مقارنة بعض المقدرات المويجية لمعلمات أنموذج إنحدار خطي بأخطاء تتبع أنموذج (ARFIMA)

أ.م. باسم شليبة مسلم/ قسم الإحصاء / كلية الإدارة والإقتصاد / جامعة واسط
الباحث/ عمار مؤيد صابر/ قسم الإحصاء / كلية الإدارة والإقتصاد / جامعة بغداد

تاريخ التقديم:2017/10/3
تاريخ القبول: 2017/10/24

المستخلص

يهدف البحث إلى تقدير معلمات أنموذج الإنحدار الخطي بأخطاء تتبع أنموذج **ARFIMA** بالإسلوب المويجي المعتمد على طريقتي الإمكان الأعظم والمربعات الصغرى العامة التقاربية فضلا عن طريقة المربعات الصغرى الإعتيادية وقد تم تطبيق المقدرات عملياً على بيانات حقيقية تمثلت بالبيانات الشهرية لمعدل التغير في الرقم القياسي لسعر المستهلك (التضخم) (Inflation) ومدى تأثره في معدل سعر صرف الدولار (Dollar exchange rate) والتي تم الحصول عليها من التقارير السنوية للأرقام القياسية لأسعار المستهلك الصادرة من الجهاز المركزي للإحصاء – مديرية الأرقام القياسية للمدة من 2005/1 ولغاية 2015/12، وقد أثبتت طريقة التقدير المويجي المعتمد على طريقة الإمكان الأعظم كفاءتها على بقية الطرائق ولإمتلاك مقدرات الأنموذج أقل التباينات، كذلك أثبتت النتائج إن إختلاف قيم معلمة الفروق الكسرية في أنموذج ARFIMA لا تؤثر في تلك الطريقة.

المصطلحات الرئيسة للبحث/ المويجات، التحويل المويجي، أنموذج الإنحدار الخطي، أنموذج ARFIMA.

*البحث مستل من رسالة ماجستير

1. المقدمة (Introduction)

إن إجراء التحليل الإحصائي لظاهرة تحت الدراسة بإستعمال تحليل الإنحدار الخطي يفرض على الباحث التحقق من توفر الفرضيات الأساسية لأنموذج الإنحدار الخطي الذي يؤدي إلى ظهور مشاكل في حالة عدم تحققها ومن تلك الفرضيات إنعدام الإرتباط الذاتي بين الأخطاء العشوائية ولكن في الواقع التطبيقي قد لا تتحقق هذه الفرضية بحسب طبيعة بيانات الظاهرة المدروسة وعند ذاك يكون $(E(U_tU_s) \neq 0 , t \neq s)$ مما يدل على وجود مشكلة الإرتباط الذاتي.

ومن ناحية أخرى قد تتبع تلك الأخطاء أنموذجاً من نماذج السلسلة الزمنية عندما تأخذ بياناتها سلسلة زمنية كما في هذا البحث وكل ذلك يجعل من طريقة المربعات الصغرى **(Ordinary Least Squares)** أو طريقة الإمكان الأعظم **(Maximum Likelihood)** غير كفوءتين في عملية التقدير وعند ذاك يصبح التنبؤ للظاهرة غير جيد ومن تلك النماذج الأنموذج المختلط (الإنحدار الذاتي - الأوساط المتحركة) **(Auto Regressive Moving Averages model) ARMA** وتبعاً لهذا الأنموذج فإن السلسلة غالباً ما تكون غير مستقرة في الواقع التطبيقي وهذا يؤدي إلى أن الإرتباط الذاتي **(Auto Correlation)** للعينة سيتلاشى بشكل بطيء جدا وتكون مركبات التكرارات المنخفضة مهيمنة بشكل كلي على السلسلة الزمنية فتظهر أهمية أخذ الفروق **(Differences)** لجعل أنموذج **ARMA** مستقراً فيظهر أنموذج جديد هو إنموذج الإنحدار الذاتي والأوساط المتحركة التكاملي **(Auto Regressive Integrated Moving Averages model) ARIMA**، إن أخذ الفروق الأولى تؤدي إلى زيادة سرعة تلاشي الإرتباط الذاتي للسلسلة الزمنية في حين يبقى السلوك الإتجاهي لها، كما وإن قوة الطيف تقترب من التكرار الصفري وهذا يوجب أخذ الفروق مرة أخرى وتكون لدينا الفروق الثانية مما يظهر مشكلة جديدة إن قوة الطيف لا تكون قريبة من التكرار الصفري لأن مركبات التكرار المنخفض لاتمثل التكرارات الضعيفة إذ تضاف إليها التكرارات التي تم إزالتها من الفروق الأولى هذا من ناحية وإن قوة الطيف المنخفض القريبة من التكرار الصفري ليس بالضرورة أن تدل على إن الفروق الثانية غير إنعكاسية **(Non Invertible)** وهذا إشارة على إن البيانات من الممكن أن تكون فوق الفروق **(Over Differenced)** كل ذلك يدل على إن الفروق لا يمكن أن تؤخذ بعدد صحيح وقد يكون عدداً حقيقياً فينتج لنا أنموذج جديد هو أنموذج الإنحدار الذاتي والوسط المتحرك المتكامل كسريا **(Auto Regressive Fractionally Integrated Moving Average model) ARFIMA** وهو أحد نماذج الذاكرة الطويلة موضوع البحث.

