المقارنة بين بعض الطرائق المعروفة وطريقة مقترحة لتقدير معلمة القياس ودالة معولية توزيع رالي ذي المعلمتين بواسطة المحاكاة

م. بيداء اسماعيل عبد الوهاب
مركز الحاسبة الالكترونية
كلية الادارة والاقتصاد/ جامعة بغداد

الخلاصة

استخدم توزيع رالي ذي المعلمتين (α, θ) بصورة واسعة في نمذجة بيانات اوقات الحياة للوحدات المنتجة، وله تطبيقات احصائية واسعة في تحليل اوقات الفشل، وتنبؤات اوقات الفشل، ولاهمية هذا التوزيع سوف نعتمد في هذا البحث اربعة طرائق لتقدير معلمة القياس θ ودالة المعولية باعتبار ان معلمة الازاحة α معلومة، والطرائق هي الامكان الاعظم، ومقدر بيز الاعتيادي، ومقدر بيز المطور، والمقدر **Minimax**، وتنفذ المقارنة بواسطة تجارب المحاكاة ولحجوم عينات **(n=10, 25, 50)**، وتكرار كل تجربة **(R=500)**، واعتماد المقياس الاحصائي متوسط مربعات الخطأ كأساس للمقارنة. وسيتم اولاً عرض الجانب النظري وطرائق التقدير ثم جانب المحاكاة.

المصطلحات الرئيسة للبحث/ طريقة الامكان الاعظم- مقدر بيز – مقدر بيز المطور

مجلة العلوم
الاقتصادية والإدارية
المجلد ١٩
العدد ٧١
الصفحات ٣٨٤- ٤٠٤

هدف البحث

يهدف البحث الى اشتقاق صيغ لتقدير معلمة القياس θ ودالة معولية توزيع رايلي ذي المعلمتين، والمقدرات هي الامكان الاعظم، ومقدر بيز الاعتيادي، ومقدر بيز المطور، والمقدر **Minimax** لنوعين من دوال الخسارة هما دالة خسارة تربيعية **Quadratic loss function**، ودالة خسارة معدلة اسية خطية **Modified linear exponential loss function (MLINEX)**، وسوف تعرض نتائج المحاكاة من خلال توليد بيانات لعينات ذات حجوم **(n=10, 25, 50)** وتكرار كل تجربة **(R=500)** والمقارنة بواسطة المقياس الاحصائي **Mean Square Error (MSE)**.

المقدمة

يعتبر المقدر **Minimax** من المقدرات غير الكلاسيكية في مجال التقدير والاستدلال الاحصائي، وقد ادخل اولاً من قبل **Abraham (1945)** من مفهوم نظرية المباراة، والذي فتح افاق جديدة في نظرية التقدير وكذلك مقدرات بيز التي تعتبر المعلمة المراد تقديرها متغير عشوائي له توزيع احتمالي يحدد من الخبرة السابقة والبيانات المتاحة لدى الباحث، حيث ان العناصر المهمة في اسلوب المقدر **Minimax** هو نوعية المعلومات الاولية ودالة الخسارة المتمدة. وعليه في هذا البحث سوف يتم مقارنة اربعة طرائق لتقدير معلمة القياس ومعولية توزيع رايلي ذي المعلمتين (α, θ)، والطرائق هي الامكان الاعظم، ومقدر بيز الاعتيادي، ومقدر بيز المطور، ومقدر **Minimax** تحت دالة خسارة تربيعية، وايضاً مقدر **Minimax** تحت دالة خسارة معدلة اسية خطية **(MLINEX)**، ولأهمية توزيع رايلي باعتباره حالة خاصة من توزيع ويبل، ويستخدم في تحليل اشكال انتشار بيانات الاشعاع وبيانات الاشتغال لحين حصول الفشل، أرتأينا اشتقاق صيغ المقدرات الاربعة اعلاه، ثم اعتماد المحاكاة في المقارنة بين المقدرات ودالة المعولية.

الجانب النظري

تعرف الدالة الاحتمالية لتوزيع رالي ذي المعلمتين، باعتبار α معلمة الازاحة، θ معلمة القياس، بالدالة الاحتمالية التالية:

$$f(t;\alpha,\theta)=\begin{cases}\dfrac{2(t-\alpha)}{\theta}\, e^{-\dfrac{(t-\alpha)^2}{\theta}} & \alpha<t<\infty;\ \theta>0\\[2ex] 0 & o/w\end{cases} \qquad \text{.....(1)}$$

اما الدالة الاحتمالية التراكمية **c.d.f** فهي:

$$F(t,\alpha,\theta)=1-e^{-(t-\alpha)^2/\theta} \qquad t\ge\alpha \qquad \text{.....(2)}$$

ودالة المعولية للتوزيع هي:

$$R(t)=1-F(t)=e^{-\dfrac{(t-\alpha)^2}{\theta}} \qquad \alpha<t<\infty\ ;\ \theta>0$$

ويمثل توزيع رالي حالة خاصة من توزيع ويبل وله تطبيقات واسعة في اختبارات الحياة، كما اشار الى ذلك الباحث **Polavko**، وكذلك في التجارب الطبية المتعلقة ببحوث السرطان، كما اشار الى ذلك **Dyer & Whisenand(1973)**، واشار الباحثان **Alkutubi & Ibrahim** الى اهمية هذا التوزيع في التطبيقات الهندسية وما له صلة بمعولية المكائن. وفيما يلي شرح لطرائق تقدير معلمة القياس θ باعتبار ان معلمة الازاحة α معلومة.

