تكون معلمة الموقع معلومة ومعلمة القياس مجهولة، على افتراض إن التوزيع الأولي لمعلمة القياس يخضع لتوزيع Half- normal.والثالثة عندما يكون كلا المعلمتين معلمة الموقع و معلمة القياس مجهولتين،على افتراض ان التوزيع الأولي يكون تقريب سلسلة تايلر مشتقة من التوزيع المشترك للتوزيع الأولي لمعلمة الموقع (Double exponential distribution) والتوزيع الأولي لمعلمة القياس (Half- normal distribution).فقد استخدما صيغة تقريب سلسلة تايلر لإيجاد المتوسط والتباين من التوزيع اللاحق .وقد استخدما معيار متوسط مربعات الخطأ و معيار متوسط مربعات الخطأ المطلق ومعيار جذر متوسط مربعات الخطأ، كمقياس لمقارنة نتائج المحاكاة لقيم مختلفة لمعلمات التوزيع الطبيعي ومعلمات التوزيع الأولي وفقا للحالات الثلاثة ولإحجام مختلفة من العينات.
وبذلك فان هدفنا في هذا البحث هو ايجاد أفضل طريقة تقدير لمعلمة القياس (الانحراف المعياري) للتوزيع الطبيعي، التي تصغر قيمة متوسط مربعات الخطأ (MSE) ومتوسط الخطأ المطلق (MAPE) المحسوب لمعلمة القياس.إذ استخدمت طريقتي الإمكان الأعظم والعزوم لغرض مقارنة مقدرات بيز عندما يكون التوزيع الأولي لمعلمة القياس توزيع جذر مربع معكوس كاما، وعندما يكون التوزيع الأولي لمعلمة القياس توزيع non-informative ،وعندما يكون التوزيع الأولي لمعلمة القياس للتوزيع الطبيعي يخضع لتوزيع الأولي لعائلة الدالة المرافقة الطبيعية، وذلك بالاعتماد على مربع دالة الخسارة لمقدربيز المقترح استخدامه كبديل عن طريقتي الكلاسيكية المتقدم ذكرهما.واعتمد المعيارين متوسط مربعات الخطأ (MSE) ومتوسط الخطأ النسبي المطلق (MAPE) لغرض المقارنة بين طرائق التقدير المستخدمة في البحث.وقد استخدمت عدة حالات من التوزيع الطبيعي لتوليد البيانات ولإحجام مختلفة من العينات ( صغيرة، متوسطة، كبيرة).وقد استخدام أسلوب المحاكاة للحصول على نتائج البحث بكتابة برامج باستخدام MATLAB-R2008a.

## 2. خواص التوزيع الطبيعي Properties of The Normal Distribution

يعد التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية الشائعة الاستخدام في النظرية الإحصائية وتطبيقاتها منها الاستدلال الإحصائي ويشمل التقدير واختبارات الفروض ، والاكثر استخداما في النواحي التطبيقية لان اغلب الظواهر تتبع هذا التوزيع، كما إن معظم التوزيعات يمكن تقريبها إلى هذا التوزيع .وان خصائص هذا التوزيع كالأتي [1,6,7]:

يقال إن المتغير العشوائي x يتوزع وفق التوزيع الطبيعي بالمعلمتين ($\mu$ , $\theta$) ،إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية ( pdf ) وفق الصيغة الآتية :

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\theta}\; e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\theta^2}} \qquad \text{for} \quad -\infty < x < \infty \qquad \ldots(1)$$

إذ إن $-\infty < \mu < \infty$ -تمثل معلمة الشكل (Shape parameter)،وان $\theta > 0$ تمثل معلمة القياس (Scale parameter)،وان $\pi = 3.1416$ .وتكون دالة التوزيع التراكمية (cdf) وفق الصيغة الآتية :

$$F(x) = \frac{1}{2}[1 + erf(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\theta})] \qquad -\infty < x < \infty \qquad ...(2)$$

**حيث إن $erf(x)$ دالة الخطاء التي تستخدم في تكامل التوزيع الطبيعي القياسي وتعرف كالأتي:**

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{t^2} dt$$

**إما الوسط الحسابي للتوزيع يكون مساوياً لــ $\mu$ ومساوي للوسيط وكذلك مساوياً للمنوال ،إي يكون وفق الصيغة الآتية:**

$$E(x) = \mu = Median = Mode \qquad ...(3)$$

**والتباين للتوزيع يكون وفق الصيغة الآتية:**

$$\sigma^2 = \theta^2 \qquad ...(4)$$

**والانحراف المعياري للتوزيع يكون وفق الصيغة الآتية:**

$$\sigma = \theta \qquad ...(5)$$

**وفي بحثنا هذا سيتم البحث عن أفضل طريقة تقدير لمعلمة القياس $(\theta)$ تحت افتراض بان قيمة المتوسط مساوي للصفر $(\mu = 0)$،وبذلك فان دالة الكثافة الاحتمالية ( pdf ) ستكون وفق الصيغة الآتية :**

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\theta}\, e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}} \qquad for \quad -\infty < x < \infty \qquad ...(6)$$

## 3. طرائق تقدير معلمة القياس Scale Parameter Estimation Methods

**في هذا المبحث،نستخدم عدة طرائق لتقدير معلمة القياس $(\theta)$ للتوزيع الطبيعي تكون كالأتي :**

### 3.1 طريقة الإمكان الأعظم Maximum likelihood method

**نعرف مفهوم تقدير الإمكان الأعظم للتوزيع الطبيعي،ليكن $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ عينة عشوائية بحجم (n) تكون مستقلة ومتطابقة التوزيع من التوزيع الطبيعي على وفق الصيغة (6)، وبذلك فان مقدر دالة الإمكان الأعظم (MLE) للتوزيع الطبيعي للمعلمة $\theta$ يكون على وفق الصيغة الآتية [1]:**

$$\hat{\theta}_{MLE} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}} \qquad ...(7)$$

### 3.2 طريقة العزوم Method of Moments (MM)

**تعد هذه الطريقة من الأساليب الشائعة الاستخدام في مجال تقدير المعلمات. فإذا كانت عينة عشوائية بحجم n لمجموعة من البيانات $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .يتم إيجاد عزوم توزيع المجتمع أولا ومن ثم مساواتها بعزوم العينة المناظرة لها. بجعل معلمة التوزيع الطبيعي دالة (احصاءة) من مشاهدات العينة . وبذلك فان مقدر العزم للمعلمة القياس $(\theta)$ وفقا للصيغة الآتية [1]:**

$$\hat{\theta}_{MM} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}} \qquad ...(8)$$

## 3.3 **طريقة تقدير بيز** Bayes Estimation Method

**لتكن $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ عينة عشوائية بحجم (n) بدالة كثافة احتمالية وفقا للصيغة (6) للتوزيع الطبيعي ، ودالة الإمكان لهذا التوزيع تكون وفق الصيغة (7).وان تقدير بيز لمعلمة التوزيع الطبيعي $\theta = \sigma$ عندما تكون قيمة المتوسط معلومة ومساوية للصفر $(\mu = 0)$ ، سيتم اشتقاقه بافتراض ثلاثة توزيعات أولية تخضع لها المعلمة $\theta$ كما سيرد ذكرها فيما يأتي [1].**

### 3.3.1 **تقدير بيز باستخدام التوزيع الأولي** SRIG **للمعلمة** $\theta$

**في هذا المبحث سيتم اشتقاق مقدر بيز للمعلمة $\theta$ ،عندما يكون التوزيع الأولي للمعلمة $\theta$ يخضع لتوزيع (SRIG) Square Root Inverted Gamma بدالة كثافة احتمالية ( pdf ) بالمعلمتين a و b المقترح استخدامه في التقدير يكون على وفق الصيغة الآتية [4] :**

$$P(\theta)\ \alpha\ \frac{2b^a}{\Gamma a}\,\theta^{-(2a+1)}\ \exp\left(-\frac{b}{\theta^2}\right) \quad \text{for} \quad a, b,\ \theta > 0 \qquad ...(9)$$

**إذ إن $\Gamma(.)$ تمثل دالة كاما. وبذلك فان التوزيع اللاحق للمعلمة $\theta$ بمعلومة البيانات المعطاة $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ يكون وفق الأتي :**

$$P(\theta \backslash x) = \frac{L(\underline{x} \backslash \theta)\ P(\theta)}{\int_{\theta} L(\underline{x} \backslash \theta)\ P(\theta)\, d\theta} \qquad ...(10)$$

**حيث إن $L(\underline{x} \backslash \theta)$ تكون على وفق الصيغة الآتية:-**

$$L(\underline{x} \backslash \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x;\theta) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\ \theta^{-n}\ \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2\theta^2}\right) \qquad ...(11)$$

**بتعويض الصيغة (9) والصيغة (11) في الصيغة (10)، نحصل على**

$$P(\theta \backslash x) = \frac{(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\ \theta^{-n}\ \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2\theta^2}\right)\left[\frac{2b^a}{\Gamma a}\ \theta^{-(2a+1)}\ \exp\left(-\frac{b}{\theta^2}\right)\right]}{\int_0^{\infty} (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\ \theta^{-n}\ \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2\theta^2}\right)\left[\frac{2b^a}{\Gamma a}\ \theta^{-(2a+1)}\ \exp\left(-\frac{b}{\theta^2}\right)\right] d\theta} \qquad ...(12)$$

$$P(\theta \backslash x) = \frac{\theta^{-(2a+n+1)} \exp(-\frac{1}{\theta^2}[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2} + b])}{\int_0^\infty \theta^{-(2a+n+1)} \exp(-\frac{1}{\theta^2}[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2} + b]) \quad d\theta} \qquad \ldots(13)$$

**لغرض تبسيط التكامل وتحويله إلى تكامل دالة pdf لجعله مساوي للواحد يتم ضرب التكامل بالصيغة (13) بمقدار مساوي لـ**

$$\left(\frac{2(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2} + b)^{(a+\frac{n}{2})}}{\Gamma(a+\frac{n}{2})}\right)\left(\frac{\Gamma(a+\frac{n}{2})}{2(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2} + b)^{(a+\frac{n}{2})}}\right)$$