فعندما تتبع الأخطاء العشوائية في أنموذج الإنحدار الخطي أنموذج **ARFIMA** يستوجب تقدير معلماته تبعاً لهذه الحالة ومن هنا جاءت فكرة البحث بإستعمال الإسلوب المويجي لكي تتناسب وطبيعة هذا الأنموذج.

2. تعاريف (Definitions)

2.1. أنموذج الإنحدار الذاتي والوسط المتحرك المتكامل كسريا (ARFIMA)

Auto Regressive Fractionally Integrated Moving Average model (ARFIMA)

في عام **1976** قدم الباحثان **Box & Jenkins** أنموذج **(Auto Regressive Integrated Moving Average) ARIMA** وهو أنموذج مستقر ومنعكس **(Stationary and Invertible)** والذي ينتج من أخذ الفروق لأنموذج الإنحدار الذاتي والوسط المتحرك **ARMA(p, q)** المعرف أدناه [(11)]:

$$Y_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^{p} \phi_i Y_{t+i} + e_t - \sum_{j=1}^{q} \theta_j e_{t-j} \qquad \dots(1)$$

$$\left(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p\right) Y_t = \left(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q\right) e_t \qquad \dots(2)$$

وفي ضوء ما تقدم يمكن تعريف أنموذج **ARIMA** بالشكل **ARIMA(p, d, q)** أذ أن **(d)** يمثل الفروق التي تكون أعداداً صحيحة وغالبا ما يتعامل معها الباحثون على وفق هذا الفرض والصيغة العامة للأنموذج بعد أخذ الفروق هي [11]:

$$\phi(L)(1-L)^{d}Y_t = \theta(L)e_t \qquad \dots(3)$$

وللحصول على أنموذج خاصية الذاكرة الطويلة **ARFIMA** تؤخذ قيمة **(d)** أي عدد حقيقي (**Real number)** وعند ذاك تكون حالة موسعة لأنموذج **ARIMA** وتتميز نماذج **ARFIMA** بالإستقرارية والإنعكاسية [11].

وفي ضوء مما تقدم يمكن درج عدة حالات من قيمـة **(d)** كالآتي [4]:

1. تعتمد قيم **(d)** على العلاقة بينها وبين أس هرست والموضحة بالصيغة **(12)**.
2. عندما $\left(-\frac{1}{2} < d < 0\right)$ فإن السلسلة تكون غير مستمرة (متناوبة) **(Anti-persistent)**.
3. عندما تكون $(0 < d < \frac{1}{2})$ تظهر خاصية الذاكرة الطويلة للإنموذج.
4. عندما تكون $\left(\frac{1}{2} < d < 1\right)$ تكون العملية غير مستقرة.
5. عندما تكون $(d = 1)$ تتخذ السلسلة أنموذج **ARIMA** من درجة الفروق الأولى.
6. عندما تكون $(d = 0)$ تتخذ السلسلة أنموذج **ARMA**.

علماً أن السلسلة تكون مستقرة في التباين المشترك **(Covariance stationary)** عندما $\left(-\frac{1}{2} < d < \frac{1}{2}\right)$ وتكون معاملات الإرتباط الذاتي **(Autocorrelation coefficients)** تتناقص بشكل بطيء جدا على شكل قطع زائد **(Hyperbolic decay)**

تحدد المعلمة **(d)** في نماذج **ARFIMA(p, d, q)** سلوك الذاكرة الطويلة في حين تحدد المعلمتين **(p, q)** سلوك الذاكرة القصيرة ويمكن تمثيل أنموذج **ARFIMA(p, d, q)** بالصيغة الآتية [11]:

$$\phi(L)(1-L)^{d}Y_t = \theta(L)e_t \qquad \begin{cases} |d| < {}^{1}/_{2} \\ e_t \overset{i.i.d}{\sim} N(0,\sigma_e^2) \end{cases} \qquad \dots(4)$$

$$(1-L)^{d} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Gamma(s-d)L^{s}}{\Gamma(-d)\Gamma(s+1)} \qquad \dots(5)$$

أذ أن:

L: يمثل معامل الإزاحة **(Backshift operator)**.

$\phi(L)$: متعددة حدود الذاكرة القصيرة (سلسلة زمنية من نوع **AR** من الدرجة **p**) تمتلك جذور تقع خارج دائرة الوحدة **(Unit circle)**.

$\theta(L)$: متعددة حدود الذاكرة القصيرة (سلسلة زمنية من نوع **MA** من الدرجة **q**) تمتلك جذور تقع خارج دائرة الوحدة **(Unit circle)**.

e_t: تمثل التشويش الأبيض **(White noise)**.

وبالإعتماد على العلاقة ما بين معلمة **(d)** والإرتباط الذاتي $(\gamma = 2d = 2H - 1)$ يمكن كتابة دالة الكثافة الطيفية لأنموذج **ARFIMA(0, d, 0)** التي تكون قريبة من المقدار $\left(\frac{1}{f}\right)$ بالصيغة الآتية [(5)]:

$$S(f) = \sigma_e^2 |2\sin(\pi f)|^{-2d} \propto_{f\to 0} \frac{\sigma_e^2}{f^{2d}} \qquad \dots (6)$$

أذ أن: (f) يمثل التردد **(Frequency)**.

