تقدير نقاط البيانات المتعدد المتغيرات في الإحصاء المكاني مع التطبيق

م . جعفر موسى محمد البياتي/ جامعة كركوك / كلية الإدارة والاقتصاد / قسم الإحصاء

المستخلص:

يتطرق هذا البحث إلى كيفية تقدير نقاط غير المقيسة للبيانات المكانية عندما يكون عدد مفرداتها (العينة المكانية) قليلة والتي تكون غير مفضلة لعملية التقدير، لأننا كما نعلم اذا كانت البيانات كبيرة فأن نتائج التقدير للنقاط غير المقيسة تكون افضل ومن ثم يكون تباين التقدير اقل ، لذا فأن فكرة هذا البحث هو كيفية الاستفادة من البيانات أخرى ثانوية (المساعدة) التي يكون لها ارتباط قوي مع بيانات الأولية (الأساسية) المراد تقدير احد نقاطها غير المقيسة ، فضلا عن قياس تباين التقدير، وقد تم استعمال تقنية **Co-kriging** في هذا المجال لبناء التنبؤات المكانية لعملية التقدير، ومن ثم تطبيق تلك التقنية على بيانات حقيقية في مجال زراعة محصول الحنطة في العراق حيث تم عد كمية الإنتاج هي البيانات الأساسية (متغير أولي) **Primary variable** والمراد تقدير احد نقاطها غير الملموسة والمساحة المزروعة (متغير الثانوي) **secondary variable** وقد تم برمجة جميع العمليات الحسابية بلغة **Matlab**.

المصطلحات الرئيسية للبحث/ كريكنك المتقاطع – التغاير المتقاطع – الإحصاء المكاني – حقول متعددة المتغيرات العشوائية.

مجلة العلوم
الاقتصادية والإدارية
المجلد ٢١ العدد ٨٥
الصفحات ٤٠٩-٤٢٣

المقدمة

يتناول هذا البحث دراسة عن كيفية استعمال المتغيرات الثانوية (المساعدة) في تقدير المتغيرات الاولية (الاساسية) **Primary variable** التي تترابط مع بعضهما ترابطا مكانيا، وان من احدى التقنيات المستعملة في هذا المجال هي تقنية **Co-kriging** وذلك باستعمال الدالة الفايروكرام المتقاطع **Cross-Variogram Function** أو دالة التغاير المتقاطع **Cross-Covariance Function** للمتغيرات المكانية المشتركة **Cross-regionalized Variable**. إن طبيعة المتغيرات التي يتعامل معها هذا الأسلوب يتمثل بالمتغيرات الأولية $\{z_1(x), x \in D\}$ والمتغيرات الثانوية $\{z_2(x), x \in D\}$ وان هذين المتغيرين إما أن يكونان في الموقع نفسه $x_i : i = 1,2,3..........n$ أو أن تكون المتغيرات الأولية في مواقع أي $x_i : i = 1,2,3...........n$ والمتغيرات الثانوية في مواقع أخرى مثل $x_i : i = 1,2,3..........m$ ولكن ضمن منطقة الدراسة D ، يستعمل هذا الأسلوب عندما يكون عدد المتغيرات الأولية المراد التنبؤ بأحد عناصرها غير المقيسة قليلة لذا نرى انه قد يكون $n \neq m$ أو $n = m$ ، فضلا عن ذلك تم افتراض إن المتغيرين $z_1(x)$ ، $z_2(x)$ مستقرين ومترابطين ويعتمدان الإزاحة h فقط. انظر **[1]**.

استعمل أسلوب **Co-kriging** البسيط (الوسط ثابت ومعلوم) والاعتيادي (الوسط ثابت وغير معلوم) وأسلوب في حالة كون (الوسط للمتغيرين متساويين وغير معلومين) في منطقة الدراسة D لبناء التنبؤات على بيانات حقيقية في مجال زراعة الحنطة في العراق، حيث عدت كمية المحصول الحنطة كمتغير الأولى **Primary variable** وكمية الأمطار الساقطة كمتغير ثانوية **secondary variable** حيث كان هناك ارتباط قوي بين هذين المتغيرين اذ كانت $r = 0.9$ وكانت النتائج مشجعة جدا حيث أظهرت تقاربا كبيرا بين القيم التنبؤية مع القيم الحقيقية فضلا عن حساب التباين **Co-kriging** لكل من الحالات الثلاثة.

هدف البحث: ان الهدف الاساسي من هذا البحث هو دراسة تقنية **Co-kriging** لبناء التنبؤات في تقدير كمية المحصول الحنطة في العراق للسنة **2008-2009** ، وللحالات الآتية: أولهما عندما يكون الوسط ثابتا ومعلوم والثاني الوسط ثابت وغير معلوم والثالث عندما يكون الوسط للمتغيرين المترابطين ثابتين ومتساويين ولكن غير معلومين ، وكقاعدة عملية يكون التقدير افضل عندما يكون:

$$MSE < \sigma^2$$

١- المتغيرات المكانية المتقاطعة Co-regionalization

المتغيرات التي يتعامل بها الاحصاء المكاني تختلف عن المتغيرات الاحصاء الاعتيادي حيث ان لكل متغير مكاني (ألموقعي) $z(x)$ إحداثيات $x = (u,v)$ إذا كان في المستوي و $x = (u,v,w)$ إذا كان في الفضاء (ثلاثي الأبعاد).