اولاً: طريقة الامكان الاعظم **Maximum Likelihood Method (M.L.M)**

يعتبر مقدر الامكان الاعظم من المقدرات التي تتمتع بخصائص مهمة منها الكفاية والكفاءة والاشتقاق وخاصية الثبات، وهو المقدر الذي يجعل لوغارتم دالة الامكان الاعظم في نهايتها العظمى.
فاذا كانت لدينا عينة عشوائية $(t_1, t_2, ..., t_n)$ من التوزيع المعرف بالمعادلة (١)، فان دالة الامكان الاعظم هي:

$$L(t_1, t_2, ..., t_n; \alpha, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(t_i; \alpha, \theta) \qquad .....(3)$$

$$= 2^n \theta^{-n} \prod_{i=1}^{n} (t_i - \alpha)\, e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{(t_i-\alpha)^2}{\theta}}$$

وبادخال اللوغاريتم على طرفي المعادلة (٣) نحصل على:

$$LnL = nLn(2) - nLn(\theta) + \sum_{i=1}^{n} Ln(t_i - \alpha) - \sum_{i=1}^{n} \frac{(t_i-\alpha)^2}{\theta} \qquad .....(4)$$

ثم نشتق المعادلة (٤) بالنسبة الى θ لنحصل على:

$$\frac{\partial LnL}{\partial \theta} = \frac{-n}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^{n} (t_i-\alpha)^2}{\theta^2}$$

ثم نساوي المشتقة مع الصفر:

$$\frac{-n}{\hat{\theta}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{(t_i-\alpha)^2}{\hat{\theta}^2} = 0 \qquad .....(5)$$

ليكون مقدر الامكان الاعظم $\hat{\theta}_{ML}$ هو:

$$\hat{\theta}_{ML} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (t_i-\alpha)^2}{n} \qquad .....(6)$$

حيث ان معلمة الازاحة α معلومة.
وطبقاً لخاصية الثبات **Invariant property** التي تتميز بها مقدرات الامكان الاعظم، فان مقدر الامكان الاعظم لدالة المعولية سيكون:

$$\hat{R}_{ML}(t) = e^{-\frac{(t-\alpha)^2}{\hat{\theta}_{ML}}} \qquad .....(7)$$

ثانياً: مقدر بيز Bayes Estimator

يعتمد مقدر بيز على المعلومات الاولية المسبقة المتوفرة من الخبرة والبيانات السابقة عن المعلمة المطلوب تقديرها، باعتبار ان هذه المعلمة ليست ثابتة بل انها متغير عشوائي له توزيع احتمالي يسمى **Prior distribution**، وحسب التعريف العام اذا اعتبرنا ان:

$$g(\theta)=k\sqrt{I(\theta)} \qquad .....(8)$$

ويشير $I(\theta)$ الى معلومات فيشر وهي تساوي:

$$I(\theta)=-E\left(\frac{\partial^2 Log(L)}{\partial\theta^2}\right)$$

واذا اعتبرنا ان المعلومات الاولية عن θ هي:

$$g(\theta)=k\frac{\sqrt{n}}{\theta} \qquad .....(9)$$

يمكننا ايجاد مقدر بيز بوجود معلومات جيفري الاولية **Jeffrey prior**، وذلك باستخدام متوسط التوزيع اللاحق في حالة دالة الخسارة التربيعية، فان مقدر بيز لمعلمة القياس θ سيكون متوسط التوزيع اللاحق.

$$E(\theta\backslash t)=\int_0^\infty \theta\, f(\theta\backslash t)\,d\theta$$

اما كيفية الحصول على هذا التوزيع اللاحق فهذا يتطلب استخراج الدالة المشتركة، والدالة الحدية للمتغير **T**، ثم:

$$h(\theta\backslash t)=\frac{g(\theta,t)}{h(t)}$$

$$h(\theta\backslash t_1,t_2,...,t_n)=\frac{L(t_1,t_2,...,t_n;\alpha,\theta)\,g(\theta)}{\int_0^\infty L(t_1,t_2,...,t_n;\alpha,\theta)\,g(\theta)\,d\theta} \qquad .....(10)$$

$$h(t)=\int_0^\infty L(t_1,t_2,...,t_n;\alpha,\theta)\,g(\theta)\,d\theta=\int_0^\infty\frac{2^n}{\theta^n}\prod_{i=1}^n(t_i-\alpha)\,e^{-\frac{\sum_{i=1}^n(t_i-\alpha)^2}{\theta}}\,\frac{k\sqrt{n}}{\theta}\,d\theta$$

$$=k\,2^n\sqrt{n}\prod_{i=1}^n(t_i-\alpha)\int_0^\infty\frac{1}{\theta^{n+1}}e^{-\frac{\sum_{i=1}^n(t_i-\alpha)^2}{\theta}}\,d\theta$$

$$\therefore h(t)=k\,2^n\sqrt{n}\prod_{i=1}^n(t_i-\alpha)\frac{\Gamma n}{\left[\sum_{i=1}^n(t_i-\alpha)^2\right]^n}$$

وبعد ذلك يكون التوزيع اللاحق هو:

$$h(\theta \backslash t_1,t_2,\ldots,t_n)=\frac{\left[\sum_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)^2\right]^n}{\theta^{n+1}\,\Gamma(n)}\; e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)^2}{\theta}} \qquad \ldots..(11)$$

اما مقدر بيز للمعلمة θ باعتماد دالة خسارة تربيعية فهو يمثل متوسط التوزيع اللاحق:

$$\hat{\theta}_{Bayes}=E(\theta \backslash t)=\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)^2}{n-1} \qquad \ldots..(12)$$

وطبقاً لهذا المقدر يكون مقدر بيز لدالة المعولية:

$$\therefore \hat{R}_{Bayes}(t)=\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)^2}{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)^2+(t-\alpha)^2}\right]^n \qquad \ldots..(13)$$

ثالثاً: مقدر بيز المطور لمعلمة القياس θ:

يعتمد هذا المقدر على توسيع المعلومات الاولية لجيفري عن المعلمة θ ووضعها بالدالة:

$$g(\theta)=k\,\frac{n^c}{\theta^{2c}} \qquad \ldots..(14)$$

k ثابت.