2.2 نظرية الموجات (Wavelets Theory)

أول من تطرق إلى المويجات هو عالم الرياضيات الفرد هار **(Alfrd Haar)** في العام **1909** أذ إقترح مويجة هار **(Haar's wavelet)**، ومن البحوث أستنتج إن المويجات (هي عبارة عن موجات صغيرة قيمتها (سعتها) **(Amplitude)** تبدأ من الصفر وبمدة زمنية محددة ووسط صفري)، علما إن هناك عدة أنواع من المويجات بالإعتماد على نوع البيانات من حيث كونها متقطعة **(Discrete)** أو مستمرة **(Continuous)** [(10)].

يتم إنشاء المويجات من دالة التدريج $\varphi(t)$ **(Scaling function)** أو تسمى أيضا الدالة الأم **(Mother function)** والدالة المويجية $\psi(t)$ **(Wavelet function)** وتسمى أيضا الدالة الأب **(Father function)**.

من خلال عمليات التوسيع **(Scaling)** والإنتقال **(Translate)** لكل من $\varphi(t)$ و $\psi(t)$ تنتج مجموعة من الدوال ذات بعدين (دوال التحويل المويجي للمراحل المتقدمة) كما موضح بالصيغ الآتية [(3)]:

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \qquad \dots (7)$$

$$\varphi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\varphi\left(\frac{t-b}{a}\right) \qquad \dots (8)$$

أذ أن:

$a \in \mathbb{R}_+$: يمثل معلمة القياس **(Scaling parameter)**.

$b \in \mathbb{R}$: يمثل معلمة الإنتقال **(Translation parameter)**.

$\psi_{a,b}(t)$: يمثل دالة المويجية أو التفصيلية **(Detailed or wavelet function)**.

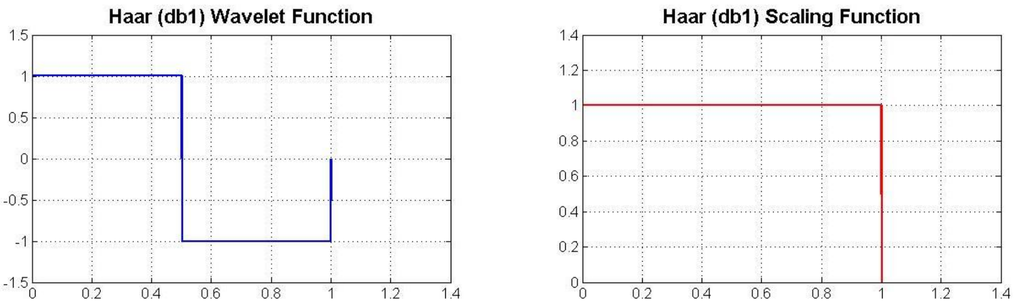
$\varphi_{a,b}(t)$: يمثل الدالة التقريبية أو التدريج **(Approximation or scaling function)**.

لذا يمكن تعريف التحويل المويجي على إنه مجموعة من الدوال الأساسية **(Basis functions)** $\psi_{jk}(x)$ المشتقة من دالة واحدة $\psi(x)$ من خلال توسيع القيمة والإزاحة خلال الزمن **(Dilations and Shifts)** للإشارة، وينقسم التحويل المويجي إلى التحويل المويجي المتقطع والتحويل المويجي المستمر تبعاً لنوعية البيانات [(10)].

هناك الكثير من الدوال الأساسية المختلفة في التحويل المويجي منها مويجة هار **(Haar wavelet)** والتي تعد أبسط أنواع المويجات وتأخذ شكل دالة خطوة **(Step function)** (وهي تمثل مويجة دوبجز ذات الدرجة الأولى **(Daubechies order 1 wavelet)** والموضحة بالشكل (1)[1] من حيث دالة المويجة **(Wavelet function)** ودالة القياس **(Scaling function)** [(2)].

[1] رسم من قبل الباحث بإستعمال برنامج الماتلاب.

شكل (1) يوضح مويجية هار ودالة القياس التابعة لها.



يعمل التحويل المتقطع على تحويل البيانات الأصلية أو متجه الإدخال من مجال الزمن (**Time domain**) إلى المجال المويجي (**Wavelet domain**)، والنتيجة متجة بنفس الحجم. يمكن تمثيل التحويل المويجي المتقطع كدالة خطية ويكتب بشكل مصفوفة تأخذ الأبعاد $(n \times n)$.

تتم عملية التحويل المويجي بعدد (J) من المراحل بعملية تدعى التحليل المتعدد المراحل (**MRA**) (**Multi Resolution Analysis**) حيث إن حجم العينة يجب أن يساوي لـ ($n = 2^J$) ويتم تقسيم البيانات أو الإشارة الأصلية إلى قسمين عن طريق المرشحات ويتم تقليل الحجم (2^J) بعملية إختزال (**Down sampling**) بمقدار (J-1) وفي المرحلة الثانية يتم تقسيم المعاملات التقريبية فقط الناتجة من المرحلة الأولى (السابقة) إلى قسمين أيضا من خلال المرشحات وتقليل الحجم وهكذا مع بقية المراحل وناتج العملية سيشمل المعاملات التفصيلية لأخر مرحلة وأخر قيمة من المعاملات التقريبية [8].

يتم الحصول على معاملات التحويل لمتجه بيانات $(\underline{y})$ بضرب المتجه بمصفوفة التحويل المويجي (W) وتم إستخدام مويجة هار كما موضح بالصيغة الآتية [2]:

$$\underline{w_y} = W.\underline{y} \qquad \dots(9)$$

أذ أن:

$\underline{w_y}' = [T_J \quad w_J \quad w_{J-1} \quad \cdots \quad w_1]$ يمثل متجه معاملات التحويل المويجي (**Transform Coefficients**).