حيث $\forall x \in D \subset R^P$ مجال الدراسة وان $p = 1$ أو $p = 2$ أو $p = 3$ ، ولو فرضنا إن $z(x)$ تمثل متغير عشوائي في الموقع x في المنطقة D فأن عينة حجمها n من المتغيرات ستكون ممثلة

بـ $z(x_1), z(x_2),.........z(x_n)$ وهذه المتغيرات تدعى عينة الدالة للعملية التصادفية $\{z(x), x \in D\}$ ، فيكون لدينا المتغيرات $z(x_1), z(x_2),.........z(x_n)$ في المواقع $x_1, x_2,......x_n$ والتي يفصل بينهما الإزاحة h ويمكن حساب هذه الازاحة بين المتغيرات باستخدام قانون المسافة الاقليدية . انظر [3] ، [2]

$$|h| = \sqrt{u^2(x) - v^2(x)} \qquad (1)$$

٤- استقرارية من الرتبة الثانية للنموذج متعدد المتغيرات

The order-2 stationary multivariate model

العملية العشوائية المكانية $z_1(x), z_2(x),....z_i(x),........z_p(x)$ يكون مستقرة من الرتبة الثانية اذا كانت العزم الاول والثاني :

أ – الوسط ثابت $i = 1,2.....n$ ، $E[z_i(x)] = m_i$

ب– التغاير يعتمد فقط على المسافة h بين ازواج النقاط (التغاير المركز):

$$Cov[z_i(x), z_j(x+h)] = C_{ij}(h) \qquad (2)$$

٢- التغاير المتقاطع cross-covariance

التغاير المتقاطع بين المتغيرين $z_1(x)$ ، $z_2(x)$ هو $Cov[z_1(x), z_2(y)]$ لكل زوج من النقاط (x ، y) ، ولابد ان نميز بين هذا التغاير والتغاير في الموقع نفسه أي $Cov[z_1(x), z_2(x)]$ ، وإذا ساوى قيمة التغاير المتقاطع بين المتغيرين في الموقعين y ، x صفرا فعندئذ نقول ان هذين المتغيرين العشوائيين غير مترابطين ، وفي بعض الحالات (حالة غير الاستقرارية) من الافضل عد التغاير المتقاطع غير المركز **non-centered** أي : $E[z_1(x), z_2(y)]$ انظر **[10]**

٣- استقرارية التغاير المتقاطع Stationary cross-covariance

التغاير المتقاطع ثابت لا يعتمد على المسافة h بين النقاط x ، $x+h$ وعليه يكون لدينا

أ– استقرارية التغاير المتقاطع غير المركزة **non-centered**:

$$E[z_1(x), z_2(x+h)] = K_{12}(h) \qquad (٣)$$

والتي يمكن تقديرها وبدون تحيز من البيانات $z_1(x)$ ، $z_2(x)$ بمسافة h

ب– او الاستقرارية التغاير المتقاطع المركز **centered** :

$$Cov[z_1(x), z_2(x+h)] = C_{12}(h) \qquad (٤)$$

والتي يمكن ان تكتب بالشكل :

$$E\{z_1(x) - E(z_1(x))][z_2(x+h) - E(z_2(x+h))]\}$$
$$= E[z_1(x) z_2(x+h)] - E[z_1(x)] E[z_2(x+h)]$$

ان تقديرها من البيانات يتطلب ان تكون الاوساط $E[z_1(x)]$ ، $E[z_2(x+h)]$ معلومة ومستقرة أي $E[z_1(x)] = m_1$ و $E[z_2(x+h)] = m_2$.

٥- دالة الفايروكرام المتقاطع cross-variograms

لقد تم تطوير دالة الفايروكرام إلى معادلة عرفت بدالة الفايروكرام المتقاطع ، انظر [6]. حيث أن هذه الدالة تتعامل مع قيم المتغيرات العشوائية المكانية وبتوزيعات مختلفة أي أن

$$2\gamma(h)_{z_1z_2} = \frac{1}{n(h)}\sum_{i=1}^{n(h)}[z_1(x_i)-z_1(x_i+h)][z_2(x_i)-z_2(x_i+h)] \qquad (٥)$$

حيث إن :

$n(h)$ عدد أزواج المشاهدات في المواقع وبإزاحة h

$z_1(x_i)$ قيم المتغيرات الأولية في المواقع x_i ، $i=1,2,3,,,,,,,,,,,n$

$z_2(x_i)$ قيم المتغيرات الثانوية في المواقع x_i ، $i=1,2,3,,,,,,,,,,,n$

ويقسمة طرفي المعادلة (٥) على 2 نحصل على دالة شبه الفايروكرام المتقاطع وكالاتي:

$$\gamma(h)_{z_1z_2} = \frac{1}{2n(h)}\sum_{i=1}^{n(h)}[z_1(x_i)-z_1(x_i+h)][z_2(x_i)-z_2(x_i+h)] \qquad (٦)$$

وشبه الدالة الفايروكرام المتقاطع يمكن أن تكون سالبة وهذا يشير إلى الارتباط السالب بين المتغيرات المقاسة ، انظر [2] ، [11].