وعند اخذ عينة عشوائية $(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ من الدالة الممثلة بالمعادلة (١)، فان التوزيع اللاحق باستخدام معلومات جيفري الموسعة سيكون:

$$h(\theta \backslash t_1,t_2,\ldots,t_n)=\frac{L(t_1,t_2,\ldots,t_n;\alpha,\theta)\,g(\theta)}{\int_0^{\infty}L(t_1,t_2,\ldots,t_n;\alpha,\beta)\,g(\theta)\,d\theta}$$

وبعد تطبيق التكامل واجراء تبسيطات معينة يكون التوزيع اللاحق لمعلمة القياس θ بوجود العينة $(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ هو:

$$h(\theta \backslash t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{\left[\sum_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)^2\right]^{n+2c-1} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)^2}{\theta}}}{\theta^{n+2c}\,\Gamma(n+2c-1)} \qquad \text{.....(15)}$$

ويشير الرمز Γ الى دالة كاما.

وعند استخدام دالة خسارة تربيعية **Squared Error Loss Function**، فان مقدر θ والذي سنرمز له $\hat{\theta}_{Mod}$ هو متوسط التوزيع اللاحق $E(\theta \backslash t)$ ويساوي:

$$E(\theta \backslash t) = \int_{0}^{\infty} \theta\, h(\theta \backslash t)\, d\theta \qquad \text{.....(16)}$$

$$\hat{\theta}_{Mod} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)^2}{n+2c-2}$$

وطبقاً لهذا المقدر المقترح يكون مقدر دالة المعولية لتوزيع رايلي باعتبار α معلومة و θ مقدرة هو:

$$R_{Mod}(t) = E_{post} R(t)$$

$$= \left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)^2}{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)^2 + (t-\alpha)^2}\right]^{n+2c-1} \qquad \text{.....(17)}$$

رابعاً: مقدر Minimax لمعلمة القياس θ:

اذا كانت لدينا عينة عشوائية $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ من توزيع رايلي المعرف بالمعادلة (١)، بمعلمة ازاحة α ومعلمة قياس θ، وبافتراض ان θ متغير عشوائي له توزيع سابق **prior distribution**:

$$g(\theta) = k\frac{\sqrt{n}}{\theta} \qquad \text{.....(18)}$$

فان التوزيع اللاحق سيكون:

$$g(\theta \backslash t_1, t_2, \ldots, t_n) = \frac{\left[\sum_{i=1}^{n} (t_i - \alpha)^2\right]^n}{\theta^{n+1}\Gamma(n)} \; e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n} (t_i - \alpha)^2}{\theta}} \qquad \theta > 0 \qquad \text{.....(19)}$$

ان المقدر **Minimax** للمعلمة θ تحت افتراض دالة خسارة تربيعية **Quadratic loss function** وكذلك دالة خسارة اسية خطية معدلة **Modified Linear Exponential (MLINEX)** هو:

$$L(\theta, d_1) = \left(\frac{\theta - d_1}{\theta}\right)^2 \qquad \text{.....(20)}$$

وطالما ان دالة المخاطرة **Risk Function** للمقدر $\hat{\theta}_{Minimax}$ هي:

$$Risk(\theta) = E\left\lfloor L(\theta, \hat{\theta}_{Minimax})\right\rfloor$$

$$= \int_0^{\infty} \left(\frac{\theta - d_1}{\theta}\right)^2 g(\theta \backslash t)\, d\theta \qquad \text{.....(21)}$$

$$= \int_0^{\infty} \left(\frac{\theta^2 - 2\theta d_1 + d_1^2}{\theta^2}\right) g(\theta \backslash t)\, d\theta$$

$$= \int_0^{\infty} g(\theta \backslash t)\, d\theta - 2d_1 \int_0^{\infty} \frac{1}{\theta} g(\theta \backslash t)\, d\theta + d_1^2 \int_0^{\infty} \frac{1}{\theta_1^2} g(\theta \backslash t)\, d\theta$$

$$Risk(\theta) = 1 - 2d_1 E\left(\frac{1}{\theta}\right) + d_1^2\, E\left(\frac{1}{\theta_1^2}\right) \qquad \text{.....(22)}$$

$$\frac{\partial Risk(\theta)}{\partial d_1} = -2E\left(\frac{1}{\theta}\right) + 2d_1\, E\left(\frac{1}{\theta_1^2}\right) = 0$$

$$\therefore d_1^* = \frac{E\left(\frac{1}{\theta}\right)}{E\left(\frac{1}{\theta_1^2}\right)} \qquad \text{.....(23)}$$

وبالنسبة لهذه التوقعات، فانها تساوي:

$$E\left(\frac{1}{\theta}\right) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\theta} g(\theta \backslash t)\, d\theta$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{\theta} \times \frac{T^n}{\theta^{n+1}\Gamma(n)}\, e^{-\frac{T}{\theta}}\, d\theta$$