**وان** $\Gamma(.)$ **تمثل دالة كاما، وبالتبسيط واعادة كتابة أس المعلمة** $\theta$ **للحصول على دالة pdf نحصل على**

$$P(\theta \backslash x) = \frac{\theta^{-(2(a+\frac{n}{2})+1)} \exp(-\frac{1}{\theta^2}[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2} + b])}{\left(\frac{\Gamma(a+\frac{n}{2})}{2(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2} + b)^{(a+\frac{n}{2})}}\right) A(x;\theta)} \qquad \ldots(14)$$

**إذ إن** $A(x;\theta)$ **دالة لتكامل مساوية تكون pdf لتوزيع SRIG بالمعلمتين** $(a_{(new)} = a + \frac{n}{2}, b_{(new)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2} + b)$ **وعلى وفق الصيغة أدناه**

$$A(x;\theta) = \int_0^\infty \frac{2(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2} + b)^{(a+\frac{n}{2})}}{\Gamma(a+\frac{n}{2})} \theta^{-(2(a+\frac{n}{2})+1)} \exp(-\frac{1}{\theta^2}(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2} + b)) \; d\theta = 1 \quad \ldots(15)$$

**وبذلك نحصل على التوزيع اللاحق للمعلمة** $\theta$ **بمعلومية البيانات** $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ **بالمعلمتين الجديدة** $(a_{(new)}, b_{(new)})$ **المبينة أدناه :**

$$P(\theta \backslash x) = \frac{2\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2} + b\right)^{(a+\frac{n}{2})}}{\Gamma(a+\frac{n}{2})} \theta^{-(2(a+\frac{n}{2})+1)} \exp\left(-\frac{1}{\theta^2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2} + b\right)\right) \text{ for } n, a, b, \theta > 0$$

...(16)

إي إن

$$P(\theta \backslash x) \sim \text{SRIG } \textbf{Distribution} \left( a_{(new)} = \left(\frac{2a+3n}{2}\right), b_{(new)} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2} + b\right) \right)$$

**مقدر بيز لـ $\theta$ باستخدام مربع دالة الخسارة (Squared Loss Function)** $\ell(\hat{\theta}-\theta) = (\hat{\theta}-\theta)^2$ ، وان دالة المخاطرة تكون مساوية لـ

$$R(\hat{\theta}-\theta) = \hat{\theta}^2 - 2\hat{\theta} E(\theta \backslash x) + E(\theta^2 \backslash x) \qquad ...(17)$$

**وبإيجاد المشتقة الأولى للصيغة (17) بالنسبة لـ $\hat{\theta}$ ومساواتها بالصفر $\left(\frac{\partial}{\partial \hat{\theta}} R(\hat{\theta}-\theta) = 0\right)$ ، نحصل على مقدر بيز للمعلمة $\theta$ عندما يكون التوزيع الأولي لها يخضع لتوزيع SRIG ويرمز له بـ $\hat{\theta}_{Bayes}$ وتكون وفق الصيغة الاتية:**

$$\hat{\theta}_{Bayes} = E(\theta \backslash x) = \int_0^\infty \theta\, P(\theta \backslash x)\, d\theta \qquad ...(18)$$

**بتعويض دالة التوزيع اللاحق للمعلمة $\theta$ المبينة بالصيغة (16) في الصيغة (18) نحصل على**

$$\hat{\theta}_{Bayes} = \int_0^\infty \theta \frac{2\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2} + b\right)^{(a+\frac{n}{2})}}{\Gamma(a+\frac{n}{2})} \theta^{-(2(a+\frac{n}{2})+1)} \exp\left(-\frac{1}{\theta^2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2} + b\right)\right) d\theta \qquad ...(19)$$

**لغرض تبسيط التكامل وتحويله إلى تكامل دالة pdf لجعله مساوي للواحد يتم ضرب التكامل في الصيغة (19) بمقدار مساوي لـ $\left( A_1 = \frac{\Gamma(a+\frac{n-1}{2})}{\Gamma(a+\frac{n-1}{2})} \right)$ ، اذ إن $\Gamma(.)$ تمثل دالة كاما. وبأضافة وطرح المقدار $(\frac{1}{2})$ لأس المقدار $\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2} + b\right)$ للحصول على تكامل دالة pdf ليكون مساوي للواحد . وبذلك ستكون $\hat{\theta}_{Bayes}$ مساوية لـ**

$$\hat{\theta}_{Bayes} = A1\int_0^\infty \frac{2\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2}+b\right)^{(a+\frac{n}{2})-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}}{\Gamma(a+\frac{n}{2})} \theta^{-(2(a+\frac{n-1}{2})+1)} \exp\left(-\frac{1}{\theta^2}\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2}+b\right)\right) d\theta$$

...(20)

وبالتبسيط نحصل على

$$\hat{\theta}_{Bayes} = \frac{\Gamma(a+\frac{n-1}{2})}{\Gamma(a+\frac{n}{2})}\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2}+b\right)^{\frac{1}{2}} \left(A2(x;\theta)\right) \quad ...(21)$$

إذ إن $A2(x;\theta)$ تكون مساوية لتكامل دالة **pdf** لتوزيع **SRIG**

بالمعلمتين الجديدة $\left(a_{(new)} = a+\frac{n-1}{2}, b_{(new)} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2}+b\right)$ ويكون مساوي للواحد كالاتي:

$$A2(x;\theta) = \int_0^\infty \frac{2\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2}+b\right)^{(a+\frac{n-1}{2})}}{\Gamma(a+\frac{n-1}{2})} \theta^{-(2(a+\frac{n-1}{2})+1)} \exp\left(-\frac{1}{\theta^2}\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2}+b\right)\right) d\theta = 1$$

...(22)

وبذلك فان مقدر بيز $(\hat{\theta}_{Bayes})$ يكون وفق الصيغة الآتية :

$$\hat{\theta}_{Bayes} = \frac{\Gamma(\frac{2a+n-1}{2})}{\Gamma(\frac{2a+n}{2})}\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2}+b\right)^{\frac{1}{2}} \quad ...(23)$$

### 3.3.2 تقدير بيز باستخدام التوزيع الأولي non-informative للمعلمة $\theta$

في هذا المبحث سيتم اشتقاق مقدر بيز للمعلمة $\theta$ ،عندما يكون التوزيع الأولي المفترض للمعلمة $\theta$ يخضع لتوزيع **non-informative** بالمعلمة c المقترح استخدامه في التقدير تكون على وفق الصيغة الآتية :

$$P_1(\theta) \propto \frac{1}{\theta^c} \qquad \text{for} \quad \theta, c > 0 \qquad ...(24)$$

وبذلك فان التوزيع اللاحق للمعلمة $\theta$ بمعلومة البيانات المعطاة $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ وفقا للصيغة (10) ، بتعويض الصيغة (11) والصيغة (24) في الصيغة (10)، نحصل على

$$P(\theta \backslash x)=\frac{(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\theta^{-n}\exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{2\theta^2}\right)[\theta^{-c}]}{\int_0^\infty (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\theta^{-n}\exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{2\theta^2}\right)[\theta^{-c}]d\theta} \quad ...(25)$$

$$P(\theta \backslash x)=\frac{\theta^{-n-c}\exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{2\theta^2}\right)}{\int_0^\infty \theta^{-n-c}\exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{2\theta^2}\right)d\theta} \quad ...(26)$$

**لغرض تبسيط التكامل وتحويله إلى تكامل دالة pdf لجعله مساوياً للواحد يتم ضرب التكامل بالصيغة (26) بمقدار مساوي لـ**

$$\left(\frac{2\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{2}\right)^{\left(\frac{n+c-1}{2}\right)}}{\Gamma\left(\frac{n+c-1}{2}\right)}\right)\left(\frac{\Gamma\left(\frac{n+c-1}{2}\right)}{2\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{2}\right)^{\left(\frac{n+c-1}{2}\right)}}\right)$$

**وان $\Gamma(.)$ تمثل دالة كاما، وبالتبسيط نحصل على**

$$P(\theta \backslash x)=\frac{\theta^{-\left(2\left(\frac{n+c-1}{2}\right)+1\right)}\, e^{-\frac{1}{\theta^2}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{2}\right]}}{\left(\frac{\Gamma\left(\frac{n+c-1}{2}\right)}{2\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{2}\right)^{\left(\frac{n+c-1}{2}\right)}}\right)B(x;\theta)} \quad ...(27)$$

**إذ إن $B(x;\theta)$ دالة مساوية لتكامل pdf لتوزيع SRIG بالمعلمتين الجديدة $\left(a=\frac{n+c-1}{2}, b=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{2}\right)$ إي إن يكون مساوي للواحد،**

$$B(x;\theta)=\int_0^{\infty}\frac{2\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{2}\right)^{\left(\frac{n+c-1}{2}\right)}}{\Gamma\left(\frac{n+c-1}{2}\right)}\,\theta^{-\left(2\left(\frac{n+c-1}{2}\right)+1\right)}\exp\left(-\frac{1}{\theta^2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{2}\right)\right)d\theta=1 \quad ...(28)$$

وبذلك نحصل على التوزيع اللاحق للمعلمة $\theta$ بمعلومة البيانات $\underline{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ بالمعلمتين الجديدة $(a,b)$ المبينة أدناه :

$$P(\theta\backslash x)=\frac{2\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{2}\right)^{\left(\frac{n+c-1}{2}\right)}}{\Gamma\left(\frac{n+c-1}{2}\right)}\,\theta^{-\left(2\left(\frac{n+c-1}{2}\right)+1\right)}\exp\left(-\frac{1}{\theta^2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{2}\right)\right)\quad \text{for}\quad n,c,\ \theta>0$$

...(29)

إي إن

$$P(\theta\backslash x)\sim \text{SRIG } \textbf{Distribution}\ \left(a=\left(\frac{n+c-1}{2}\right),\ b=\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{2}\right)\right)$$