٦- علاقة بين التغاير المتقاطع والفايروكرام المتقاطع

Relation between cross-variogram and cross-covariance

١- هناك علاقة تربط دالة الفايروكرام والتغاير والتباين والتي يمكن الحصول عليها مع وجود فرضية الاستقرارية ، وهي:

$$\gamma_{z_1z_2}(h) = K_{z_1z_2}(0) - \frac{K_{z_1z_2}(h)+K_{z_1z_2}(-h)}{2} \qquad (٧)$$

أو بدلالة التغاير المتقاطع المركز **centered**

$$\gamma_{z_1z_2}(h) = C_{z_1z_2}(0) - \frac{C_{z_1z_2}(h)+C_{z_1z_2}(h)}{2} = C_{z_1z_2}(0) - C_{z_1z_2}(h) \qquad (٨)$$

يمكن برهنة علاقة (8) المذكورة بالشكل الأتي:

$$\gamma_{z_1z_2}(h) = \frac{1}{2}Cov[(z_{1i}-z_{1j}),(z_{2i}-z_{2j})] \quad ،(\forall\|h\| = \|i-j\|)$$

$$= \frac{1}{2}[Cov(z_{1i},z_{2i}) - Cov(z_{1j},z_{2i}) - Cov(z_{1i},z_{2j}) + Cov(z_{1j},z_{2j})]$$

$$= \frac{1}{2}[C_{z_1z_2}(0) - C_{z_1z_2}(-h) - C_{z_1z_2}(h) + C_{z_1z_2}(0)$$

$$C_{z_1z_2}(0) - \frac{1}{2}[C_{z_1z_2}(-h) + C_{z_1z_2}(h)] = C_{z_1z_2}(0) - C_{z_1z_2}(h)$$

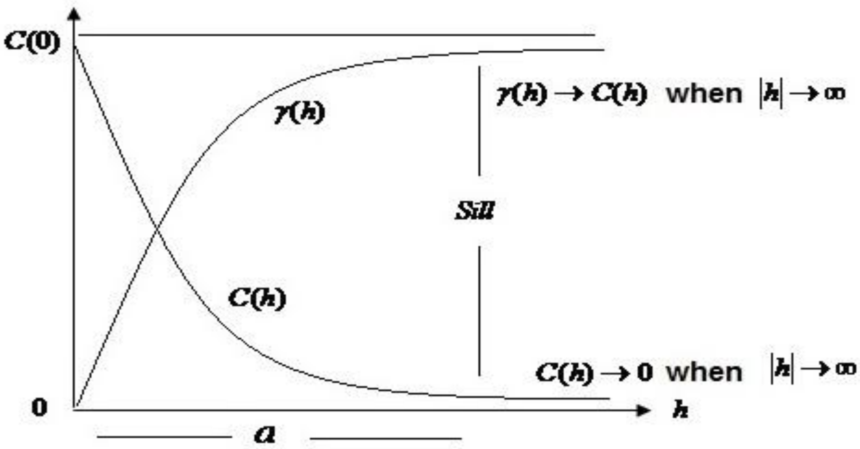
حيث $C_{z_1z_2}(0) = \sigma^2$ ، $C_{z_1z_2}(h) = C_{z_1z_2}(-h)$

يمكن الافادة من المعادلة (8) للحصول على الصيغة الرياضية لدالة التغاير المتقاطع التي تكون بالشكل :

$$C_{z_1z_2}(h) = \begin{Bmatrix} \psi_0 + \psi & h=0 \\ \psi\left[1-\frac{3h}{2a}+\frac{1}{2}\left(\frac{h}{a}\right)^3\right] & 0<h\le a \\ 0 & h>a \end{Bmatrix} \qquad (٩)$$

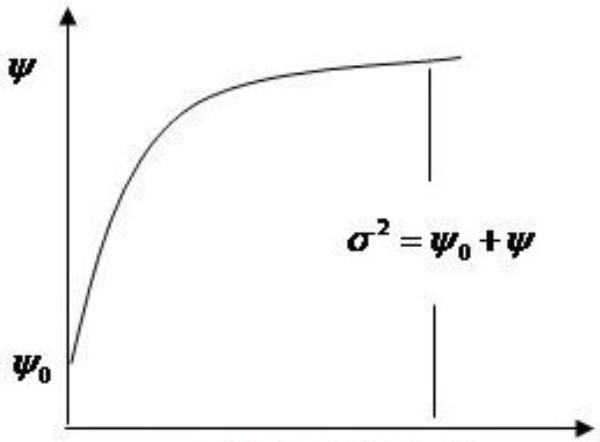
وذلك بعد افتراض النموذج الكروي انظر [5] ، [4]

٢- السبب في دراسة دالة الفايروكرام هو ان الصيغة الرياضية لها تمثل تباين الفرو قات بين المشاهدات المكانية التي تبعد عن بعضها البعض إزاحة h . وكلما ازدادت الإزاحة h بين المشاهدات كلما أصبح التغاير كبيرا حتى يستقر ارتفاعه عند مسافة معينة مثل $h=a$ وهذه المسافة a تسمى بالمدى (نصف ابعد مسافة بين نقطة مراد تقديرها مع النقاط البيانات المعلومة)وبعدها يلاحظ تلاشي التغاير في دالة الفايروكرام حيث يستقر بقيمة ثابتة تساوي تباين المشاهدات σ^2 ، وهذا التباين يدعى بـ (Sill) كما موضح بالشكل(1)



الشكل (1) يوضح العلاقة بين دالتي الفايروكرام المتقاطع والتغاير المتقاطع

وعندما تقترب h من الصفر من الجهة اليمين فأن دالة شبه الفايروكرام لا تساوي صفر وإنما لها قيمة تساوي ψ_0 وهذه الظاهرة تمثل عدم الاستمرارية او انقطاع دالة الفايروكرام عند $h=0$ وتسمى في مجال الاحصاء المكاني Nugget Effect وهي تمثل الأخطاء العشوائية في وحدات القياس عندما تتغير فجأة الإزاحة h من وحدات المليمتر الى وحدات المتر او الكيلومتر انظر الشكل (2)،انظر [1]