وبافتراض ان:

$$z=\frac{T}{\theta} \quad \Rightarrow \quad \theta=\frac{T}{z}$$

$$d\theta=-\frac{T}{z^2}dz$$

وبعد تطبيق هذا التحويل واجراء التكامل، نجد ان:

$$E(\frac{1}{\theta})=\frac{\Gamma(n+1)}{T\,\Gamma(n)} \qquad .....(24)$$

وكذلك نستخرج $E(\frac{1}{\theta^2})$ ، حيث ان:

$$E(\frac{1}{\theta^2})=\int_0^\infty \frac{1}{\theta^2} g(\theta \backslash t)d\theta$$

$$=\int_0^\infty \frac{1}{\theta^2}\times\frac{T^n}{\theta^{n+1}\Gamma(n)}\,e^{-\frac{T}{\theta}}\,d\theta$$

وبافتراض ان:

$$Z=\frac{T}{\theta} \quad \Rightarrow \quad \theta=\frac{T}{Z}$$

$$d\theta=-\frac{T}{Z^2}dZ$$

نجد ان:

$$E(\frac{1}{\theta^2})=\int_0^\infty \frac{1}{\theta^2}\times\frac{T^n}{\theta^{n+1}\Gamma(n)}\,e^{-Z}(\frac{T}{Z^2})dZ$$

$$=\frac{1}{\Gamma(n)}\frac{1}{T^3}\int_0^\infty\left(\frac{T}{\theta}\right)^{n+3}\,e^{-Z}(\frac{T}{Z^2})dZ$$

$$=\frac{1}{\Gamma(n)}\,\frac{1}{T^2}\int_0^\infty Z^{n+1}\,e^{-Z}\,dZ$$

$$E(\frac{1}{\theta^2})=\frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(n)\,T^2} \qquad .....(25)$$

وعليه فان مقدر **Minimax** لمعلمة القياس θ لتوزيع رالي هو:

$$d_1^* = \frac{E(\frac{1}{\theta})}{E(\frac{1}{\theta_1^2})} = \frac{\frac{\Gamma(n+1)}{T\,\Gamma(n)}}{\frac{\Gamma(n+2)}{T^2\,\Gamma(n)}}$$

$$d_1^* = \frac{T\,\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+2)} = \frac{T\,n!}{(n+1)!} = \frac{T\,n!}{(n+1)n!}$$

$$\therefore d_1^* = \frac{T}{(n+1)} \qquad \text{.....(26)}$$

علماً بان $T = \sum_{i=1}^{n} (t_i - \alpha)^2$.

وطبقاً لهذا المقدر المقترح يكون مقدر دالة المعولية لتوزيع رايلي هو:

$$R_{\hat{\theta}_{Minimax}}(t) = E_{post}\,R(t)$$

$$= \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} (t_i - \alpha)^2}{\sum_{i=1}^{n} (t_i - \alpha)^2 + (t-\alpha)^2} \right]^n \qquad \text{.....(27)}$$

الجانب التجريبي

لغرض المقارنة بين المقدرات الثلاث لمعلمة القياس θ اعتمدت المحاكاة، حيث تم توليد البيانات من التوزيع المنتظم وتحويلها الى بيانات تتبع توزيع رايلي ذي المعلمين وباستخدام دالة التوزيع التجميعية وحسب طريقة التحويل العكسية التالية:

$$F(t,\alpha,\theta) = 1 - e^{-(t-\alpha)^2/\theta}$$

$$U = 1 - e^{-(t-\alpha)^2/\theta}$$

$$e^{-(t-\alpha)^2/\theta} = 1 - U$$

وبعد اجراء بعض التبسيطات، نحصل على:

$$\frac{-(t-\alpha)^2}{\theta}=Ln(1-U)$$

$$(t-\alpha)^2=-\theta Ln(1-U)$$

$$\therefore\ t=\alpha+\sqrt{-\theta Ln(1-U)} \qquad .....(28)$$

وتستخدم المعادلة (28) في توليد البيانات لحجوم عينات مختلفة وقيم مفترضة للمعلمة ($\alpha=0.5,1,1.5$) والمعلمة ($\theta=0.5,1,1.5$). وتستخرج المقدرات للمعلمة θ من تطبيق المعادلات (6) و (12) و (16) و (26)، ويعتمد المقياس متوسط مربعات الخطأ التكاملي **Integrated Mean Squared Error (IMSE)** الآتي:

$$IMSE=\frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}MSE(\hat{\theta}) \qquad .....(29)$$

حيث L عدد مرات تكرار التجربة، للحصول على المقدر الذي يمتلك اصغر IMSE، ومن ثم تعتمد هذه المعلمة في تقدير دالة المعولية. ولتنفيذ تجارب المحاكاة على قيم t_i المولدة من المعادلة (28)، وقد اخذت ثلاث حجوم للعينات هي (n=10, 25, 50) وكررت كل تجربة (L=500). واعطيت قيمة افتراضية لكل من (α,θ,c) (c ثابت جيفري)، والجداول التالية تلخص نتائج المحاكاة للطرق الاربعة.