T_J: أخر قيمة لمعاملات التحويل التقديرية (**Approximation**).

w_J: أخر قيمة لمعاملات التحويل المويجية (**Wavelet**).

$(w_{J-1} \quad \cdots \quad w_1)$: معاملات التحويل المويجية.

تتألف مويجة هار من دالتين أساسيتين $\psi(t)$ و $\emptyset(t)$ والتي تعطى بالصيغ الآتية [8]:

$$\psi_{i,j}(t) = 2^{i/2}\psi(2^i t - j) \quad , \quad i = 0, \dots, I-1 \quad \text{and} \quad j = 0, \dots, 2^i - 1 \qquad \dots(10)$$

$$\emptyset_{i,j}(t) = 2^{i/2}\emptyset(2^i t - j) \qquad \dots(11)$$

أذ أن:

$$\psi(t) = \begin{cases} +1 & 0 \le t < 1/2 \\ -1 & 1/2 < t \le 1 \\ 0 & O.W. \end{cases}$$

$$\emptyset(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le 1 \\ 0 & O.W. \end{cases}$$

كما في جميع التحويلات المويجية يقوم تحويل هار بتحلل الإشارة المتقطعة الأصلية إلى نصفين متساويين بالطول كإشارتين فرعيتين أحدهما ناتجة من المعدل **(Average)** وتمثل الإتجاه **(Trend)** والأخرى ناتجة من الفروق **(Difference)** وتمثل التذبذب **(Fluctuation)**.

2.3 أس هرست (Hurst exponent)

وهو يمثل معلمة الذاكرة الطويلة التي أكتشفها الباحث **(Hurst)** في عام **1951** عند دراسته لمستوى نهر النيل ضمن أبحاثه في مجال الري أذ أكتشف ظاهرة الاعتمادية الطويلة بين مشاهدات السلسلة الزمنية وقد وجد علاقة بين معلمة الذاكرة الطويلة ومعلمة التكامل الكسري **(Fractional Integrated) (d)** إذ إن [7]:

$$H = d + \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad d = H - \frac{1}{2} \qquad \dots(12)$$

وعليه فإن $(\gamma = 2d = 2H - 1)$.

وتتراوح قيمة أس هرست $(0 < H < 1)$ فكلما إقترب أس هرست من الصفر زادت عدم إستقرارية السلسلة وعندما يكون **(0.5)** تكون السلسلة غير مرتبطة وعندما يكون **(1)** تكون السلسلة مرتبطة وتظهر خاصية الذاكرة الطويلة.

3. أنموذج الإنحدار الخطي بأخطاء ذات ذاكرة طويلة

(Linear regression model with long range memory errors)

لنفرض لدينا أنموذج الإنحدار الخطي الآتي [9]:

$$Y = X\beta + u \qquad \dots(13)$$

أذ أن:

X: تمثل مصفوفة المتغيرات المستقلة بحجم $(n \times p)$ وإن $(X_{ij} \forall\, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, p)$.

$Y = (Y_1, \dots, Y_n)'$: المتغير المعتمد.

$\beta \in \mathbb{R}^p$: متجه المعلمات **(Parameters)**.

u: متجه الأخطاء العشوائية $u \sim N(0, \Sigma)$ بحجم $(n \times 1)$.

نفترض إن الأخطاء (u) لأنموذج الإنحدار الخطي في الصيغة **(15)** تأخذ شكل عملية مستقرة ذات خاصية الذاكرة الطويلة وتتبع أنموذج **ARFIMA** و إن $\left(0 < d < \frac{1}{2}\right)$ وسيتم تقدير أنموذج الإنحدار وفق ثلاث طرائق.

3.1. مقدرات المربعات الصغرى الإعتيادية
(Ordinary Least Square Estimators) OLS

إن مقدرات المربعات الصغرى للمتجه (β) للأنموذج في الصيغة (13) بتجاهل مشكلة خاصية الذاكرة الطويلة للأخطاء تعطى بالصيغة الآتية [1]:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y \qquad \dots(14)$$

وإن مصفوفة التباين والتباين المشترك المقدر للصيغة (14) يعطى بالصيغة الآتية:

$$var - cov(\hat{\beta}) = \sigma_e^2 (X'X)^{-1}X'\Omega X(X'X)^{-1} \qquad \dots(15)$$

أذ أن:

Ω: تمثل مصفوفة التباين والتباين المشترك للأخطاء العشوائية التي تتبع أنموذج **ARFIMA(p, d, q)**.