الشكل (2) يوضح ظاهرة
Negget effect

٧- أسلوب Co-kriging البسيط (الوسط ثابت ومعلوم)

المقدر **Co-kriging** البسيط **(SCK)** للقيمة $\hat{z}_1(x_0)$ في الموقع x_0 يعرف بالشكل الاتي :

$$\hat{z}_1(x_0) - m_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i [z_1(x_i) - m_1] + \sum_{j=1}^{m} b_j [z_2(x_j) - m_2] \qquad (10)$$

حيث ان a_i يمثل الاوزان المتغيرات الاولية $z_1(x_i)$ و b_j يمثل الاوزان المتغيرات الثانوية $z_2(x_i)$ و m_1 ، m_2 الوسط لكل منهم على التوالي ، ونفترض بأنهم ثابتين ومعلومين في منطقة الدراسة D . انظر [7]

هذا المقدر يكون غير متحيز عندما يكون $E[\hat{z}_1(x_0) - m_1] = 0$ لان $E[z_1(x)] = m_1, \forall x \in D$ وأيضا $E[z_2(x)] = m_2, \forall x \in D$ وتحت شروط $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ و $\sum_{i=1}^{m} b_i = 0$ انظر [9]

أما تباين الخطأ يكون بالشكل الاتي:

$$\operatorname{var}[\hat{z}_1(x_0) - z_1(x_0)] = \operatorname{var}[\hat{z}_1(x_0)] + \operatorname{var}[z_1(x_0)] - 2\operatorname{cov}[\hat{z}_1(x_0), z_1(x_0)]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j C(z_{1i} z_{1j}) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} b_i b_j C(z_{2i} z_{2j}) + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j C(z_{1i} z_{2j})$$

$$-2\sum a_i (z_{1i}, z_{10}) - 2\sum_{j=1}^{m} b_j C(z_{2j} z_{10}) + C(z_{10} z_{10}) \qquad (١١)$$

ولتقليل المقدار (11) أعلاه نوجد المشتقة الجزئية لها بالنسبة لكل من الاوزان a_i ، b_j ومساواتها للصفر نحصل على $n+m$ من معادلات **Co-kriging** البسيط وهي كالأتي:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_j C(z_{1i} z_{1j}) + \sum_{j=1}^{m} b_j C(z_{1i} z_{2j}) = C(z_{1i} z_{01}) & i = 1,2,......n \\ \sum_{i=1}^{m} b_i C(z_{2i} z_{2j}) + \sum_{i=1}^{n} a_i C(z_{1i} z_{2j}) = C(z_{2j} z_{01}) & j = 1,2,.....m \end{cases}$$

وبشكل مختصر :

$$\begin{bmatrix} C_{z_1 z_1} & C_{z_1 z_2} \\ C_{z_1 z_2} & C_{z_2 z_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{z_1 z_{01}} \\ C_{z_2 z_{01}} \end{bmatrix} \qquad (12)$$

حيث أن $\lambda = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} C_{z_1 z_{01}} \\ C_{z_2 z_{01}} \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} C_{z_1 z_1} & C_{z_1 z_2} \\ C_{z_1 z_2} & C_{z_2 z_2} \end{bmatrix}$

ثم نوجد معكوس C **لكي نحصل على الأوزان** λ **من العلاقة الآتية :**

$$\lambda = C^{-1} B \qquad (13)$$

تباين Co-kriging البسيط يعطى بالشكل:

$$\sigma^2_{CKS} = C(z_{10} z_{10}) - \sum_{i=1}^{n} a_i C(z_{1i} z_{10}) - \sum_{j=1}^{m} b_j C(z_{2j} z_{20}) \qquad (14)$$

٨- أسلوب Co-kriging الاعتيادي (الوسط ثابت وغير معلوم)

المقدر Co-kriging الاعتيادي OCK يكون كتركيب خطي لكل من المتغيرات الاولية والثانوية لقيم البيانات ، في هذه الحالة ايضا نفترض (الاستقرارية) الوسط ثابت ولكن غير معلوم في منطقة الدراسة D **لذا يتطلب منا تقدير الوسط ، ويكون المقدر Co-kriging الاعتيادي للنقطة** $z_1(x_0)$ **في الموقع** x_0 **بالشكل الاتي:**

$$\hat{z}_1(x_0) = \sum_{i=1}^{n} a_i z_1(x_i) + \sum_{j=1}^{m} b_j z_2(x_j) \qquad (15)$$

<u>شروط عدم التحيز لهذا المقدر</u>

$$E[R] = 0 = E[\hat{z}_{10} - z_{10}] = E[\sum_{i=1}^{n} a_i z_{1i} + \sum_{j=1}^{m} b_j z_{2j} - z_{10}]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i E[z_{1i}] + \sum_{j=1}^{m} b_j E[z_{2j}] - E[z_{10}] = m_1 \sum_{i=}^{n} a_i + m_2 \sum_{j=1}^{m} b_j - m_1$$

إذن شرط عدم التحيز يتحقق على وفق القيود $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ و $\sum_{j=1}^{m} b_j = 0$

<u>لتقليل التباين لخطأ التقدير في</u> (11)<u> </u>تحت قيود عدم التحيز المذكورة بالشكل :

$$w = \mathrm{var}[R] + 2\mu_1(\sum_{i=1}^{n} a_i - 1) + 2\mu_2(\sum_{j=1}^{m} b_j)$$