جدول (1): يوضح تقديرات معلمة القياس $\hat{\theta}$ عند حجم العينة (n=10)

C	θ	α	$\hat{\theta}_{ML}$	$\hat{\theta}_{Bay}$	$\hat{\theta}_{Mod}$	$\hat{\theta}_{Minimax}$
1	0.5	0.5	0.217598	0.241776	0.217598	0.229051
		1	0.221377	0.245974	0.221377	0.233028
		1.5	0.215721	0.239690	0.215721	0.227075
	1	0.5	0.431709	0.479677	0.431709	0.454431
		1	0.434163	0.482404	0.434163	0.457015
		1.5	0.430138	0.477931	0.430138	0.452776
	1.5	0.5	0.642542	0.713935	0.642542	0.676360
		1	0.656165	0.729073	0.656165	0.690701
		1.5	0.642613	0.714014	0.642613	0.676435
1.5	0.5	0.5	0.216784	0.240872	0.197077	0.228194
		1	0.222429	0.247143	0.202208	0.234136
		1.5	0.218954	0.243282	0.199049	0.230477
	1	0.5	0.437285	0.485872	0.397532	0.460300
		1	0.429336	0.477041	0.390306	0.451933
		1.5	0.434527	0.482808	0.395025	0.457397
	1.5	0.5	0.652947	0.725496	0.593588	0.687312
		1	0.659930	0.733256	0.599936	0.694663
		1.5	0.669338	0.743709	0.608489	0.704566
2	0.5	0.5	0.214728	0.238587	0.178940	0.226030
		1	0.218278	0.242532	0.181899	0.229767
		1.5	0.216776	0.240862	0.180647	0.228185
	1	0.5	0.432351	0.48039	0.360292	0.455106
		1	0.427269	0.474744	0.356058	0.449757
		1.5	0.444409	0.493788	0.370341	0.467799
	1.5	0.5	0.651398	0.723776	0.542832	0.685682
		1	0.644022	0.71558	0.536685	0.677919
		1.5	0.648239	0.720265	0.540199	0.682358

جدول (٢): يوضح تقديرات معلمة القياس $\hat{\theta}$ عند حجم العينة (n=25)

C	θ	α	$\hat{\theta}_{ML}$	$\hat{\theta}_{Bay}$	$\hat{\theta}_{Mod}$	$\hat{\theta}_{Minimax}$
1	0.5	0.5	0.219162	0.228294	0.219162	0.223635
		1	0.219822	0.228981	0.219822	0.224308
		1.5	0.220991	0.230199	0.220991	0.225501
	1	0.5	0.440103	0.458440	0.440103	0.449084
		1	0.430234	0.448160	0.430234	0.439014
		1.5	0.429056	0.446933	0.429056	0.437812
	1.5	0.5	0.654308	0.681571	0.654308	0.667662
		1	0.646229	0.673155	0.646229	0.659417
		1.5	0.650412	0.677512	0.650412	0.663686
1.5	0.5	0.5	0.218789	0.227905	0.210373	0.223254
		1	0.214776	0.223726	0.206516	0.219160
		1.5	0.215546	0.224527	0.207256	0.219945
	1	0.5	0.429993	0.447909	0.413455	0.438769
		1	0.436789	0.454989	0.41999	0.445703
		1.5	0.427798	0.445622	0.411344	0.436528
	1.5	0.5	0.651044	0.678171	0.626004	0.664331
		1	0.645981	0.672897	0.621136	0.659165
		1.5	0.656181	0.683522	0.630943	0.669572
2	0.5	0.5	0.218787	0.227903	0.20258	0.223252
		1	0.214630	0.223573	0.198732	0.219010
		1.5	0.216279	0.225291	0.200259	0.220693
	1	0.5	0.432923	0.450962	0.400855	0.441758
		1	0.435581	0.453730	0.403316	0.444471
		1.5	0.433320	0.451374	0.401222	0.442163
	1.5	0.5	0.643714	0.670535	0.596031	0.656850
		1	0.642799	0.669582	0.595184	0.655918
		1.5	0.652044	0.679212	0.603744	0.665351

جدول (3): يوضح تقديرات معلمة القياس $\hat{\theta}$ عند حجم العينة (n=50)

C	θ	α	$\hat{\theta}_{ML}$	$\hat{\theta}_{Bay}$	$\hat{\theta}_{Mod}$	$\hat{\theta}_{Minimax}$
1	0.5	0.5	0.219004	0.223473	0.219004	0.221216
		1	0.220022	0.224513	0.220022	0.222245
		1.5	0.216799	0.221223	0.216799	0.218988
	1	0.5	0.431812	0.440625	0.431812	0.436174
		1	0.432074	0.440892	0.432074	0.436438
		1.5	0.431940	0.440755	0.431940	0.436303
	1.5	0.5	0.657175	0.670586	0.657175	0.663813
		1	0.655712	0.669094	0.655712	0.662335
		1.5	0.651321	0.664613	0.651321	0.657900
1.5	0.5	0.5	0.215505	0.219903	0.211279	0.217682
		1	0.218442	0.2229	0.214159	0.220649
		1.5	0.215799	0.220203	0.211568	0.217979
	1	0.5	0.432891	0.441726	0.424403	0.437264
		1	0.436145	0.445046	0.427593	0.440550
		1.5	0.436713	0.445625	0.428150	0.441124
	1.5	0.5	0.651578	0.664875	0.638801	0.658159
		1	0.651176	0.664465	0.638407	0.657753
		1.5	0.645494	0.658668	0.632837	0.652015
2	0.5	0.5	0.216852	0.221278	0.208512	0.219043
		1	0.217241	0.221675	0.208886	0.219435
		1.5	0.217305	0.221740	0.208947	0.219500
	1	0.5	0.434631	0.443500	0.417914	0.439021
		1	0.436079	0.444979	0.419307	0.440484
		1.5	0.436260	0.445163	0.419480	0.440666
	1.5	0.5	0.650870	0.664153	0.625837	0.657445
		1	0.650310	0.663581	0.625298	0.656879
		1.5	0.652095	0.665403	0.627014	0.658682