مقدر بيز لـ $\theta$ باستخدام مربع دالة الخسارة $\ell(\hat{\theta}-\theta)=(\hat{\theta}-\theta)^2$ ، وان دالة المخاطرة وفقا للصيغة (17) .وبايجاد المشتقة الأولى للصيغة (17) بالنسبة لـ $\hat{\theta}$ ومساواتها بالصفر $\left(\frac{\partial}{\partial\hat{\theta}}R(\hat{\theta}-\theta)=0\right)$، نحصل على مقدر بيز للمعلمة $\theta$ عندما يكون التوزيع الأولي لها يخضع لتوزيع **non-informative** بالمعلمة **c** ويرمز له بـ $\hat{\theta}_{\text{Bayes2}}$ .بتعويض دالة التوزيع اللاحق للمعلمة $\theta$ المبينة بالصيغة (29) في الصيغة (18) نحصل على

$$\hat{\theta}_{\text{Bayes}}=\int_0^{\infty}\theta\ \frac{2\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{2}\right)^{\left(\frac{n+c-1}{2}\right)}}{\Gamma\left(\frac{n+c-1}{2}\right)}\,\theta^{-\left(2\left(\frac{n+c-1}{2}\right)+1\right)}\exp\left(-\frac{1}{\theta^2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{2}\right)\right)d\theta \quad ...(30)$$

لغرض تبسيط التكامل وتحويله إلى تكامل دالة **pdf** لجعله مساوياً للواحد يتم ضرب التكامل في الصيغة (30) بمقدار مساوي لـ $B1=\left(\frac{\Gamma\left(\frac{n+c-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+c-2}{2}\right)}\right)$، إذ إن $\Gamma(.)$ تمثل دالة كاما. وبإضافة وطرح المقدار $\left(\frac{1}{2}\right)$ لأس المقدار $\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{2}+b\right)$ للحصول على تكامل دالة **pdf** ليكون مساوي للواحد .وبذلك ستكون $\hat{\theta}_{\text{Bayes}}$ مساوية لـ

$$\hat{\theta}_{Bayes} = B1\int_0^{\infty} \frac{2\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2}+b\right)^{\left(\frac{n+c-1}{2}\right)-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3n+c-1}{2}\right)}\,\theta^{-\left(2\left(\frac{n+c-2}{2}\right)+1\right)}\exp\left(-\frac{1}{\theta^2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2}\right)\right)d\theta \quad ...(31)$$

وبالتبسيط نحصل على

$$\hat{\theta}_{Bayes2} = \frac{\Gamma\left(\frac{n+c-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+c-1}{2}\right)}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(B2(x;\theta)\right) \quad ...(32)$$

إذ إن $B2(x;\theta)$ تكـــون مســـاوية لتكامـــل دالـــة pdf لتوزيـــع SRIG بـــالمعلمتين الجديـــدة $\left(a_{(new)} = \frac{n+c-2}{2}, b_{(new)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2}\right)$ يكون مساوياً للواحد، إي إن

$$B2(x;\theta) = \int_0^{\infty} \frac{2\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2}\right)^{\left(\frac{n+c-2}{2}\right)}}{\Gamma\left(\frac{n+c-2}{2}\right)}\,\theta^{-\left(2\left(\frac{n+c-2}{2}\right)+1\right)}\exp\left(-\frac{1}{\theta^2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2}\right)\right)d\theta = 1 \quad ...(33)$$

وبذلك فان مقدر بيز $(\hat{\theta}_{Bayes2})$ يكون وفق الصيغة الآتية :

$$\hat{\theta}_{Bayes2} = \frac{\Gamma\left(\frac{n+c-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+c-1}{2}\right)}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad ...(34)$$

### 3.3.3 تقدير بيز باستخدام التوزيع natural conjugate family of priors للمعلمة $\theta$

في هذا المبحث نفترض بان التوزيع الأولي لمعلمة القياس $\theta$ يخضع للعائلة المرافقة الطبيعية للتوزيعات الأولية (the natural conjugate family of priors) يكون على وفق الصيغة الآتية :

$$P_2(\theta)\ \alpha\ \frac{1}{\theta^{\alpha+1}}\,e^{-\frac{\beta}{2\theta^2}} \qquad \text{for} \quad \theta,\alpha,\beta > 0 \quad ...(35)$$

وبذلك فان التوزيع اللاحق للمعلمة $\theta$ بمعلومة البيانات المعطاة $\underline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ وفقا للصيغة (10) ، بتعويض الصيغة (11) والصيغة (35) في الصيغة (10)، نحصل على

$$P(\theta \setminus x) = \frac{(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\theta^{-n}\exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2\theta^2}\right)\left[\frac{1}{\theta^{\alpha+1}}\exp\left(-\frac{\beta}{2\theta^2}\right)\right]}{\int_0^{\infty}(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\theta^{-n}\exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2\theta^2}\right)\left[\frac{1}{\theta^{\alpha+1}}\exp\left(-\frac{\beta}{2\theta^2}\right)\right]d\theta} \quad ...(36)$$

$$P(\theta \setminus x)=\frac{\theta^{-(n+\alpha+1)}\ \exp\left(-\frac{1}{\theta^{2}}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2+\beta}{2}\right]\right)}{\int_0^\infty \theta^{-(n+\alpha+1)}\ \exp\left(-\frac{1}{\theta^{2}}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2+\beta}{2}\right]\right)d\theta} \qquad ...(37)$$

**لغرض تبسيط التكامل وتحويله إلى تكامل دالة pdf لجعله مساوي للواحد يتم ضرب التكامل بالصيغة (37) بمقدار مساوي لـ**

$$\left(\frac{2\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2+\beta}{2}\right)^{\left(\frac{n+\alpha}{2}\right)}}{\Gamma\left(\frac{n+\alpha}{2}\right)}\right)\left(\frac{\Gamma\left(\frac{n+\alpha}{2}\right)}{2\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2+\beta}{2}\right)^{\left(\frac{n+\alpha}{2}\right)}}\right)$$

**وان** $\Gamma(.)$ **تمثل دالة كاما، وبالتبسيط نحصل على**

$$P(\theta \setminus x)=\frac{\theta^{-\left(2\left(\frac{n+\alpha}{2}\right)+1\right)}\ \exp\left(-\frac{1}{\theta^{2}}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2+\beta}{2}\right]\right)}{\left(\frac{\Gamma\left(\frac{n+\alpha}{2}\right)}{2\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2+\beta}{2}\right)^{\left(\frac{n+\alpha}{2}\right)}}\right) C(x;\theta)} \qquad ...(38)$$

**إذ إن** $C(x;\theta)$ **تكون مساوية لتكامل دالة pdf لتوزيع SRIG بالمعلمتين الجديدة** $\left(a_{(new)}=\frac{n+\alpha}{2},\ b_{(new)}=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2+\beta}{2}\right)$ **ويكون مساوي للواحد، إي إن**

$$C(x;\theta)=\int_0^\infty \frac{2\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2+\beta}{2}\right)^{\left(\frac{n+\alpha}{2}\right)}}{\Gamma\left(\frac{n+\alpha}{2}\right)}\ \theta^{-\left(2\left(\frac{n+\alpha}{2}\right)+1\right)}\ \exp\left(-\frac{1}{\theta^{2}}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2+\beta}{2}\right)\right)d\theta=1 \qquad ...(39)$$

**وبذلك نحصل على التوزيع اللاحق للمعلمة** $\theta$ **بمعلومة البيانات** $\underline{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ **بالمعلمتين الجديدة** $(a_{(new)}, b_{(new)})$ **المبينة أدناه :**

$$P(\theta \backslash x) = \frac{2\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \beta}{2}\right)^{\left(\frac{n+\alpha}{2}\right)}}{\Gamma\left(\frac{n+\alpha}{2}\right)} \theta^{-\left(2\left(\frac{n+\alpha}{2}\right)+1\right)} \exp\left(-\frac{1}{\theta^2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \beta}{2}\right)\right) \qquad \dots(40)$$

إي إن

$$P(\theta \backslash x) \sim \text{SRIG } \textbf{Distribution} \left( a = \left(\frac{n+\alpha}{2}\right), b = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \beta}{2}\right) \right)$$

**مقدر بيز لـ $\theta$ باستخدام مربع دالة الخسارة $\ell(\hat{\theta} - \theta) = (\hat{\theta} - \theta)^2$ ، وان دالة المخاطرة وفقا للصيغة (17) .وبإيجاد المشتقة الأولى للصيغة (17) بالنسبة لـ $\hat{\theta}$ ومساواتها بالصفر $\left(\frac{\partial}{\partial \hat{\theta}} R(\hat{\theta} - \theta) = 0\right)$ ، نحصل على مقدر بيز للمعلمة $\theta$ عندما يكون التوزيع الأولي لها يخضع للعائلة المرافقة الطبيعية للتوزيعات الأولية (the natural conjugate family of priors) ويرمز له بـ $\hat{\theta}_{Bayes3}$ .بتعويض دالة التوزيع اللاحق للمعلمة $\theta$ المبينة بالصيغة (40) في الصيغة (18) نحصل على**

$$\hat{\theta}_{Bayes} = \int_0^{\infty} \theta \frac{2\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \beta}{2}\right)^{\left(\frac{n+\alpha}{2}\right)}}{\Gamma\left(\frac{n+\alpha}{2}\right)} \theta^{-\left(2\left(\frac{n+\alpha}{2}\right)+1\right)} \exp\left(-\frac{1}{\theta^2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \beta}{2}\right)\right) d\theta \qquad \dots(41)$$

**لغرض تبسيط التكامل وتحويله إلى تكامل دالة pdf لجعله مساوي للواحد يتم ضرب التكامل في الصيغة (41) بمقدار مساوي لـ $\left( C1 = \frac{\Gamma\left(\frac{n+\alpha-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+\alpha-1}{2}\right)} \right)$ ،اذ إن $\Gamma(.)$ تمثل دالة كاما. وبأضافة وطرح المقدار $\left(\frac{1}{2}\right)$ لأس المقدار $\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \beta}{2}\right)$ للحصول على تكامل دالة pdf ليكون مساوي للواحد. وبذلك ستكون $\hat{\theta}_{Bayes}$ مساوية لـ**

$$\hat{\theta}_{Bayes3} = C1 \int_0^{\infty} \frac{2\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \beta}{2}\right)^{\left(\frac{3n+\alpha}{2}\right) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3n+\alpha}{2}\right)} \theta^{-\left(2\left(\frac{3n+\alpha}{2}\right)+1\right)} \exp\left(-\frac{1}{\theta^2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \beta}{2}\right)\right) d\theta$$