نأخذ المشتقة الجزئية للمقدار المذكورة انفا بالنسبة لـ a_i ، b_j ، μ_1 ، μ_2 ومساواتها إلى الصفر نحصل على $(n+m+2)$ من المعادلات **Co-kriging** هي كالأتي :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_j C(z_{1_i} z_{1_j}) + \sum_{j=1}^{m} b_j C(z_{2_i} z_{1_j}) + \mu_1 = C(z_{1_i} z_{01}) & i = 1,2,.....n \\ \sum_{i=1}^{m} b_i C(z_{2_i} z_{2_j}) + \sum_{i=1}^{n} a_i C(z_{1_i} z_{2_j}) + \mu_2 = C(z_{2_j} z_{01}) & j = 1,2,.....m \\ \sum_{i=1}^{n} a_i = 1 \\ \sum_{i=1}^{m} b_i = 0 \end{cases}$$

حيث أن μ_1 ، μ_2 مضروب لاكرانج **Lagrange multipliers** .

وبشكل مختصر :

$$\begin{bmatrix} C_{z_1 z_2} & C_{z_1 z_2} & . & 1 & 0 \\ C_{z_1 z_2} & C_{z_2 z_2} & . & 0 & 1 \\ . & . & . & . & . \\ 1' & 0' & . & 0 & 0 \\ 0' & 1' & . & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ . \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{z_1 z_{01}} \\ C_{z_1 z_{01}} \\ . \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(16)}$$

حيث ان $\lambda = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} C_{z_1 z_{01}} \\ C_{z_2 z_{01}} \end{bmatrix}$

$$C = \begin{bmatrix} C_{z_1 z_2} & C_{z_1 z_2} & . & 1 & 0 \\ C_{z_1 z_2} & C_{z_2 z_2} & . & 0 & 1 \\ . & . & . & . & . \\ 1' & 0' & . & 0 & 0 \\ 0' & 1' & . & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ثم نوجد معكوس C لكي نحصل على الأوزان λ من العلاقة الآتية :

$$\lambda = C^{-1} B \qquad \textbf{(17)}$$

وان تباين **Co-krging** الاعتيادي يعطى بالشكل :

$$\sigma^2_{OCK} = C(z_{10} z_{10}) - \sum_{i=1}^{n} a_i C(z_{1_i} z_{10}) - \sum_{j=1}^{m} b_j C(z_{2_j} z_{10}) - \mu_1 \qquad \textbf{(18)}$$

٩- **اسلوب** Co-kriging **للأوساط مترابطة وغير معلومة**

Co-kriging سيتغير اذا كانت الاوساط المفروضة مترابطة ولكن غير معلومة وعلى سبيل المثال المتغيرين

$z_1(x)$ ، $z_2(x)$ بوسطين غير معلومين ولكن متساويين أي $m_1 = m_2$ فعندئذ

<u>شروط عدم التحيز يكون:</u>

$$E[\hat{z}_1(x_0) - z_1(x_0)] = E[\sum_{i=1}^{n} a_i z_1(x_i) + \sum_{j=1}^{m} b_j z_2(x_j) - z_1(x_0)]$$

$$= m_1[\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{j=1}^{m} b_j - 1]$$

إذن شرط عدم التحيز يتحقق تحت قيد $\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{j=1}^{m} b_j = 1$

<u>ولتقليل تباين الخطأ</u> في (11) على وفق القيد المذكورة انفا يكون لدينا

$$w = \text{var}[R] + 2\mu(\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{j=1}^{m} b_j - 1)$$

وبعد إيجاد المشتقات الجزئية لها بالنسبة لـ a_i ، b_j ، μ نحصل على نظام معادلات **Co-kriging** الاتي:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_j C(z_{1_i} z_{1_j}) + \sum_{j=1}^{m} b_j C(z_{2_i} z_{1_j}) + \mu = C(z_{1_i} z_{01}) & i = 1,2,.....n \\ \sum_{i=1}^{m} b_i C(z_{2_i} z_{2_j}) + \sum_{i=1}^{n} a_i C(z_{1_i} z_{2_j}) + \mu = C(z_{2_j} z_{01}) & j = 1,2,.....m \\ \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{j=1}^{m} b_j = 1 \end{cases}$$

وبشكل مختصر

$$\begin{bmatrix} C_{z_1z_1} & C_{z_1z_2} & . & 1 \\ C_{z_2z_1} & C_{z_2z_2} & . & 1 \\ . & . & . & . \\ 1' & 1' & . & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ . \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{z_1z_{01}} \\ C_{z_2z_{01}} \\ . \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(19)}$$

حيث أن $\lambda = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} C_{z_1z_{01}} \\ C_{z_2z_{01}} \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} C_{z_1z_1} & C_{z_1z_2} & . & 1 \\ C_{z_2z_1} & C_{z_2z_2} & . & 1 \\ . & . & . & . \\ 1' & 1' & . & 0 \end{bmatrix}$

ثم نوجد معكوس C لكي نحصل على الأوزان λ من العلاقة الآتية :

$$\lambda = C^{-1}B \qquad \textbf{(20)}$$

وان μ مضروب لاكرانج **Lagrange multipliers** اما تباين التقدير فيحسب من الصيغة الاتية:

$$\sigma^2_{LCK} = C(z_{10}z_{10}) - \sum_{i=1}^{n} a_i C(z_{1i}z_{10}) - \sum_{j=1}^{m} b_j C(z_{2j}z_{10}) - \mu \qquad (21)$$