3.2. مقدرات المربعات الصغرى العامة التقاربية
(Approaching general least square estimators) AGLS

من ناحية أخرى فإن المقدر **(BLUE)** للمتجه (β) يأخذ الصيغة الآتية [1]:

$$\tilde{\beta} = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}Y \qquad \dots(16)$$

وتباينه يعطى بالصيغة الآتية:

$$Var(\tilde{\beta}) \approx \sigma_e^2 (X'\Omega^{-1}X)^{-1} \qquad \dots(17)$$

ولسهولة التعامل مع أنموذج **ARFIMA(p, d, q)** نأخذ أبسط أنواعه **ARFIMA(0,d,0)** والذي تكون صيغته كالآتي:

$$(1 - B)^d u_t = e_t \qquad \dots(18)$$

ولإيجاد مصفوفة التباين والتباين المشترك للأخطاء (u_t) يتم إيجاد الأخطاء المرتدة زمنيا فنحصل على قيمة الأخطاء العشوائية (u_t) في أنموذج الإنحدار (13) بصورة تشابه الصيغة الآتية:

$$u_t = e_t + d_1 e_{t-1} + \frac{d_2}{2!} e_{t-2} + \frac{d_3}{3!} e_{t-3} \dots \qquad \dots(19)$$

أذ أن: $d_1 = d \quad , \quad d_2 = d(d-1) \quad , \quad d_t = f(d) \quad , \quad t = 3, \dots, \infty$

ومن الصيغة (19) نستنتج أن قيم البسط المعتمدة على قيم (d) تتغير نتيجة التعويض ولكنها تضمحل مع التقدم في الزمن بحيث نستطيع أن نفترض امكانية الاستعانة بمصفوفة (Ω) المستعملة في طريقة المربعات الصغرى العامة (GLS) لتقدير معلمات أنموذج الإنحدار التي تكون أخطاؤه تتبع أنموذج AR(1) كحالة تقاربية كما في الصيغة الآتية [1]:

$$\Omega_d \approx \begin{bmatrix} 1 & d & d^2 & \dots & d^{n-1} \\ d & 1 & d & \dots & d^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d^{n-1} & d^{n-2} & d^{n-3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \qquad \dots(20)$$

$$\Omega_d^{-1} \approx \frac{1}{1-d^2} \begin{bmatrix} 1 & -d & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -d & 1+d^2 & -d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -d & 1+d^2 & -d & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \qquad \dots(21)$$

ومن ثم تكون مصفوفة التباين والتباين المشترك للأخطاء العشوائية لأنموذج الإنحدار بأخطاء تتبع أنموذج **ARFIMA(0,d,0)** بشكل تقاربي بالصيغة الآتية:

$$Euu' \approx \sigma_u^2 \Omega_d \quad \dots (22)$$

وإعتماداً على الصيغة (22) نعرف صيغة تقاربية لتقدير معلمات أنموذج الإنحدار كما في الصيغة (16).

3.3. المقدرات المويجية المعتمدة على دالة الإمكان الأعظم
Wavelet Generalized Maximum Likelihood (WML)

إن كون الأخطاء العشوائية (u) **(Random errors)** في الأنموذج (13) لها خاصية ذاكرة طويلة **(Long memory)** ومن ثم فإن التباين المشترك للأخطاء لها بُنية الذاكرة الطويلة والتي تُعلم بواحدة من رموز التشويش الكسري **(H or d)** فيكون $u \sim (0, \Sigma(H))$، وبالإعتماد على خاصية التعامد للتحويل المويجي المتقطع يمكن إفتراض إن قيم العناصر غير القطرية لمصفوفة التباين والتباين المشترك (Σ) هي قيم صفرية وهذا يجعل إيجاد معكوس المصفوفة (Σ^{-1}) أسهل [(5)].

يمكن إعادة كتابة الأنموذج (13) بالمجال المويجي **(Wavelet domain)** بعد عملية التحويل كالآتي:

$$Y_W = X_W \beta + \epsilon_W \quad \dots (23)$$

أذ أن:

$Y_w = W.Y$: يمثل متجه المتغير المعتمد ضمن المجال المويجي.

$X_w = W.X$: يمثل مصفوفة المتغيرات التوضيحية ضمن المجال المويجي.

β: معلمات الأنموذج.

$u_w = W.u$: تمثل متجه الأخطاء العشوائية بعد إجراء التحويل المويجي المتقطع على الأخطاء العشوائية الأصلية وإن (u) $(u_w \sim N(0, \Sigma_{u_w}) \;\; , \;\; \Sigma_{u_w} = \sigma^2 \Sigma_w)$.

W: تمثل مصفوفة التحويل المويجي المتقطع (مصفوفة هار).

يمكن كتابة دالة الإمكان للأنموذج في الصيغة (23) ضمن المجال المويجي وأخذ اللوغارتم لها كما بالصيغة الآتية [(5)]:

$$\log L(\theta) = -\frac{1}{2}\left[n\log(2\pi\sigma^2) + \log\left(S_{a_J}\right) + \sum_j n(j)\log\left(S_{d_j}\right) \right] - \frac{1}{2\sigma^2}\left[\frac{\left(Y_{J,0} - \sum_{s=1}^{p} X_{J,0}^{s}\beta_s\right)^2}{S_{a_J}} + \sum_{j,l} \frac{\left(Y_{j,l} - \sum_{s=1}^{p} X_{j,0}^{s}\beta_s\right)^2}{S_{d_j}} \right] \quad \dots (24)$$

أذ أن: $n(j) = {}^{n}/_{2^j}$.

ومصفوفة التباين والتباين المشترك للأخطاء تكون قطرية وكما في الصيغة الآتية:

$$\Sigma_{u_w} = \sigma^2 \begin{bmatrix} S_{aJ}(\gamma) & & & & \\ & S_{dJ}(\gamma) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \begin{pmatrix} S_{d_2}(\gamma) & & \\ & \ddots & \\ & & S_{d_2}(\gamma) \end{pmatrix} & \\ & & & & \begin{pmatrix} S_{d_1}(\gamma) & & \\ & \ddots & \\ & & S_{d_1}(\gamma) \end{pmatrix} \end{bmatrix} \quad \ldots (25)$$

$$\Sigma_{u_w} = \sigma^2 \Sigma_w \quad \ldots(26)$$

أذ أن:

$S_{a_J}(\gamma)$: يمثل تباين معامل التدريج (Scaling coefficient).