$\dots(42)$

**وبالتبسيط نحصل على**

$$\hat{\theta}_{Bayes3} = \frac{\Gamma\left(\frac{n+\alpha-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+\alpha}{2}\right)} \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \beta}{2}\right)^{\frac{1}{2}} (C2(x;\theta)) \qquad \dots(43)$$

إذ إن $C2(x;\theta)$ تكون مساوية لتكامل دالة **pdf** لتوزيع **SRIG**

ويكون مساوي للواحد، إي إن $(a_{(new)}=\frac{n+c-2}{2}, b_{(new)}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{2})$ بالمعلمتين الجديدة

$$C2(x;\theta)=\int_0^{\infty}\frac{2\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\beta}{2}\right)^{\left(\frac{n+\alpha-1}{2}\right)}}{\Gamma\left(\frac{n+\alpha-1}{2}\right)}\theta^{-(2(\frac{n+\alpha-1}{2})+1)}\exp\left(-\frac{1}{\theta^2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\beta}{2}\right)\right)d\theta=1$$

...(44)

وبذلك فان مقدر بيز $(\hat{\theta}_{Bayes})$ يكون وفق الصيغة الآتية :

$$\hat{\theta}_{Bayes3}=\frac{\Gamma\left(\frac{n+\alpha-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+\alpha}{2}\right)}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\beta}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad ...(45)$$

## 4. دراسة المحاكاة

تم استخدام المحاكاة لغرض الحصول على مقدرات بيز والمقدرات الكلاسيكية ( مقدرات الإمكان الأعظم، ومقدرات العزوم) لمعلمة القياس $(\theta)$ للتوزيع الطبيعي المتقدم ذكرها في المبحث (3)، فقد تم كتابة برامج البحث باستخدام برنامج الـ **MATLAB-R2008a**،وذلك بتوليد عينات عشوائية من التوزيع الطبيعي بالمعلمتين $(\mu=0,\sigma=\theta)$ ، فقد تم بناء التجارب وفق الفروض والمواصفات الاتية :

1. تم استخدام إحجام العينات **n= 15, 25, 50, 100**.
2. توليد بيانات للتوزيع الطبيعي بالمعلمتين $(\mu=0,\sigma=\theta)$ ، إي عندما تكون قيمة المتوسط مساوية للصفر إي $(\mu=0)$ ، بافتراض عدة قيم للمعلمة القياس $(\sigma=\theta)$ مساوية لـ$(\sigma=\theta=0.5,1,2,4)$.
3. نفترض ثلاث قيم لمعلمتي توزيع **SRIG** بـ $(a=1,2,3$ و $b=1,2,3)$ الذي يمثل التوزيع الأولي للمعلمة القياس $(\theta)$ للتوزيع الطبيعي.
4. نفترض ثلاث قيم لمعلمات الدالة **non-informative prior** $(P_1(\theta))$ بالمعلمة **c=2, 3, 5** الذي يمثل التوزيع الأولي للمعلمة القياس $(\theta)$ للتوزيع الطبيعي.
5. نفترض ثلاث قيم لمعلمات التوزيع الأولي **the natural conjugate family of prior** للعائلة الدالة المرافقة الطبيعية $(P_2(\theta))$ بـ $(\alpha=1,2,3$ و $\beta=1,2,3)$ الذي يمثل التوزيع الأولي للمعلمة القياس $(\theta)$ للتوزيع الطبيعي.
6. ثم يتم إجراء التجارب المختلفة وفقا لجميع التوليفات الممكنة للفروض المتقدم ذكرها آنفاً من خلال تكرار هذا التوليد للتوزيع الطبيعي لـ **1000** مرة لكل تجربة ولكل حجم عينة **(n)**.
7. إذ يتم استخدام صيغ التقدير **(7)** و**(8)** بطريقة الإمكان الأعظم والعزوم على التوالي، والصيغ **(32)** و **(34)** و **(45)** بطريقة بيز وفقا للتوزيعات الأولية الثلاثة المفترضة في المبحث **(3.3)** على التوالي.
8. لمعرفة أفضلية التقديرات نستخدم المعايير الاتية.

- متوسط مربعات الخطأ **Mean Squared Error (MSE)**
- متوسط الخطأ النسبي المطلق **Mean Absolute Percentage Error (MAPE)**

$$MAPE=\frac{1}{r}\sum_{r=1}^{1000}\left[\left|\hat{\theta}_i(r)-\theta\right|/\theta\right] \quad ...(47)$$

وقد لخصت النتائج المستحصلة من تجارب المحاكاة في الجداول (1-4) ، المبينة فيها اربع قيم مقدرة للمعلمة القياس $(\sigma = \theta)$ للتوزيع الطبيعي ،مع قيم MSE و MAPE لكل حجم عينة ولكل قيم المعلمات المستخدمة في التوزيعات الأولية المفترضة لمعلمة القياس للتوزيع الطبيعي وهي $(a, b, c, \alpha , \beta)$ ، باستخدام طرائق تقدير الإمكان الأعظم ، والعزوم وطرائق تقدير بيز عند افتراض التوزيع الأولي للمعلمة $\theta$ يخضع لتوزيع SRIG ، وعندما يخضع لدالة non-informative كتوزيع أولي للمعلمة $\theta$ $(P_1(\theta))$ ، وعندما يخضع لعائلة المرافقة الطبيعية the natural conjugate family of priors. كتوزيع أولي للمعلمة $\theta$ $(P_2(\theta))$. وان أفضل طريقة تقدير من بين الطرائق المستخدمة هي الطريقة التي تعطي اقل قيمة لكل من قيم MSE وMAPE .وقد لخصت النتائج في الجداول (1-4) المبينة فيما يأتي.

جدول ( 1 ) يبين القيم لـ $\hat{\theta}$ مع قيم MSE و MAPE .

| Method | Parameters | | | Estimate for $\theta$ ( $\hat{\theta}$ ) | | | | MSE | | | | MAPE | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Sample Size( n) | | | | Sample Size( n) | | | | Sample Size( n) | | | |
| | $\theta$ | a | b | 15 | 25 | 50 | 100 | 15 | 25 | 50 | 100 | 15 | 25 | 50 | 100 |
| MLE | 0.5 | - | - | 0.4900 | 0.4989 | 0.4967 | 0.4982 | 0.0091 | 0.0051 | 0.0026 | 0.0011 | 0.1522 | 0.1151 | 0.0828 | 0.0546 |
| MM | 0.5 | - | - | 0.4900 | 0.4989 | 0.4967 | 0.4982 | 0.0091 | 0.0051 | 0.0026 | 0.0011 | 0.1522 | 0.1151 | 0.0828 | 0.0546 |
| Bayes | | | | by using SRIG prior distribution | | | | | | | | | | | |
| | 0.5 | 1 | 1 | 0.6037 | 0.5689 | 0.5331 | 0.5167 | 0.0163 | 0.0085 | 0.0033 | 0.0013 | 0.2150 | 0.1522 | 0.0926 | 0.0587 |
| | | 1 | 2 | 0.7034 | 0.6347 | 0.5693 | 0.5357 | 0.0454 | 0.0211 | 0.0067 | 0.0022 | 0.4068 | 0.2696 | 0.1417 | 0.0790 |
| | | 1 | 3 | 0.7903 | 0.6941 | 0.6032 | 0.5540 | 0.0875 | 0.0402 | 0.0124 | 0.0038 | 0.5806 | 0.3882 | 0.2065 | 0.1096 |
| | 0.5 | 2 | 1 | 0.5681 | 0.5479 | 0.5228 | 0.5116 | 0.0094 | 0.0057 | 0.0027 | 0.0012 | 0.1567 | 0.1218 | 0.0824 | 0.0549 |
| | | 2 | 2 | 0.6620 | 0.6112 | 0.5583 | 0.5304 | 0.0298 | 0.0151 | 0.0052 | 0.0018 | 0.3241 | 0.2232 | 0.1225 | 0.0712 |
| | | 2 | 3 | 0.7438 | 0.6684 | 0.5916 | 0.5486 | 0.0623 | 0.0307 | 0.0100 | 0.0032 | 0.4876 | 0.3368 | 0.1834 | 0.0994 |
| | 0.5 | 3 | 1 | 0.5382 | 0.529 | 0.5132 | 0.5067 | 0.0058 | 0.0040 | 0.0022 | 0.0010 | 0.1197 | 0.1013 | 0.0757 | 0.0524 |
| | | 3 | 2 | 0.6272 | 0.5901 | 0.5480 | 0.5253 | 0.0194 | 0.0107 | 0.0041 | 0.0015 | 0.2544 | 0.1826 | 0.1060 | 0.0646 |
| | | 3 | 3 | 0.7046 | 0.6453 | 0.5807 | 0.5433 | 0.0444 | 0.0233 | 0.0081 | 0.0027 | 0.4093 | 0.2907 | 0.1618 | 0.0900 |
| Bayes | $\theta$ | | c | by using $(P_1(\theta))$ | | | | | | | | | | | |
| | 0.5 | - | 2 | 0.4983 | 0.5039 | 0.4992 | 0.4995 | 0.0163 | 0.0085 | 0.0033 | 0.0013 | 0.2150 | 0.1522 | 0.0926 | 0.0587 |
| | | - | 3 | 0.4819 | 0.4940 | 0.4942 | 0.4970 | 0.0454 | 0.0211 | 0.0067 | 0.0022 | 0.4068 | 0.2696 | 0.1417 | 0.0790 |
| | | - | 5 | 0.4535 | 0.4757 | 0.4847 | 0.4921 | 0.0875 | 0.0402 | 0.0124 | 0.0038 | 0.5806 | 0.3882 | 0.2065 | 0.1096 |
| Bayes | $\theta$ | $\alpha$ | $\beta$ | by using $(P_2(\theta))$ | | | | | | | | | | | |
| | 0.5 | 1 | 1 | 0.5651 | 0.5436 | 0.5192 | 0.5095 | 0.0114 | 0.0063 | 0.0028 | 0.0011 | 0.1698 | 0.1273 | 0.0848 | 0.0556 |
| | | 1 | 2 | 0.6241 | 0.5804 | 0.5384 | 0.5193 | 0.0212 | 0.0103 | 0.0037 | 0.0014 | 0.2521 | 0.1711 | 0.0989 | 0.0610 |
| | | 1 | 3 | 0.6777 | 0.6149 | 0.5570 | 0.5289 | 0.0365 | 0.0167 | 0.0053 | 0.0018 | 0.3554 | 0.2316 | 0.1224 | 0.0704 |
| | 0.5 | 2 | 1 | 0.5465 | 0.5329 | 0.5140 | 0.5069 | 0.0088 | 0.0053 | 0.0026 | 0.0011 | 0.1485 | 0.1164 | 0.0816 | 0.0544 |
| | | 2 | 2 | 0.6036 | 0.5689 | 0.5331 | 0.5167 | 0.0162 | 0.0085 | 0.0033 | 0.0013 | 0.2150 | 0.1522 | 0.0926 | 0.0587 |
| | | 2 | 3 | 0.6555 | 0.6027 | 0.5515 | 0.5263 | 0.0288 | 0.0139 | 0.0047 | 0.0017 | 0.3111 | 0.2082 | 0.1139 | 0.0671 |
| | 0.5 | 3 | 1 | 0.5297 | 0.5227 | 0.5090 | 0.5044 | 0.0071 | 0.0046 | 0.0024 | 0.0011 | 0.1337 | 0.1083 | 0.0792 | 0.0536 |
| | | 3 | 2 | 0.5851 | 0.5581 | 0.5279 | 0.5141 | 0.0123 | 0.0070 | 0.0029 | 0.0012 | 0.1832 | 0.1356 | 0.0871 | 0.0567 |
| | | 3 | 3 | 0.6353 | 0.5913 | 0.5461 | 0.5237 | 0.0227 | 0.0115 | 0.0041 | 0.0015 | 0.2712 | 0.1867 | 0.1059 | 0.0640 |