جدول (4)

يوضح متوسط مربعات الخطأ لتقديرات معلمة القياس $\hat{\theta}$ عند حجم العينة (n=10)

C	θ	α	IMSE			
			$\hat{\theta}_{ML}$	$\hat{\theta}_{Bay}$	$\hat{\theta}_{Mod}$	$\hat{\theta}_{Minimax}$
1	0.5	0.5	0.008424	0.007222	0.008424	0.007838
		1	0.008212	0.007007	0.008212	0.007625
		1.5	0.008478	0.007265	0.008478	0.007888
	1	0.5	0.034080	0.029277	0.034080	0.031742
		1	0.034007	0.029248	0.034007	0.031689
		1.5	0.034421	0.029660	0.034421	0.032103
	1.5	0.5	0.076931	0.065997	0.076931	0.071614
		1	0.075771	0.065069	0.075771	0.070555
		1.5	0.078573	0.068026	0.078573	0.073434
1.5	0.5	0.5	0.008485	0.007287	0.009560	0.007902
		1	0.008253	0.007070	0.009321	0.007676
		1.5	0.008376	0.007180	0.009452	0.007793
	1	0.5	0.033390	0.028563	0.037723	0.031039
		1	0.034302	0.029493	0.038608	0.031962
		1.5	0.033957	0.029194	0.038237	0.031637
	1.5	0.5	0.075793	0.064977	0.085500	0.070526
		1	0.075241	0.064554	0.084870	0.070030
		1.5	0.073434	0.062672	0.083144	0.068185
2	0.5	0.5	0.008571	0.007368	0.010608	0.007985
		1	0.008399	0.007199	0.010440	0.007815
		1.5	0.008507	0.007315	0.010536	0.007927
	1	0.5	0.034224	0.029471	0.042313	0.031909
		1	0.034572	0.029775	0.042696	0.032238
		1.5	0.032887	0.028118	0.041049	0.030561
	1.5	0.5	0.076158	0.065370	0.094496	0.070905
		1	0.077452	0.066694	0.095702	0.072216
		1.5	0.076616	0.065818	0.094945	0.071359

جدول (5)

يوضح متوسط مربعات الخطأ لتقديرات معلمة القياس $\hat{\theta}$ عند حجم العينة (n=25)

C	θ	α	IMSE			
			$\hat{\theta}_{ML}$	$\hat{\theta}_{Bay}$	$\hat{\theta}_{Mod}$	$\hat{\theta}_{Minimax}$
1	0.5	0.5	0.003229	0.003033	0.003229	0.003132
		1	0.003218	0.003022	0.003218	0.003121
		1.5	0.003190	0.002995	0.003190	0.003093
	1	0.5	0.012839	0.012056	0.012839	0.012452
		1	0.013258	0.012477	0.013258	0.012872
		1.5	0.013349	0.012572	0.013349	0.012965
	1.5	0.5	0.029291	0.027534	0.029291	0.028422
		1	0.029899	0.028152	0.029899	0.029036
		1.5	0.029533	0.027777	0.029533	0.028665
1.5	0.5	0.5	0.003237	0.003042	0.003424	0.003141
		1	0.003323	0.003128	0.003509	0.003227
		1.5	0.003314	0.003119	0.003500	0.003218
	1	0.5	0.013256	0.012474	0.014001	0.012869
		1	0.013001	0.012221	0.013746	0.012615
		1.5	0.013373	0.012594	0.014116	0.012988
	1.5	0.5	0.029506	0.027751	0.031181	0.028639
		1	0.029940	0.028196	0.031605	0.029078
		1.5	0.029243	0.027492	0.030915	0.028378
2	0.5	0.5	0.003253	0.003058	0.003615	0.003157
		1	0.003338	0.003144	0.003700	0.003242
		1.5	0.003306	0.003112	0.003668	0.003211
	1	0.5	0.013148	0.012367	0.014603	0.012762
		1	0.013056	0.012277	0.014510	0.012671
		1.5	0.013143	0.012363	0.014597	0.012757
	1.5	0.5	0.029950	0.028194	0.033219	0.029083
		1	0.030054	0.028302	0.033315	0.029188
		1.5	0.029459	0.027705	0.032729	0.028592

جدول (6)

يوضح متوسط مربعات الخطأ لتقديرات معلمة القياس $\hat{\theta}$ عند حجم العينة (n=50)