$S_{d_j}(\gamma)$: يمثل تباين معاملات المويجة (Wavelet coefficients).

أذ يمكن كتابة عناصر القطر الرئيس بدلالة المعلمة (d) التي تمثل معلمة الذاكرة الطويلة كالآتي:

$$S_{a_J}(\gamma) = \frac{C_f}{[1-2d]} \pi^{-2d} 2^{2Jd} = S_{a_J}(d) \quad \ldots(27)$$

$$S_{d_j}(\gamma) = \frac{C_f}{[1-2d]} \pi^{-2d} 2^{2jd} \left[2^{1-2d} - 1\right] = S_{d_j}(d) \quad \ldots(28)$$

أذ أن: $0 < C_f$.

ومن ثم فإن معكوس مصفوفة $\left(\Sigma_{u_w}\right)$ يعطى بالصيغة الآتية:

$$\Sigma_{u_w}^{-1} = \frac{1}{\sigma^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{S_{a_J}(d)} & & & & \\ & \frac{1}{S_{d_J}(d)} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \begin{pmatrix} \frac{1}{S_{d_2}(d)} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{S_{d_2}(d)} \end{pmatrix} & \\ & & & & \begin{pmatrix} \frac{1}{S_{d_1}(d)} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{S_{d_1}(d)} \end{pmatrix} \end{bmatrix} \quad \ldots (29)$$

في ضوء تعريف المصفوفة $\left(\Sigma_{u_w}^{-1}\right)$ يمكن كتابة دالة الإمكان كالآتي:

$$L(\theta) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}(\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}|\Sigma_w|^{-\frac{1}{2}}e^{\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(Y_w-X_w\beta)'\Sigma_w^{-1}(Y_w-X_w\beta)\right]} \quad \dots(30)$$

وبأخذ اللوغارتم للدالة السابقة نحصل على الآتي:

$$\log L(\theta) = -\frac{n}{2}\log 2\pi - \frac{n}{2}\log\sigma^2 - \frac{1}{2}\left[\log S_{a_J}(d) + \sum_j {}^{n}/_{2j}\log S_{dj}(d)\right]$$
$$-\frac{1}{2\sigma^2}[(Y_w - X_w\beta)'\Sigma_w^{-1}(Y_w - X_w\beta)] \quad \dots(31)$$

وبأخذ الإشتقاق بالنسبة (β) نحصل على تقديرها كما في الصيغة الآتية:

$$\hat{\beta} = (X_w{}'\Sigma_w^{-1}X_w)^{-1}X_w{}'\Sigma_w^{-1}y_w \quad \dots(32)$$

وتبايناتها تعطى بالصيغة الآتية:

$$v - cov(b) = \left(X_w'\Sigma_{u_w}^{-1}X_w\right)^{-1} = \sigma_e^2(X_w'\Sigma_w^{-1}X_w)^{-1} \quad \dots(33)$$

وبأخذ الإشتقاق بالنسبة (σ^2) نحصل على تقديرها كما في الصيغة الآتية:

$$\hat{\sigma}_{ML}^2 = \frac{1}{n}\left[\frac{a_{J,0}^2}{S_{a_J}} + \sum_{j,l}\frac{d_{j,l}^2}{S_{d_j}}\right] \quad \dots(34)$$

4. التطبيق العملي (Practical application)

تم تطبيق ما جاء في الجانب النظري على بيانات حقيقية بالإستعانة ببرنامج الماتلاب بنسخته **(MATLAB R2014a)**.

إستعملت البيانات الشهرية لمعدل التغير في الرقم القياسي لسعر المستهلك (التضخم) **(Inflation)** كمتغير معتمد ومعدل سعر صرف الدولار **(Dollar exchange rate)** كمتغير مستقل والتي تم الحصول عليها من التقارير السنوية للأرقام القياسية لأسعار المستهلك الصادرة من الجهاز المركزي للإحصاء – مديرية الأرقام القياسية للمدة من 2005/1 ولغاية 2015/12.

يعد التضخم من أبرز الظواهر الإقتصادية غير المرغوب فيها التي تعاني منها أغلب إقتصاديات دول العالم، لما له من تأثير على مجمل المجالات الإقتصادية والإجتماعية فضلاً عن تماسها مع حياة المواطن اليومية، ويمثل التضخم الإرتفاع المستمر والمتواصل في المستوى العام للأسعار، أذ تنجم هذه الظاهرة من عدم التوافق بين نمو أو حجم السيولة النقدية وبين نمو أو وفرة السلع والخدمات المتاحة في السوق، أو إنه ناجم عن إرتفاع تكاليف الإنتاج أو عن وجود فائض في الطلب أذ ان التضخم نتاج لعوامل متعددة تؤدي إلى إختلال في أسعار السلع والخدمات الإستهلاكية والإنتاجية وبين مستوى الأرباح ومستوى الأجور.