أن مصفوفة التغاير C في حالات الثلاثة لـ Co-kriging يجب أن يكون أكيدة – ايجابية **Positive definition** لكي نضمن الحصول على معكوسها ،عندئذ يمكن أن نقدر الأوزان λ وذلك من المعادلة :

$$\lambda = C^{-1}B \qquad (22)$$

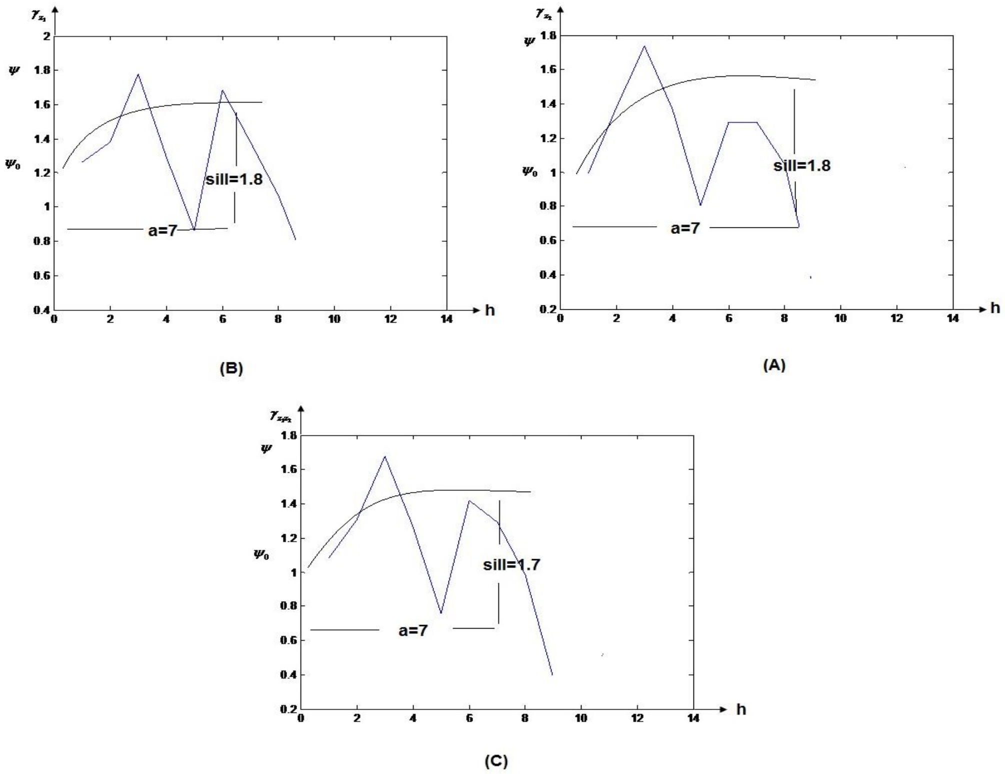
ومن الجدير بالذكر فأنه قد $C_{z_1z_2}(h) \neq C_{z_2z_1}(h)$ ، وعليه فأن دالة التغاير المشترك ليس مضمون بان تكون متناظرة. انظر [8] ، [9]

الجانب التطبيقي :

تم تطبيق هذا البحث على بيانات حقيقية في مجال محصول زراعة الحنطة في العراق وقد حصلنا على هذه البيانات من (المجموعة الإحصائية السنوية) الصادرة عن وزارة التخطيط / الجهاز المركزي للإحصاء لسنة 2008-2009 ، نلاحظ من البيانات والمبينة في الجدول (1) في الملحق إن كل محافظة يتمثل موقع ولها إحداثيات حيث $u(x)$ يمثل شرق غرب و $v(x)$ يمثل شمال جنوب ، فضلا عن ذلك فأن هناك متغيرين لكل موقع أحداها هو كمية المحصول الحنطة وهي تمثل المتغيرات الأساسية (الأولية) والمراد تقدير احد نقاطها غير المقيسة ، إما الثاني فهو مساحة الأراضي المزروعة وهي تمثل المتغيرات المساعدة (الثانوية) والتي كانت لها ارتباط قوي مع الأول إذ كانت تساوي $r = 0.9$ ، ومن جدير بالذكر إن البيانات المكانية يجب أن تكون ذات توزيع طبيعي لذا فقد استخدامنا العلاقة $Y = \log(z(x) + A)$ لضمان الحصول على هذا التوزيع للبيانات ، حيث فرضنا أن الثابت $A = 10$ انظر [1]

طبيعة هذه البيانات كانت مطابقة لشروط Co-kriging البسيط إذ كانت الوسط معلوم وثابت في منطقة الدراسة ، ويمكن تطبيقها على Co-kriging الاعتيادي وذلك بعد افتراض أن الوسط غير معلوم ولكن ثابت في منطقة الدراسة وبذلك يتم تقدير الوسط $E(x)$ ، أما أسلوب الثالث لـ Co-kriging للتقدير لا يمكن تطبيقها على هذه البيانات وذلك لعدم التساوي الوسط بين المتغيرين الأولية والثانوية للبيانات ، إذ أن $E[z_1(x)] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_1(x_i) = 11.2745$ و $E[z_2(x)] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_2(x_i) = 12.3089$