جدول ( 2 ) يبين القيم لـ $\hat{\theta}$ مع قيم MSE و MAPE .

| Method | Parameters | | | Estimate for $\theta$ ($\hat{\theta}$) | | | | MSE | | | | MAPE | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Sample Size( n) | | | | Sample Size( n) | | | | Sample Size( n) | | | |
| | $\theta$ | a | b | 15 | 25 | 50 | 100 | 15 | 25 | 50 | 100 | 15 | 25 | 50 | 100 |
| MLE | 1 | - | - | 0.9821 | 0.9966 | 0.9981 | 0.9986 | 0.0343 | 0.0200 | 0.0105 | 0.0049 | 0.1479 | 0.1143 | 0.0820 | 0.0556 |
| MM | 1 | - | - | 0.9821 | 0.9966 | 0.9981 | 0.9986 | 0.0343 | 0.0200 | 0.0105 | 0.0049 | 0.1479 | 0.1143 | 0.0820 | 0.0556 |
| Bayes | | | | by using SRIG prior distribution | | | | | | | | | | | |
| | 1 | 1 | 1 | 1.0325 | 1.0265 | 1.0131 | 1.0061 | 0.0297 | 0.0187 | 0.0101 | 0.0048 | 0.1361 | 0.1103 | 0.0804 | 0.0552 |
| | | 1 | 2 | 1.0946 | 1.0646 | 1.0326 | 1.016 | 0.0345 | 0.0209 | 0.0106 | 0.0049 | 0.1449 | 0.1158 | 0.0821 | 0.0562 |
| | | 1 | 3 | 1.1531 | 1.1013 | 1.0518 | 1.0258 | 0.0465 | 0.0259 | 0.0119 | 0.0052 | 0.1728 | 0.1299 | 0.0874 | 0.0580 |
| | 1 | 2 | 1 | 0.9717 | 0.9884 | 0.9936 | 0.9962 | 0.0262 | 0.0168 | 0.0096 | 0.0047 | 0.1301 | 0.1052 | 0.0786 | 0.0544 |
| | | 2 | 2 | 1.0302 | 1.0252 | 1.0128 | 1.0061 | 0.0235 | 0.0162 | 0.0093 | 0.0046 | 0.1208 | 0.1023 | 0.0773 | 0.0541 |
| | | 2 | 3 | 1.0853 | 1.0605 | 1.0316 | 1.0158 | 0.0277 | 0.0181 | 0.0098 | 0.0047 | 0.1293 | 0.1077 | 0.0791 | 0.0551 |
| | 1 | 3 | 1 | 0.9206 | 0.9543 | 0.9752 | 0.9866 | 0.0291 | 0.0177 | 0.0098 | 0.0047 | 0.1393 | 0.1078 | 0.0795 | 0.0548 |
| | | 3 | 2 | 0.9760 | 0.9898 | 0.9940 | 0.9963 | 0.0208 | 0.0146 | 0.0089 | 0.0045 | 0.1162 | 0.0979 | 0.0757 | 0.0533 |
| | | 3 | 3 | 1.0282 | 1.024 | 1.0125 | 1.006 | 0.0191 | 0.0141 | 0.0087 | 0.0044 | 0.1086 | 0.0955 | 0.0745 | 0.0531 |
| Bayes | $\theta$ | | c | by using $(P_1(\theta))$ | | | | | | | | | | | |
| | 1 | - | 2 | 0.9986 | 1.0067 | 1.0031 | 1.0011 | 0.0297 | 0.0187 | 0.0101 | 0.0048 | 0.1361 | 0.1103 | 0.0804 | 0.0552 |
| | | - | 3 | 0.9658 | 0.9867 | 0.9931 | 0.9961 | 0.0345 | 0.0209 | 0.0106 | 0.0049 | 0.1449 | 0.1158 | 0.0821 | 0.0562 |
| | | - | 5 | 0.9090 | 0.9502 | 0.9740 | 0.9863 | 0.0465 | 0.0259 | 0.0119 | 0.0052 | 0.1728 | 0.1299 | 0.0874 | 0.0580 |
| Bayes | $\theta$ | $\alpha$ | $\beta$ | by using $(P_2(\theta))$ | | | | | | | | | | | |
| | 1 | 1 | 1 | 1.0337 | 1.0272 | 1.0132 | 1.0062 | 0.0338 | 0.0203 | 0.0105 | 0.0049 | 0.1454 | 0.1147 | 0.0820 | 0.0558 |
| | | 1 | 2 | 1.0675 | 1.0472 | 1.0233 | 1.0112 | 0.0352 | 0.0210 | 0.0107 | 0.0049 | 0.1470 | 0.1163 | 0.0823 | 0.0561 |
| | | 1 | 3 | 1.1001 | 1.0668 | 1.0332 | 1.0162 | 0.0389 | 0.0225 | 0.0110 | 0.0050 | 0.1541 | 0.1203 | 0.0837 | 0.0567 |
| | 1 | 2 | 1 | 0.9998 | 1.0068 | 1.0032 | 1.0012 | 0.0306 | 0.0188 | 0.0101 | 0.0048 | 0.1393 | 0.1109 | 0.0808 | 0.0552 |
| | | 2 | 2 | 1.0325 | 1.0265 | 1.0131 | 1.0061 | 0.0297 | 0.0187 | 0.0101 | 0.0048 | 0.1361 | 0.1103 | 0.0804 | 0.0552 |
| | | 2 | 3 | 1.0641 | 1.0457 | 1.0229 | 1.0111 | 0.0311 | 0.0194 | 0.0103 | 0.0048 | 0.1379 | 0.1119 | 0.0807 | 0.0556 |
| | 1 | 3 | 1 | 0.9690 | 0.9876 | 0.9933 | 0.9962 | 0.0297 | 0.0182 | 0.0100 | 0.0048 | 0.1384 | 0.1093 | 0.0802 | 0.0549 |
| | | 3 | 2 | 1.0008 | 1.0069 | 1.0032 | 1.0012 | 0.0269 | 0.0174 | 0.0098 | 0.0047 | 0.1307 | 0.1067 | 0.0792 | 0.0547 |
| | | 3 | 3 | 1.0313 | 1.0258 | 1.0129 | 1.0061 | 0.0263 | 0.0174 | 0.0097 | 0.0047 | 0.1280 | 0.1061 | 0.0788 | 0.0547 |