c	θ	α	IMSE			
			$\hat{\theta}_{ML}$	$\hat{\theta}_{Bay}$	$\hat{\theta}_{Mod}$	$\hat{\theta}_{Minimax}$
1	0.5	0.5	0.001597	0.001548	0.001597	0.001572
		1	0.001588	0.001539	0.001588	0.001563
		1.5	0.001624	0.001575	0.001624	0.001599
	1	0.5	0.006529	0.006333	0.006529	0.006431
		1	0.006518	0.006322	0.006518	0.006420
		1.5	0.006527	0.006332	0.006527	0.006430
	1.5	0.5	0.014381	0.013940	0.014381	0.014162
		1	0.014432	0.013991	0.014432	0.014213
		1.5	0.014595	0.014155	0.014595	0.014377
1.5	0.5	0.5	0.001638	0.001589	0.001686	0.001614
		1	0.001603	0.001554	0.001651	0.001579
		1.5	0.001635	0.001586	0.001683	0.001611
	1	0.5	0.006497	0.006301	0.006688	0.006399
		1	0.006434	0.006237	0.006625	0.006336
		1.5	0.006425	0.006229	0.006616	0.006327
	1.5	0.5	0.014577	0.014137	0.015007	0.014359
		1	0.014583	0.014142	0.015013	0.014364
		1.5	0.014773	0.014334	0.015203	0.014555
2	0.5	0.5	0.001623	0.001574	0.001718	0.001599
		1	0.001617	0.001567	0.001711	0.001592
		1.5	0.001618	0.001569	0.001712	0.001594
	1	0.5	0.006466	0.00627	0.006844	0.006368
		1	0.006440	0.006244	0.006818	0.006342
		1.5	0.006424	0.006227	0.006803	0.006326
	1.5	0.5	0.014590	0.014149	0.015440	0.014371
		1	0.014607	0.014167	0.015457	0.014388
		1.5	0.014551	0.014110	0.015401	0.014331

جدول (7)
يوضح تقديرات دالة المعولية لمعلمة
القياس $\hat{\theta}$ عند حجم العينة (n=10)

c	θ	α	$R_{\hat{\theta}_{ML}}(t)$	$R_{\hat{\theta}_{Bay}}(t)$	$R_{\hat{\theta}_{Mod}}(t)$	$R_{\hat{\theta}_{Minimax}}(t)$
1	0.5	0.5	0.813623	0.815496	0.799262	0.815496
		1	0.642525	0.648991	0.622324	0.648991
		1.5	0.055883	0.076414	0.060323	0.076414
	1	0.5	0.904995	0.905481	0.896582	0.905481
		1	0.796764	0.798967	0.781486	0.798967
		1.5	0.215994	0.238850	0.209000	0.238850
	1.5	0.5	0.935796	0.936022	0.929878	0.936022
		1	0.859336	0.860410	0.847699	0.860410
		1.5	0.354483	0.372569	0.339103	0.372569
1.5	0.5	0.5	0.819807	0.821538	0.775116	0.821538
		1	0.636249	0.642954	0.565637	0.642954
		1.5	0.058521	0.078817	0.040022	0.078817
	1	0.5	0.905101	0.905595	0.87925	0.905595
		1	0.796231	0.798428	0.747059	0.798428
		1.5	0.21823	0.241139	0.16231	0.241139
	1.5	0.5	0.93347	0.933713	0.914798	0.933713
		1	0.859634	0.860709	0.823289	0.860709
		1.5	0.361624	0.379443	0.288065	0.379443
2	0.5	0.5	0.815680	0.817494	0.740375	0.817494
		1	0.632982	0.639735	0.515118	0.639735
		1.5	0.057631	0.078132	0.025017	0.078132
	1	0.5	0.905508	0.905989	0.862660	0.905989
		1	0.802061	0.804142	0.722487	0.804142
		1.5	0.216382	0.239287	0.124694	0.239287
	1.5	0.5	0.933945	0.934183	0.903087	0.934183
		1	0.860126	0.861195	0.800046	0.861195
		1.5	0.357296	0.375294	0.236849	0.375294

جدول (8)

يوضح تقديرات دالة المعولية لمعلمة القياس $\hat{\theta}$ عند حجم العينة (n=25)

c	θ	α	$R_{\hat{\theta}_{ML}}(t)$	$R_{\hat{\theta}_{Bay}}(t)$	$R_{\hat{\theta}_{Mod}}(t)$	$R_{\hat{\theta}_{Minimax}}(t)$
1	0.5	0.5	0.824510	0.825144	0.818855	0.825144
		1	0.651095	0.653526	0.642606	0.653526
		1.5	0.058328	0.067144	0.060587	0.067144
	1	0.5	0.908281	0.908456	0.904981	0.908456
		1	0.806926	0.807688	0.800846	0.807688
		1.5	0.225584	0.235223	0.222356	0.235223
	1.5	0.5	0.938796	0.938873	0.936510	0.938873
		1	0.866179	0.866548	0.861613	0.866548
		1.5	0.367096	0.374338	0.360196	0.374338
1.5	0.5	0.5	0.828093	0.828698	0.810300	0.828698
		1	0.654347	0.656731	0.624718	0.656731
		1.5	0.055266	0.063964	0.046749	0.063964
	1	0.5	0.908275	0.908450	0.898070	0.908450
		1	0.806605	0.807372	0.787013	0.807372
		1.5	0.227238	0.236858	0.200259	0.236858
	1.5	0.5	0.93796	0.938039	0.930878	0.938039
		1	0.865114	0.865489	0.850666	0.865489
		1.5	0.367415	0.374649	0.333812	0.374649
2	0.5	0.5	0.828908	0.829507	0.799201	0.829507
		1	0.646506	0.648997	0.595792	0.648997
		1.5	0.057818	0.066587	0.039946	0.066587
	1	0.5	0.909236	0.909408	0.892343	0.909408
		1	0.804470	0.805252	0.771295	0.805252
		1.5	0.224315	0.233967	0.176569	0.233967
	1.5	0.5	0.937844	0.937924	0.925998	0.937924
		1	0.865756	0.866127	0.841669	0.866127
		1.5	0.362254	0.369588	0.304322	0.369588

جدول (9)