من هذه البيانات تم حساب الدالة الفايروكرام لكل متغير فضلا عن حساب الفايروكرام المتقاطع بين المتغيرين وذلك من المعادلة (٦) والنتائج مبينة في الجدول (2) في الملحق ومن ثم رسم العلاقة بين دالة الفايروكرام والمسافة h كما في الشكل (3)



الشكل (3) الرسم البياني لدالة الفايروكرام للمتغيرين
والفايروكرام المتقاطع

وهذا الشكل اقرب إلى النموذج الرياضي الكروي انظر [١] ، التي منها يصاغ صيغة دالة التغاير لكل من المتغيرين ودالة التغاير المتقاطع.من المعادلة (٩). وذلك بعد تقدير المعلمات a ، ψ ، ψ_0 من الرسم ، وان $\sigma^2 = sill = \psi_0 + \psi$ والقيم مبينة في الجدول (٢) في الملحق. إن تقدير المعلمات ψ_0 ، ψ ، σ^2 يجب أن تحقق شروط الآتية لكي نضمن إيجاد معكوس C

1- $\det\begin{bmatrix} \psi_{0z_1} & \psi_{0z_1z_2} \\ \psi_{0z_1z_2} & \psi_{0z_2} \end{bmatrix} > 0$ أي أن $\psi_{0z_1} > 0$ ، $\psi_{0z_2} > 0$

2- $\det\begin{bmatrix} \psi_{z_1} & \psi_{z_1z_2} \\ \psi_{z_1z_2} & \psi_{z_2} \end{bmatrix} > 0$ أي أن $\psi_{z_1} > 0$ ، $\psi_{z_2} > 0$

انظر [8] .

$$C_{z_1}(h) = \begin{Bmatrix} 1.8 & h = 0 \\ 0.8 * \left[1 - \frac{3h}{14} + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{7}\right)^3\right] & 0 < h \le 7 \\ 0 & h > 7 \end{Bmatrix} \qquad (23)$$

$$C_{z_2}(h)=\begin{cases}1.8 & h=0\\ 0.6*\left[1-\frac{3h}{14}+\frac{1}{2}\left(\frac{h}{7}\right)^3\right] & 0<h\le 7\\ 0 & h>7\end{cases} \quad (24)$$

$$C_{z_1z_2}(h)=\begin{cases}1.7 & h=0\\ 0.6*\left[1-\frac{3h}{14}+\frac{1}{2}\left(\frac{h}{7}\right)^3\right] & 0<h\le 7\\ 0 & h>7\end{cases} \quad (25)$$

إن عملية التقدير بطريقة لـ **Co-kriging** البسيط يستند إلى $\hat{z}(x_0)=E(x_0)+e(x_0)$ وبما أن $E[z_1(x_0)]=11.2745$ معلوم وثابت في منطقة الدراسة لذا يتطلب منا فقط التقدير $e(x_0)$ للنقطة غير المقاسة ، بذلك فأننا سنتعامل مع الأخطاء العشوائية للمتغيرات الأولية والثانوية كمتغيرات مستقلة للتقدير $e(x_0)$ هذه المتغيرات مبينة في الجدول (١) في الملحق .

إذ يتم إيجاد مصفوفة المسافة بين المواقع المقاسة وذلك باستخدام قانون المسافة الاعتيادية $|h|=\sqrt{u^2(x)-v^2(x)}$ وبتطبيقها على المعادلات (23) ، (24) ، (25) نحصل على مصفوفة التغاير المتقاطع C ، وبتكرار العملية نفسها بين المواقع المقاسة والموقع المراد تقديرها نحصل على المتجه B وبعدها يتم إيجاد معكوس C^{-1} من اجل الحصول على متجه الأوزان $n\times 1$ للمتغيرات الأولية والثانوية وذلك بتطبيق المعادلة (13) وبضرب متجه الأوزان الناتجة في متجه الأخطاء العشوائية للمتغيرين الأولية والثانوية $1\times n$ نحصل على قيمة تقديرية لـ $\hat{e}(x_0)$ وقد كانت الناتج $\hat{e}(x_0)=0.0514$ وبعد جمع هذا المقدار مع الوسط $E[z_1(x_0)]$ المعلوم نحصل على $\hat{z}_1(x_0)=11.2745+0.0875=11.3620$ ، وان تباين هذا التقدير تم حسابه من المعادلة (14) والذي يساوي $\sigma^2_{sck}=0.0514$.

أما بالنسبة لـ **Co-kriging** الاعتيادي فأننا سوف نفترض ان الوسط غير معلوم ولكن ثابت في منطقة الدراسة لذا يتطلب تقديرها بالنسبة لـ $\hat{z}(x_0)$ مع تحقق القيود $\sum_{i=1}^{n}a_i=1$ و $\sum_{j=1}^{m}b_j=0$) إن هذين الشرطين لا يشترط تحقيقها في الطريقة السابقة) انظر [4] ، كما ويتم التعامل مع المتغيرات الأولية والثانوية كمتغيرات مستقلة في تقدير $\hat{z}(x_0)$ وليس مع الأخطاء العشوائية ، وبطريقة مماثلة لأسلوب **Co-kriging** البسيط يتم إيجاد مصفوفة المسافة الاعتيادية بين المواقع المقاسة ونطبقها على المعادلات (23)، (24) ، (25) حيث نحصل على المصفوفة التغاير المتقاطع C ومن ثم المعكوس C^{-1} ، وتتكرر العملية نفسها بين المواقع المقاسة والموقع المراد تقديرها لكي نحصل على المتجه B وبعدها يتم والتي بدورها يعطينا متجه الأوزان $n\times 1$ للمتغيرات الأولية والثانوية وذلك من المعادلة (17) وبضرب الناتج الأخير في قيم المتغيرين الأولية والثانوية للبيانات نحصل على $\hat{z}_1(x_0)$ ، وقد كان يساوي $\hat{z}(x_0)=11.3784$ والتباين التقدير لـ **Co-kriging** الاعتيادي فيحتسب من المعادلة (18) والتي كانت تساوي $\sigma^2_{ock}=1.6292$ وقد تم تصميم خوارزمية جميع العملية الحسابية في برنامج **Matlab** والنتائج مبينة في الجدول (3) .