يعرف سعر الصرف بأنه النسبة التي يحصل على أساسها مبادلة النقد الأجنبي بالنقد الوطني، ويتم تحديده تبعاً للطلب والعرض عليها في سوق الصرف في لحظة زمنية ما، ولهذا يمكن أن يتغير سعر الصرف تبعا لتغير الطلب والعرض، وينقسم على سعر الصرف الرسمي (السعر المعمول به فيما يخص التبادلات التجارية الرسمية) وسعر الصرف الموازي (السعر المعمول به في الأسواق الموازية).

يمكن توضيح العلاقة بين التضخم وسعر صرف الدولار بأنه كلما زادت الكمية المعروضة من النقد بالدينار كلما انخفضت قيمة الدينار مقابل الدولار وهذا يعني كمية أكثر من الدينار يجب دفعها للحصول على الدولار وذلك يعني زيادة في أسعار السلع أو ما يعرف بالتضخم ومن ثم انخفاض مستوى الدخل الحقيقي للأفراد.

أفترضت معادلة الإنحدار كما في الصيغة الآتية:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + U_i \quad , \quad i = 1, \dots, 128 \quad \dots (36)$$

أذ أن:

Y_i: يمثل التضخم (معدل التغير في الرقم القياسي لأسعار المستهلك).

X_i: يمثل معدل سعر صرف الدولار.

U_i: يمثل الأخطاء العشوائية وعلى إفتراض إنها تتبع أنموذج ARFIMA.

ولتقدير معلمات الأنموذج المقترح تم تطبيق عدة إختبارات من حيث كونه خالي من المشاكل ومن خرق فرضياته ومن ثم تطبيق طرائق التقدير المذكورة في الجانب النظري للحصول على معادلة إنحدار ذات فاعلية في عملية التنبؤ المستقبلي وكذلك لإظهار إن طرائق التقدير المويجية هي الأفضل من طرائق التقدير التقليدية. بعد ثبوت عدم إستقرارية سلسلة الأخطاء للأنموذج المقترح ووجود مشكلة الإرتباطات بينها يتم تحديد قيمة معلمة الفروق الكسرية (d) على إفتراض أن سلسلة الأخطاء تتبع أنموذج ARFIMA وذلك من خلال إيجاد قيمة المعلمة هرست (H) بالطرائق المذكورة للحصول على قيم (d) بالإستعانة بالصيغة (12) وكما مبين في الجدول (1).

جدول (1) يبين قيم أس هرست وقيم معلمة الفروق الكسرية.

ت	الطريقة لإيجاد قيمة (H)	قيمة (H)	قيمة (d)
1	طريقة هيكوشي	0.841342331	0.341342331
2	طريقة العزوم	0.864617891	0.364617891
3	طريقة التباينات التجميعية	0.87270343	0.37270343
4	طريقة المدى المقيس	1.120432945	0.620432945

وتم إستعمال قيم (d) من كل الطرائق في عملية التقدير بإستثناء قيمة (d) المستخرجة بطريقة المدى المقيس (R/S analysis) كونها لا تقع ضمن المدى $(0 < d < 0.5)$ أي إنها طريقة غير فعالة لتقدير معلمة التكامل الكسري (d) في هذه الحالة ولنوعية البيانات المستعملة.

بعد الإنتهاء من تقدير قيمة معلمة الفروق الكسرية بالإعتماد على قيمة أس هرست يتم إجراء التحويل المويجي للبيانات الأصلية (المتغير المعتمد والمتغيرات التوضيحية) لحجم العينة المستعملة (n=256) وعليه تكون عدد مراحل التحويل المويجي (J) هي (J = 8) بحسب العلاقة $(n = 2^J)$.

تم تطبيق طرائق تقدير معلمات أنموذج الإنحدار (β) المذكورة آنفاً في الجانب النظري وكانت النتائج كما مبينة بالجدول (2)، علماً بأن المعلمة (σ_e^2) في طريقة (WML) تستخدم الصيغة المعرفة (34)، في حين أن الطريقتين (OLS) و (AGLS) نقدرها بإعتماد آلية $\left(\frac{SSE}{n-p}\right)$ كل بحسب فرضية الأنموذج علماً بأن الطريقة الثانية تعطي قيمة تقاربية وكما موضح بالجدول (2).

جدول (2) يبين مقدرات (β) وتقدير تبايناتها لكل الطرائق وحسب قيم (d).

طريقة WML	طريقة AGLS	طريقة OLS	المعلمات المقدرة	قيمة معلمة (d)
-125.2349215	-160.1728838	-164.702629	b0	0.341342331
10.55432482	243.9241124	402.9187075	v(b0)	
0.110695361	0.138374317	0.142021356	b1	
$6.27813*10^{-6}$	0.000152532	0.00025203	v(b1)	
3.805919671	97.20963874	158.755417	$\hat{\sigma}_e^2$	
0.98303616	0.669684094	0.557108288	R^2	

0.364617891	b0	-164.702629	-159.5688445	-122.2087728
	v(b0)	423.8065312	249.8095916	9.942125426
	b1	0.142021356	0.137889678	0.10829347
	v(b1)	0.000265071	0.00015619	$5.82139*10^{-6}$
	$\hat{\sigma}_e^2$	158.755417	94.85363343	3.256521886
	R^2	0.557108288	0.663265484	0.984538306
0.37270343	b0	-164.702629	-159.3433336	-121.1499559
	v(b0)	431.3990849	252.0235179	9.746139411
	b1	0.142021356	0.137708807	0.107453075
	v(b1)	0.000269811	0.000157566	$5.66713*10^{-6}$
	$\hat{\sigma}_e^2$	158.755417	94.08773962	3.084788569
	R^2	0.557108288	0.660869736	0.985048525

نلاحظ من الجدول (2) أن طريقة (WML) قد حققت أقل تباينات لجميع مقدرات (β) مقارنة بالطرائق المستعملة الأخرى وقد جائت بعدها طريقة (AGLS) وطريقة (OLS) على التوالي، كما ويلاحظ إن هذا التسلسل في الأسبقية هو نفسه عند تقدير معلمة (σ_e^2)، علما بأن الفارق كان كبيرا بين المقدرات المويجية والمقدرات التقليدية.