يوضح تقديرات دالة المعولية لمعلمة القياس $\hat{\theta}$ عند حجم العينة (n=50)

c	θ	α	$R_{\hat{\theta}_{ML}}(t)$	$R_{\hat{\theta}_{Bay}}(t)$	$R_{\hat{\theta}_{Mod}}(t)$	$R_{\hat{\theta}_{Minimax}}(t)$
1	0.5	0.5	0.829510	0.829804	0.826719	0.829804
		1	0.655822	0.656997	0.651524	0.656997
		1.5	0.052692	0.057135	0.054024	0.057135
	1	0.5	0.910324	0.910403	0.908698	0.910403
		1	0.809254	0.809621	0.806217	0.809621
		1.5	0.226859	0.231762	0.225172	0.231762
	1.5	0.5	0.939200	0.939236	0.938061	0.939236
		1	0.869084	0.869258	0.866829	0.869258
		1.5	0.372079	0.375685	0.368476	0.375685
1.5	0.5	0.5	0.829539	0.829833	0.820615	0.829833
		1	0.656356	0.657527	0.641267	0.657527
		1.5	0.053773	0.058208	0.049316	0.058208
	1	0.5	0.909894	0.909974	0.904844	0.909974
		1	0.809300	0.809667	0.799501	0.809667
		1.5	0.226473	0.231373	0.212206	0.231373
	1.5	0.5	0.940289	0.940323	0.936861	0.940323
		1	0.868839	0.869013	0.861734	0.869013
		1.5	0.370952	0.374570	0.353357	0.374570
2	0.5	0.5	0.829268	0.829562	0.814238	0.829562
		1	0.651835	0.653035	0.625910	0.653035
		1.5	0.054365	0.058833	0.044655	0.058833
	1	0.5	0.909239	0.909322	0.900729	0.909322
		1	0.808975	0.809343	0.792441	0.809343
		1.5	0.225778	0.230682	0.199687	0.230682
	1.5	0.5	0.939105	0.939141	0.933267	0.939141
		1	0.867930	0.868106	0.855934	0.868106
		1.5	0.373813	0.377403	0.342708	0.377403

الاستنتاجات:

يلاحظ من نتائج المحاكاة:

١. ان مقدرات بيز لمعلمة القياس θ تمتلك اصغر IMSE وخاصة بالنسبة لحجم العينة (n=50)، ثم ياتي مقدر Minimax بالدرجة الثانية، وان طريقه الامكان الاعظم كانت اسوأ طريقه مقارنة بالطرائق الاخرى.
٢. وجد ان قيم IMSE تتناقص كلما ازداد حجم العينة ولجميع المقدرات والحالات المدروسة من القيمة الاولية وهذا يتطابق مع النظرية الاحصائية.
٣. عندما افترضنا (c=1) بالنسبة لمعلومات جيفري لوحظ تناقص قيم IMSE، وهذا ايضاً يدعم صحة الجانب التجريبي من البحث.
٤. عندما افترضنا (c=1) بالنسبة لمعلومات جيفري لوحظ تطابق قيم $\hat{\theta}$ وكذلك قيم IMSE لطريقة بيز الموسع وطريقة الامكان الاعظم، وهذا ايضاً يدعم صحة الجانب التجريبي من البحث.

التوصيات:

١. يوصي الباحث بتطوير البحث ليشمل البيانات تحت المراقبه وتحت المراقبة التتابعية.
٢. يوصي الباحث بتطوير البحث ليشمل البيانات المفقودة.
٣. يمكن اعتماد طريقة بيز في البحوث التي تتطلب تقدير دالة معولية لتوزيع رايلي.

References

1- Dey, S. & Das, M. K., (2007); "A Note on Prediction Interval for a Rayleigh Distribution: Bayesian Approach"; American Journal of Mathematical and Management Science 27 (1&2), 43-48.
2- Dyer, D. D. & Whisenand, C. W. (1973); "Linear Unbiased Estimator of the Rayleigh-Distribution Part I: Small Sample Theory for Censored Order Statistics"; IEEE Transactions on Reliability R-(22) (1) 27-32.
3- Pazira, H. and Nasiri, P. (2009); "Minimax Estimation of the Parameter of the Generalized Exponential Distribution, Submitted.
4- Polavko, A. M. (1968); "Fundamentals of Reliability Theory"; New York: Academic Press.
5- Ragab, M. Z., (2002); "Inference for Generalized Exponential Distributions Based on Record Statistics"; Journal of Statistical Planning and Inference, 104, 339-350.
6- Saleem, M. and Aslam, M. (2008); "Bayesian Analysis of the Two Component Mixture of the Rayleigh Distribution with Uniform and Jeffrey Priors"; J. App. Statist. Science 16(4), 105-113.
7- Wang, J. and Li, Y. (2005); "Estimators for Survival Function When Censoring Times are Known"; Communications in Statistics-theory and Methods 34, 449-459.

Comparison between some well- Known methods to estimate the parameter of the proposed method of measurement and the reliability of the distribution function with two parameters Rally by simulation

Abstract

Rayleigh distribution is one of the important distributions used for analysis life time data, and has applications in reliability study and physical interpretations. This paper introduces four different methods to estimate the scale parameter θ, and also estimate reliability function; these methods are Maximum Likelihood, and Bayes and Modified Bayes, and Minimax estimator under squared error loss function, for the scale and reliability function of the generalized Rayleigh distribution are obtained. The comparison is done through simulation procedure, taking various sample size, and varying values of shifting parameter α. All the results of comparisons are explained in tables, and the comparison is done using MSE.

Key words / Maimum Like lihood Method- Bayes Estimator- Bayes developer estimator- Minimax estimator.