الاستنتاجات :

١- يمكن استخدام بيانات مساعدة (الثانوية) secondary variable للبيانات الأساسية (الأولية) Primary variable في تقدير نقاطها غير المعلومة بطريقة تسمى Co-kriging.

٢- يمكن تطبيق اسلوب Co-kriging في تقدير على مجالات عديدة مثل التقدير كمية المحاصيل الزراعية.

٣- يمكن إجراء عملية التقدير بأسلوب Co-kriging في حالة كون الوسط ثابت ومعلوم أو ثابت وغير معلوم وكذلك في حالة كون الوسط بين المتغيرات الأولية والثانوية متساوية ومعلومة .

- التوصيات :

١- يفضل أن تكون البيانات كبيرة لان ذلك يعطينا نتائج أدق .

٢- الاستعانة بمهندس مساح في تحديد إحداثيات النقاط المقاسة وغير المقاسة .

٣- اختيار النموذج الملائم من خلال الرسم البياني بين الدالة الفايروكرام المتقاطع والإزاحة h وإلا سوف نحصل على نتائج غير دقيقة.

- المصادر :

١- محمد نذير إسماعيل و جعفر موسى محمد؛ (2007)؛ "الإحصاء المكاني في تقدير التلوث البيئي" ؛ المجلة العراقية للعلوم الإحصائية ؛ العدد (11) ؛ جامعة الموصل.

٢- محمد نذير إسماعيل وعلي محمود جمعة العكيدي ؛ (٢٠١٣) "الكوكريكنك المشترك الشامل للعملية العشوائية المكانية غير المراوحة مع تطبيق على بيانات الآبار في منطقة وانه / شمال العراق. المجلة العراقية للعلوم الإحصائية؛ العدد (٢٥) ؛ جامعة الموصل ص [217-238].

٣ - Cressie N. (1993)," Statistics for Spatial Data", Wiley, New York.

٤-Denis Marcotte." Cokriging with matlab. Computers and Geosciences",17(9): 1265- 1280, 1991.

٥ - GOULARD, M. and VOLTZ, M. "Linear Co regionalization Model: Tools for Estimation and Choice of Cross-variogram matrix ", Mathematical Geology, vol. 24, 1992, pp. 269–286

MYERS, D.E. "Matrix Formulation of Cokriging ", Mathematical Geology, vol. 14, no. 3. 1982. pp. 249–257.

٦ - G. J. Lasinio and S. L. ISTAT , " A Multivariate Geostatistical Technique: kriging on factors", Dip. Statistica ,Probabilit`a e Statistiche Applicate, Universit`a di Roma ”La Sapienza” Giovanna.jonalasinio@uniroma1.it , silvia. loriga@ istat. it

٧ - J.W. Einax (1998) , "Geostatistical and multivariate statistical methods for the assessment of polluted soils—merits and limitations" , Institute of Inorganic and Analytical Chemistry, Friedrich Schiller UniÍersity Jena, Lessingstr. 8, D-07743 Jena, Germany.

٨- Jonathan D . Istok, Jeffrey D .Smyth, and Alan L . Flint (1993) ," Multivariate Geostatistical Analysis of Ground- Water contamination: A case History " Vol 31, NO 1-GROUND WATER.

٩ -Jona Lasinio G. (2001), " Modeling and exploring multivariate spatial variation: A test procedure for isotropy of multivariate spatial data ", Journal of Multivariate Analysis, 77, 295–317.

١٠- Jacques RIVOIRARD (2003),"COURSE ON MULTIVARIATE GEOSTATISTICS" .centre de geostatistique 35 rue saint-honore 77305 fontainebleau(France) ,TEL:33-1 64 69 47 81 FAX:33-1 64 69 47 05 , http://cg.ensmp.fr.

١١ - M. G. Genton and William Kleiber (2014), "Cross-Covariance Functions for Multivariate Geostatistics, Department of Applied Mathematics", University of Colorado, Boulder, CO 80309-0526, USA. E-mail: william.kleiber@colorado.edu.

Estimation Multivariate data points in spatial statistics with application

Abstract

This paper deals to how to estimate points non measured spatial data when the number of its terms (sample spatial) a few, that are not preferred for the estimation process, because we also know that whenever if the data is large, the estimation results of the points non measured to be better and thus the variance estimate less, so the idea of this paper is how to take advantage of the data other secondary (auxiliary), which have a strong correlation with the primary data (basic) to be estimated single points of non-measured, as well as measuring the variance estimate, has been the use of technique Co-kriging in this field to build predictions spatial estimation process, and then we applied this idea to real data in the cultivation of wheat crop in Iraq, where he was be considered the amount of production is the basic data (variable primary) and want to estimate a single points of non measured and the cultivated area (variable secondary) has been programming all calculations language Matlab.

key words: Co-kriging - Multivariate random fields - Cross -Covariance Functions - Spatial statistics.