**جدول ( 3 ) يبين القيم لـ $\hat{\theta}$ مع قيم MSE و MAPE .**

| Method | Parameters | | | Estimate for $\theta(\hat{\theta})$ | | | | MSE | | | | MAPE | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Sample Size( n) | | | | Sample Size( n) | | | | Sample Size( n) | | | |
| | θ | a | b | 15 | 25 | 50 | 100 | 15 | 25 | 50 | 100 | 15 | 25 | 50 | 100 |
| MLE | 2 | - | - | 1.9794 | 1.9859 | 1.9951 | 1.9993 | 0.1389 | 0.0792 | 0.0420 | 0.0197 | 0.1489 | 0.1130 | 0.0821 | 0.0557 |
| MM | 2 | - | - | 1.9794 | 1.9859 | 1.9951 | 1.9993 | 0.1389 | 0.0792 | 0.0420 | 0.0197 | 0.1489 | 0.1130 | 0.0821 | 0.0557 |
| Bayes | | | | by using SRIG prior distribution | | | | | | | | | | | |
| | 2 | 1 | 1 | 1.9808 | 1.9864 | 1.9952 | 1.9994 | 0.1296 | 0.0760 | 0.0412 | 0.0195 | 0.1439 | 0.1107 | 0.0813 | 0.0554 |
| | | 1 | 2 | 2.0142 | 2.0064 | 2.0052 | 2.0044 | 0.1251 | 0.0743 | 0.0408 | 0.0194 | 0.1409 | 0.1094 | 0.0809 | 0.0554 |
| | | 1 | 3 | 2.0469 | 2.0263 | 2.0152 | 2.0093 | 0.1231 | 0.0735 | 0.0406 | 0.0194 | 0.1390 | 0.1086 | 0.0806 | 0.0554 |
| | 2 | 2 | 1 | 1.8643 | 1.9128 | 1.9568 | 1.9798 | 0.1329 | 0.0779 | 0.0415 | 0.0195 | 0.1469 | 0.1118 | 0.0815 | 0.0554 |
| | | 2 | 2 | 1.8957 | 1.9321 | 1.9667 | 1.9847 | 0.1215 | 0.0735 | 0.0403 | 0.0192 | 0.1402 | 0.1088 | 0.0804 | 0.0550 |
| | | 2 | 3 | 1.9265 | 1.9512 | 1.9764 | 1.9896 | 0.1125 | 0.0699 | 0.0393 | 0.0190 | 0.1347 | 0.1062 | 0.0795 | 0.0547 |
| | 2 | 3 | 1 | 1.7661 | 1.8469 | 1.9206 | 1.9607 | 0.1574 | 0.0890 | 0.0444 | 0.0203 | 0.1625 | 0.1197 | 0.0844 | 0.0566 |
| | | 3 | 2 | 1.7959 | 1.8655 | 1.9302 | 1.9656 | 0.1409 | 0.0823 | 0.0426 | 0.0198 | 0.1533 | 0.1149 | 0.0826 | 0.0559 |
| | | 3 | 3 | 1.8251 | 1.8839 | 1.9398 | 1.9705 | 0.1267 | 0.0764 | 0.0410 | 0.0194 | 0.1446 | 0.1108 | 0.0810 | 0.0553 |
| Bayes | θ | | c | by using $(P_1(\theta))$ | | | | | | | | | | | |
| | 2 | - | 2 | 2.0127 | 2.0059 | 2.0051 | 2.0043 | 0.1296 | 0.0760 | 0.0412 | 0.0195 | 0.1439 | 0.1107 | 0.0813 | 0.0554 |
| | | - | 3 | 1.9467 | 1.9662 | 1.9852 | 1.9944 | 0.1251 | 0.0743 | 0.0408 | 0.0194 | 0.1409 | 0.1094 | 0.0809 | 0.0554 |
| | | - | 5 | 1.8322 | 1.8934 | 1.947 | 1.9748 | 0.1231 | 0.0735 | 0.0406 | 0.0194 | 0.1390 | 0.1086 | 0.0806 | 0.0554 |
| Bayes | θ | α | β | by using $(P_2(\theta))$ | | | | | | | | | | | |
| | 2 | 1 | 1 | 2.0304 | 2.0162 | 2.0102 | 2.0069 | 0.1415 | 0.0800 | 0.0423 | 0.0198 | 0.1496 | 0.1135 | 0.0823 | 0.0559 |
| | | 1 | 2 | 2.0479 | 2.0265 | 2.0153 | 2.0094 | 0.1404 | 0.0796 | 0.0422 | 0.0198 | 0.1486 | 0.1131 | 0.0822 | 0.0559 |
| | | 1 | 3 | 2.0652 | 2.0368 | 2.0203 | 2.0119 | 0.1400 | 0.0794 | 0.0422 | 0.0198 | 0.1481 | 0.1128 | 0.0821 | 0.0560 |
| | 2 | 2 | 1 | 1.9639 | 1.9763 | 1.9902 | 1.9969 | 0.1328 | 0.0772 | 0.0415 | 0.0195 | 0.1459 | 0.1115 | 0.0816 | 0.0554 |
| | | 2 | 2 | 1.9808 | 1.9864 | 1.9952 | 1.9994 | 0.1296 | 0.0760 | 0.0412 | 0.0195 | 0.1439 | 0.1107 | 0.0813 | 0.0554 |
| | | 2 | 3 | 1.9975 | 1.9965 | 2.0002 | 2.0019 | 0.1270 | 0.0750 | 0.0409 | 0.0194 | 0.1422 | 0.1100 | 0.0811 | 0.0554 |
| | 2 | 3 | 1 | 1.9035 | 1.9387 | 1.9708 | 1.987 | 0.1329 | 0.0775 | 0.0414 | 0.0195 | 0.1463 | 0.1117 | 0.0815 | 0.0553 |
| | | 3 | 2 | 1.9199 | 1.9486 | 1.9757 | 1.9895 | 0.1278 | 0.0756 | 0.0409 | 0.0194 | 0.1434 | 0.1104 | 0.0811 | 0.0552 |
| | | 3 | 3 | 1.9361 | 1.9584 | 1.9807 | 1.992 | 0.1234 | 0.0739 | 0.0405 | 0.0193 | 0.1408 | 0.1092 | 0.0807 | 0.0551 |

**جدول ( 4 ) يبين القيم لـ $\hat{\theta}$ مع قيم MSE و MAPE .**

| Method | Parameters | | | Estimate for $\theta(\hat{\theta})$ | | | | MSE | | | | MAPE | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Sample Size( n) | | | | Sample Size( n) | | | | Sample Size( n) | | | |
| | θ | a | b | 15 | 25 | 50 | 100 | 15 | 25 | 50 | 100 | 15 | 25 | 50 | 100 |
| MLE | 4 | - | - | 3.9284 | 3.9868 | 3.9965 | 3.9934 | 0.5491 | 0.3201 | 0.1669 | 0.0812 | 0.1479 | 0.1143 | 0.0821 | 0.0569 |
| MM | 4 | - | - | 3.9284 | 3.9868 | 3.9965 | 3.9934 | 0.5491 | 0.3201 | 0.1669 | 0.0812 | 0.1479 | 0.1143 | 0.0821 | 0.0569 |
| Bayes | | | | by using SRIG prior distribution | | | | | | | | | | | |
| | 4 | 1 | 1 | 3.8808 | 3.9572 | 3.9816 | 3.986 | 0.5355 | 0.3137 | 0.1651 | 0.0809 | 0.1465 | 0.1132 | 0.0817 | 0.0567 |
| | | 1 | 2 | 3.898 | 3.9673 | 3.9867 | 3.9885 | 0.5270 | 0.3113 | 0.1646 | 0.0807 | 0.1452 | 0.1128 | 0.0816 | 0.0566 |
| | | 1 | 3 | 3.9151 | 3.9774 | 3.9917 | 3.991 | 0.5192 | 0.3092 | 0.1640 | 0.0806 | 0.1440 | 0.1124 | 0.0814 | 0.0566 |
| | 4 | 2 | 1 | 3.6525 | 3.8107 | 3.9051 | 3.9469 | 0.5825 | 0.3251 | 0.1675 | 0.0819 | 0.1551 | 0.1154 | 0.0825 | 0.0570 |
| | | 2 | 2 | 3.6687 | 3.8204 | 3.91 | 3.9494 | 0.5674 | 0.3200 | 0.1662 | 0.0816 | 0.1530 | 0.1145 | 0.0822 | 0.0569 |
| | | 2 | 3 | 3.6848 | 3.8301 | 3.9149 | 3.9519 | 0.5529 | 0.3151 | 0.1649 | 0.0812 | 0.1510 | 0.1137 | 0.0819 | 0.0568 |
| | 4 | 3 | 1 | 3.4603 | 3.6793 | 3.8327 | 3.909 | 0.7058 | 0.3725 | 0.1807 | 0.0859 | 0.1736 | 0.1230 | 0.0861 | 0.0584 |
| | | 3 | 2 | 3.4756 | 3.6887 | 3.8376 | 3.9114 | 0.6857 | 0.3651 | 0.1787 | 0.0853 | 0.171 | 0.1217 | 0.0856 | 0.0582 |
| | | 3 | 3 | 3.4909 | 3.698 | 3.8424 | 3.9139 | 0.6663 | 0.3580 | 0.1768 | 0.0848 | 0.1683 | 0.1205 | 0.0851 | 0.0580 |
| Bayes | θ | | c | by using is $(P_1(\theta))$ | | | | | | | | | | | |
| | 4 | - | 2 | 3.9944 | 4.0268 | 4.0166 | 4.0034 | 0.5355 | 0.3137 | 0.1651 | 0.0809 | 0.1465 | 0.1132 | 0.0817 | 0.0567 |
| | | - | 3 | 3.8635 | 3.9471 | 3.9766 | 3.9835 | 0.5270 | 0.3113 | 0.1646 | 0.0807 | 0.1452 | 0.1128 | 0.0816 | 0.0566 |
| | | - | 5 | 3.6363 | 3.8009 | 3.9001 | 3.9444 | 0.5192 | 0.3092 | 0.1640 | 0.0806 | 0.1440 | 0.1124 | 0.0814 | 0.0566 |
| Bayes | θ | α | β | by using $(P_2(\theta))$ | | | | | | | | | | | |
| | 4 | 1 | 1 | 4.0033 | 4.032 | 4.0191 | 4.0047 | 0.5598 | 0.3265 | 0.1687 | 0.0816 | 0.1488 | 0.1154 | 0.0825 | 0.0570 |
| | | 1 | 2 | 4.0122 | 4.0371 | 4.0216 | 4.006 | 0.5574 | 0.3260 | 0.1686 | 0.0815 | 0.1484 | 0.1153 | 0.0824 | 0.0570 |
| | | 1 | 3 | 4.0211 | 4.0423 | 4.0242 | 4.0072 | 0.5552 | 0.3256 | 0.1685 | 0.0815 | 0.1480 | 0.1152 | 0.0824 | 0.0570 |
| | 4 | 2 | 1 | 3.8722 | 3.9522 | 3.9791 | 3.9847 | 0.5401 | 0.3150 | 0.1654 | 0.0810 | 0.1472 | 0.1135 | 0.0818 | 0.0567 |
| | | 2 | 2 | 3.8808 | 3.9572 | 3.9816 | 3.986 | 0.5355 | 0.3137 | 0.1651 | 0.0809 | 0.1465 | 0.1132 | 0.0817 | 0.0567 |
| | | 2 | 3 | 3.8894 | 3.9623 | 3.9841 | 3.9872 | 0.5312 | 0.3125 | 0.1648 | 0.0808 | 0.1458 | 0.1130 | 0.0817 | 0.0567 |
| | 4 | 3 | 1 | 3.7531 | 3.8769 | 3.9403 | 3.9651 | 0.5530 | 0.3161 | 0.1654 | 0.0812 | 0.1503 | 0.1139 | 0.0819 | 0.0567 |
| | | 3 | 2 | 3.7615 | 3.8819 | 3.9428 | 3.9663 | 0.5467 | 0.3141 | 0.1649 | 0.0810 | 0.1494 | 0.1136 | 0.0817 | 0.0567 |
| | | 3 | 3 | 3.7698 | 3.8868 | 3.9453 | 3.9676 | 0.5405 | 0.3122 | 0.1644 | 0.0809 | 0.1485 | 0.1132 | 0.0816 | 0.0566 |

## 1 مناقشة نتائج المحاكاة

نلاحظ من الجداول (1-4) عموما ،بان جودة التقدير تتحسن بزيادة حجم العينة (n)، إذ تتناقص قيم متوسط مربعات الخطأ (MSE) ومتوسط النسبي الخطأ المطلق (MAPE) بزيادة حجم العينة في كل الحالات قيد البحث ولكل طرائق التقدير المختلفة المستخدمة في البحث. وان القيم المقدرة للمعلمة $\theta$ ( $\hat{\theta}$ ) وقيم MSE و MAPE المستحصلة بطريقتي الإمكان الأعظم والعزوم تكون متطابقة وهذا يعود لتطابق الصيغتين التقديرية للمعلمة والمبينة في (10) و (17).

من الجدول (1) لـ case-1 $\sigma=\theta=0.5$ نلاحظ بشكل عام:-

- بان قيمة $\theta=0.5$ تكون اكبر من القيم المقدرة ( $\hat{\theta}$ ) باستخدام طريقتي التقدير الإمكان الأعظم والعزوم وان قيمة $\hat{\theta}$ تقترب من قيمة $\theta$ بزيادة حجم العينة (n)، ومن ثم تكون قيم MSE و MAPE متناقصة بزيادة قيمة n .
- إما طريقة بيز عندما يكون التوزيع الاولي لمعلمة القياس يخضع لتوزيع SRIG،فان القيم المقدرة للمعلمة $\theta$ ( $\hat{\theta}_{Bayes1}$ ) تكون اكبر من قيمة $\theta$،وان قيمة $\hat{\theta}$ تقترب من قيمة $\theta$ بزيادة n.وبشكل عام تزداد قيم المعيارين MSE و MAPE بزيادة قيمة المعلمة b عند ثبوت قيمة المعلمة a وثبوت قيمة b لكل حجم عينة.
- إما طريقة بيز عندما يكون التوزيع الأولي لمعلمة القياس يخضع لتوزيع non-informative بالمعلمة c، فان القيم المقدرة للمعلمة $\theta$ ( $\hat{\theta}_{Bayes2}$ ) تكون اقل من قيمة $\theta=0.5$،وان قيمة ( $\hat{\theta}_{Bayes2}$ ) تقترب من قيمة $\theta$ بزيادة n. وبشكل عام تزداد قيم المعيارين MSE و MAPE بزيادة قيمة المعلمة c لكل حجم عينة.
- إما طريقة بيز عندما يكون التوزيع الأولي لمعلمة القياس يخضع للعائلة المرافقة الطبيعية للتوزيعات الأولية ( the natural conjugate family of priors)،فان القيم المقدرة للمعلمة $\theta$ ( $\hat{\theta}_{Bayes3}$ ) تكون اكبر من قيمة $\theta=0.5$.وان قيمة ( $\hat{\theta}_{Bayes3}$ ) تقترب من قيمة $\theta$ بزيادة حجم العينة.وتكون قيم المعيارين MSE و MAPE متزايدة بزيادة قيمة المعلمة $\beta$ عند ثبوت قيمة $\alpha$ ومتناقصة بزيادة $\alpha$ عند ثبوت قيمة $\beta$ لكل حجم عينة.

يعد مقدر ( $\hat{\theta}_{Bayes1}$ ) الأفضل عند قيم المعلمتين a=3, b=1 مقارنة ببقية المقدرات المستحصلة بكل طرائق التقدير،وفقا لمقياس اقل قيمة للمعيارين MSE وMAPE ولكل إحجام العينات.

ومن الجدول (2) لـ case-2 $\sigma=\theta=1$ نلاحظ بشكل عام :-

- بان قيم $\theta=1$ تكون اكبر من القيم المقدرة ( $\hat{\theta}$ ) باستخدام طريقتي التقدير الامكان الأعظم والعزوم، وان قيمة $\hat{\theta}$ تقترب من قيمة المعلمة $\theta$ بزيادة حجم العينة (n)، ومن ثم تكون قيم MSE و MAPE متناقصة بزيادة قيمة n.
- إما طريقة بيز عندما يكون التوزيع الأولي لمعلمة القياس يخضع لتوزيع SRIG،فان القيم المقدرة لـ $\theta$ ( $\hat{\theta}_{Bayes1}$ ) تكون اكبر من قيمة $\theta=1$ لكل قيم a و b عدا القيم التي تكون فيها $a < b$ ، اذ تكون قيم ( $\hat{\theta}_{Bayes1}$ ) اقل من قيمة $\theta$،وتتحسن جودة التقدير بزيادة حجم العينة. ومن ثم تزداد قيم المعيارين MSE وMAPE بزيادة قيمة المعلمة b عند ثبوت قيمة المعلمة a عند القيمة a=1 ولكل قيم n، ومتذبذبة بزيادة قيمة b عندما تكون قيمة a=2 ومتناقصة بزيادة قيمة b عندما تكون قيمة a=3 لكل قيم n.

- إما طريقة بيز عندما يكون التوزيع الأولي لمعلمة القياس يخضع لتوزيع non-informative بالمعلمة c،فان القيم المقدرة للمعلمة $\theta$ ( $\hat{\theta}_{\text{Bayes2}}$ )تكون اقل من قيمة$\theta = 1$ لكل قيم المعلمة c و n عدا القيمة n >15, c=2، وان قيمة ( $\hat{\theta}_{\text{Bayes2}}$ ) تقترب من قيمة $\theta$ بزيادة حجم العينة. وبشكل عام تزداد قيم المعيارين MSE وMAPE بزيادة قيمة المعلمة c لكل حجم عينة .

- إما طريقة بيز عندما يكون التوزيع الأولي لمعلمة القياس يخضع للعائلة الطبيعية المرافقة للتوزيعات الأولية (the natural conjugate family of priors)، فان القيم المقدرة للمعلمة $\theta$ ( $\hat{\theta}_{\text{Bayes3}}$ )تكون اكبر من قيمة $\theta = 1$ لكل قيم $\alpha$ و $\beta$ ولكل قيم n،عدا الحالة التي تكون فيها قيمة$\alpha = 3$ و$\beta = 1$ لكل قيم n، اذ تكون قيمة ( $\hat{\theta}_{\text{Bayes3}}$ ) اقل من قيمة $\theta$. وتكون قيم المعيارين MSE و MAPE متزايدة بزيادة قيمة المعلمة $\beta$ عند ثبوت قيمة $\alpha = 1$ ولكل قيم n.في حين تكون متذبذبة بزيادة ونقصان لكل قيمة $\beta$ عند ثبوت قيمة $\alpha = 2$ ولكل قيم n .وتكون قيم المعيارين MSE وMAPE ومتناقصة بزيادة قيمة $\beta$ عند ثبوت قيمة $\alpha = 3$ ولكل قيم n .

يعد مقدر ( $\hat{\theta}_{\text{Bayes1}}$ ) الأفضل عند قيم المعلمتين a=b=3 مقارنة ببقية المقدرات المستحصلة بكل طرائق التقدير،وفقا لمقياس اقل قيمة للمعيارين MSE و MAPE لكل إحجام العينات.
ونلاحظ بشكل عام من الجدول (3) لـ case-3 $\sigma = \theta = 2$ :-

- بان قيمة$\theta = 2$تكون اكبر من القيم المقدرة ( $\hat{\theta}$ )باستخدام طريقتي التقدير الإمكان الأعظم والعزوم .وان قيمة $\hat{\theta}$ تقترب من قيمة$\theta$بزيادة حجم العينة (n)، ومن ثم تكون قيم MSE و MAPE متناقصة بزيادة n.
- اما طريقة بيز عندما يكون التوزيع الأولي لمعلمة القياس يخضع لتوزيع SRIG ، فان القيم المقدرة للمعلمة $\theta$ ( $\hat{\theta}_{\text{Bayes1}}$ ) تكون اقل من قيمة $\theta = 2$ لكل قيم a وb عدا الحالتين التي تكون فيها قيمة (a=1 وb=2,3) ، إذ تكون قيم ( $\hat{\theta}_{\text{Bayes1}}$ ) اكبر من قيمة $\theta$ ولكل قيم n،وتتحسن جودة التقدير بزيادة حجم العينة.وبشكل عام تكون قيم المعيارين MSE وMAPE متناقصة بزيادة قيمة المعلمة b عند ثبوت قيمة المعلمة a ولكل حجوم العينات (n).
- إما طريقة بيز عندما يكون التوزيع الأولي لمعلمة القياس يخضع لتوزيع non-informative بالمعلمة c، فان القيم المقدرة للمعلمة $\theta$ ( $\hat{\theta}_{\text{Bayes2}}$ ) تكون اقل من قيمة$\theta = 2$ لكل قيم المعلمة c وn عدا القيمة التي تكون فيها قيمة c=2 ولكل قيم n ،وان قيمة ( $\hat{\theta}_{\text{Bayes2}}$ ) تقترب من قيمة $\theta$ بزيادة حجم العينة.عموما تتناقص قيم المعيارين MSE وMAPE بزيادة قيمة المعلمة c لكل حجم عينة (n).
- اما طريقة بيز عندما يكون التوزيع الأولي لمعلمة القياس يخضع للعائلة الطبيعية المرافقة للتوزيعات الأولية (the natural conjugate family of priors)، فان القيم المقدرة للمعلمة $\theta$ تكون اقل من قيمة$\theta = 2$ لكل قيم $\alpha$ و $\beta$ ولكل حجوم العينات (n) ،عدا الحالة$(\alpha = 1)$ ولكل قيم $\beta$ وn،اذ تكون ( $\hat{\theta}_{\text{Bayes3}}$ ) اكبر من قيمة $(\theta = 1)$. وتكون قيم المعيارين MSE و MAPE متناقصة بزيادة قيمة المعلمة $\beta$ عند ثبوت قيمة $\alpha$ ولكل قيم n.

يعد مقدر ( $\hat{\theta}_{\text{Bayes1}}$ ) الأفضل عند قيم المعلمتين b=3 وa=2 مقارنة ببقية المقدرات المستحصلة بكل طرائق التقدير، وفقا لمقياس اقل قيمة للمعيارين MSE و MAPE لكل إحجام العينات.

نلاحظ بشكل عام من الجدول (4) للـ case-4 $\sigma=\theta=4$ :-

- بان قيمة $\theta=4$ تكون اكبر من القيم المقدرة ( $\hat{\theta}$ ) باستخدام طريقتي التقدير الإمكان الأعظم والمعزوم .وان قيمة $\hat{\theta}$ تقترب من قيمة $\theta$ بزيادة حجم العينة (n)، ومن ثم تكون قيم MSE و MAPE متناقصة بزيادة قيمة n.
- اما طريقة بيز عندما يكون التوزيع الأولي لمعلمة القياس يخضع لتوزيع SRIG ، فان القيم المقدرة للمعلمة $\theta$ ( $\hat{\theta}_{Bayes1}$ ) تكون اقل من قيمة $\theta=4$ لكل قيم a و b لكل قيم n،وتتحسن جودة التقدير بزيادة حجم العينة. وبشكل عام تكون قيم المعيارين MSE وMAPE متناقصة بزيادة قيمة المعلمة b عند ثبوت قيمة المعلمة a ولكل حجم عينة، في حين متزايدة بزيادة قيمة a عند ثبوت قيمة المعلمة b ولكل حجم عينة .
- إما طريقة بيز عندما يكون التوزيع الأولي لمعلمة القياس يخضع لتوزيع non-informative بالمعلمة c، فان القيم المقدرة للمعلمة $\theta$ ( $\hat{\theta}_{Bayes2}$ ) تكون اقل من قيمة $\theta=4$ لكل قيم المعلمة c و n عدا القيمة التي تكون فيها قيمة c=2 و $n\geq 25$ ،اذ تكون قيمة ( $\hat{\theta}_{Bayes2}$ ) اكبر من قيمة $\theta$ . وتتحسن جودة التقدير بزيادة حجم العينة. عموما تتناقص قيم المعيارين MSE وMAPE بزيادة قيمة المعلمة c لكل حجم عينة (n).

- إما طريقة بيز عندما يكون التوزيع الأولي لمعلمة القياس يخضع للعائلة المرافقة الطبيعية للتوزيعات الأولية ( the natural conjugate family of priors)،فان القيم المقدرة للمعلمة $\theta$ ( $\hat{\theta}_{Bayes3}$ ) تكون اقل من قيمة $\theta=4$ لكل قيم $\alpha$ و $\beta$ ولكل حجوم العينات (n)،عدا الحالة $(\alpha=1)$ ولكل قيم $\beta$ وn،إذ تكون ( $\hat{\theta}_{Bayes3}$ ) اكبر من قيمة $\theta$ . وتكون قيم المعيارين MSE و MAPE متناقصة بزيادة قيمة المعلمة $\beta$ عند ثبوت قيمة $\alpha$ ولكل قيم n.

يعد المقدرين ( $\hat{\theta}_{Bayes1}$ ) عند قيم المعلمتين b=3 وa=1 والمقدر ( $\hat{\theta}_{Bayes2}$ ) عند القيمة c=5 الأفضل مقارنة ببقية المقدرات المستحصلة بكل طرائق التقدير، وفقا لمقياس اقل قيمة للمعيارين MSE و MAPE لكل إحجام العينات ، إذ تتساوى قيم MSE و MAPE لكلا المقدرين.

## 5. الاستنتاجات

أهم الاستنتاجات التي تم التوصل إليها من خلال نتائج البحث وبشكل عام .نلاحظ بان

- جودة التقدير تتحسن بزيادة حجم العينة باستخدام كل طرائق التقدير المعتمدة في البحث من خلال تناقص قيم متوسط مربعات الخطأ (MSE) ومتوسط الخطأ المطلق (MAPE) .
- طريقة الإمكان الأعظم وطريقة العزوم أعطت نتائج متساوية للقيم المقدرة لمعلمة القياس ( $\hat{\theta}$ ) و قيم MSE و MAPE ولكل حجوم العينات، لتساوي الصيغتين التقديرية لمعلمة القياس ( $\hat{\theta}$ ) وكما مبين في الصيغة التقديرية (7) والصيغة (8).
- مقدر بيز عندما يكون التوزيع الأولي لمعلمة القياس يخضع لتوزيع SRIG يعطي اصغر قيمة لـ MSE و MAPEولكل إحجام العينات ، تحديدا عندما تكون قيمة المعلمتين التوزيع مساوية لـ b=1 وa=3 للحالة الأولى لقيمة $\sigma=\theta=0.5$ .وعندما تكون قيمة المعلمتين مساوية لـ a=b=3 للحالة الثانية لقيمة $\theta=1$ .وعندما تكون قيمة المعلمتين مساوية لـ a=2,b=3 للحالة الثالثة لقيمة $\theta=2$ . وعندما تكون قيمة المعلمتين مساوية لـ b=3 وa=1 للحالة الرابعة لقيمة $\theta=4$ .

• مقدر بيز عندما يكون التوزيع الأولي لمعلمة القياس يخضع لتوزيع SRIG يعطي اصغر قيمة لـ MSE و MAPE ولكل إحجام العينات ، تحديدا عندما تكون قيمة المعلمتين التوزيع مساوية لـ a=1,b=3 للحالة الرابعة لقيمة $\theta = 4$ .وتكون قيم متساوية لمقدر بيز عندما يكون التوزيع الأولي لمعلمة القياس يخضع لتوزيع non-informative عندما تكون قيمة معلمة التوزيع مساوية لـ c=5.

## 6. التوصيات

استنادا لما توصلنا إليه من تجارب المحاكاة نوصي الباحثين الأخذ بنظر العناية الطرائق المذكورة آنفاً والتي أعطت اصغر قيمة لـ MSE و MAPE لإغراض تقدير معلمة القياس للتوزيع الطبيعي.

## References


1.**Bickel, P.J. & Doksum, K. A., (1977), " Mathematical Statistics: Basic Ideas and Selected Topics ", Holden- Day, Inc., San Francisco.**

2.**Bernardo, J. M. (2006), 'Intrinsic point estimation of the normal variance', Bayesian Statistics and its Applications New Delhi: Anamaya Pub., p.110-121.**

3.**Mitchell, A.F.S., (1994),"A Note on Posterior moments for a normal mean with Double Exponential Prior ", Journal of Royal Statistical Society( JRSS ),56(4), pp.605-610.**

4.**Ohakwe, J. and Okolic, N. and Obij, C. and Ugwud, N., (2012),' Properties of a square root gamma distribution', J. Math. Comput. Sci. 2, No. 6, 1588-1597.ISSN: 1927-5307.**

5.**Oliphant, Travis E., (2006),' A Bayesian perspective on estimating mean, variance, and standard-deviation from data ',Faculty Publications. Paper 278. http://scholarsarchive.byu.edu/facpub/278.**

6.**The Normal distribution. (2012). Available at: From Wikipedia, the free encyclopedia. This page was last modified on 11/3/2012 http://en.wikipedia.org/wiki.**

7.**The Normal Distribution. (2014), From MathWorld-A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/NormalDistribution.html.**

8.**Venkatesan.G and E. Nathiya, (2008a),' Bayesian Analysis of Normal Sequence using new type of priors', Proceedings of UGC Sponsored National Seminar, "Applied Bayesian Statistical Analysis" Department of Statistics ,Govt. Arts college (Autonomous), Salem-7,Tamil Nadu, India.**

9.**Venkatesan.G and E. Nathiya (2008b),' Prior distribution review in Bayesian analysis', Proceedings of UGC Sponsored National Seminar, "Applied Bayesian Statistical Analysis" Department of Statistics ,Govt.Arts College (Autonomous), Salem-7, Tamil Nadu, India.**

10. **Venkatesan.G and E. Nathiya (2010), 'Bayesian Analysis of Normal Sequence using Double Exponential and Half-Normal prior', UGC Sponsored National Seminar on " Recent Advances in Statistics and computer applications", Department of Statistics, Bharathiar University, Coimbatore, Tamil Nadu, India.**

11. **Venkatesan.G and E. Nathiya (2011),' Posterior Analysis of Normal Sequence – A New Approach', International Journal of Mathematical Science and Applications, vol.1,No. 2.**

12. **Venkatesan. G and E. Nathiya, (2011),'Computing Bayes parametric estimates of normal sequence assuming Taylor series approximation prior', International Journal of Mathematical Sciences and Applications Vol. 1 No. 2 .**

13. **Zhang, C.-H. , (1997), ' Empirical Bayes and compound estimation of Normal means', Statistica Sinica vol.7, 181-193.**

# Bayesian Estimator for the Scale Parameter of the Normal Distribution Under Different Prior Distributions


## Abstract

**In this study, we used Bayesian method to estimate scale parameter $(\sigma = \theta)$ for the normal distribution. By considering three different prior distributions such as the square root inverted gamma (SRIG) distribution and the non-informative prior distribution and the natural conjugate family of priors. The Bayesian estimation based on squared error loss function, and compared it with the classical estimation methods to estimate the scale parameter for the normal distribution, such as the maximum likelihood estimation and the moment estimation. Several cases from normal distribution for data generating, or different sample sizes (small, medium, and large). The results were obtained by using simulation technique, Programs written using MATLAB-R2008a program were used .Simulation results shown that bayes estimation when the prior distribution is (SRIG) distribution with (a=3, b=1) for $(\sigma = \theta = 0.5)$, and with (a=b=3) for $(\theta = 1)$, and with (a=2, b=3) for $(\theta = 2)$, and with (a=1, b=3) for $(\theta = 4)$ gives the smallest value of MSE and MAPE for all sample sizes.**



**Key words/ The properties of the normal distribution, Maximum likelihood method, Moment estimation method, Bayes method, the SRIG prior distribution, the non-informative prior distribution, the natural conjugate family of priors, Mean Square Error (MSE), Mean Absolute Percentage Error (MAPE).**