وإعتماداً على ما تقدم فإن المعادلة التقديرية للأنموذج المعرف بالصيغة (36) تعتمد على مقدرات (WML) أذ كانت قيمة معامل التحديد (R^2) تساوي ما نسبته 98% وهذا يعني قبول الأنموذج والمتبقي تعزى إلى أسباب غير محددة تفسر بالأخطاء.

ويلاحظ إن تغير قيم (d) لم يؤثر في ما تمت ملاحظته في الجدول (2) ومن ثم تكون طريقة (WML) هي الطريقة التي تعتمد في تقدير أنموذج الإنحدار بالصيغة (36)، علماً بأنه كلما صغرت قيمة (d) كلما تحسنت تقديرات المعلمات (β) و(σ_e^2) للأنموذج.

وعليه فإن الأنموذج المقترح للبيانات الحقيقية المستعملة في الجانب العملي يأخذ الصيغة الآتية:

$$Y_i = -125.2349215 + 0110695361X_i + U_i$$

علماً إن قيمة معلمة الفروق الكسرية لهذا الأنموذج (0.341342331) وهي الأصغر بين القيم الأخرى والناتجة من طريقة هيكوشي لتقدير معلمة أس هرست وعليه تعد هذه الطريقة الأفضل في تقدير (d) لهذا النوع من البيانات.

5. الاستنتاجات (Conclusion)

من اهم الاستنتاجات التي توصل اليها الباحث هي:

1- إن آلية التحويل المويجي المتقطع تتوافق من حيث الرؤية الأولية مع آليات طرائق معالجة مشاكل الإنحدار الخطي المعلمي (مشكلة عدم تجانس التباين ومشكلة الارتباط الذاتي) عند إجراء عملية التقدير لمعلمات أنموذج الإنحدار الخطي المعلمي إذ أن أنموذج الإنحدار الخطي المعلمي يضرب بمصفوفة تحويل ذات مواصفات خاصة لكلا طرفي الأنموذج من جهة اليسار إلا إن الإختلاف في التحويل المويجي يقوم بتحويل بيانات المتغير المعتمد والمتغيرات التوضحية والأخطاء العشوائية وتنعيمها والتي تكون بالحجم نفسه (توليد بيانات جديدة من البيانات الاصلية أي تحويلها من مجال الزمن الى المجال المويجي) وهذه آلية المعالجة عند الطرائق الشائعة ومنها طريقة المربعات الصغرى الموزونة وطريقة الإمكان الأعظم ومن ثم تجرى عملية التقدير وفي كلتا الآليتين تستعمل الطرائق الشائعة مع إختلاف إن التقديرات المويجية تعتمد البيانات الجديدة في المجال المويجي في حين تعتمد التقديرات الاخرى على البيانات الأصلية.

2-بالإعتماد على نتائج الجانب التطبيقي نستنتج أن طريقة (WML) أثبتت كفاءتها على بقية الطرائق لإمتلاك مقدرات الأنموذج أقل التباينات المستخرجة بواسطة هذه الطريقة، ولذا يتم إعتماد مقدراتها في المعادلة التقديرية للأنموذج المعرف بالصيغة (23).
3-إن إختلاف قيم معلمة الفروق الكسرية لا تؤثر في أفضلية طريقة (MLE).

المصادر (References)

1.كاظم، أمــوري هادي و شليبــة، باسم، (2002)، "القياس الإقتصادي المتقدم النظرية والتطبيق" مكتبة الامل، بغداد، شارع الصناعة.
2.Addison, Paul S, (1997), "Fractals and Chaos An Illustrated Course", British Library Cataloguing-in-Publication Data, ISBN 0 7503 0399 9 (hbk).
3.Bouden, Toufik and Mokhtar, Nibouche, (2012), "The Wavelet Transform for Image Processing Applications", INTECH Open Access Publisher, ISBN:9535104942, 9789535104940.
4.Dark, Onathan, (2007), "Estimation of the fractional differencing parameter using wavelets and temporal aggregation", Monash University, Australia.
5.Fadili, M., J. and Bullmore E.T., (2002), "Wavelet-Generalized Least Squares: A New BLUE Estimator of Linear Regression Models with 1/f Errors", NeuroImage 15, 217-232.
6.In, Francis and Kim, Sangbae, (2013), "An Introduction to Wavelet Theory in Finance, a Wavelet Multiscale Approach", World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
7.Kale, Malhar and Butar, Ferry, (2011), "Fractal Analysis of Time Series and Distribution Properties of Hurst Exponent", Journal of Mathematical Sciences & Mathematics Education, Vol. 5 No. 1.
8.Nason, G., 2008, "Wavelet methods in statistics with R", X, 259 p., ISBN:978-0-387-75960-9.
9.Palma, Wilfredo, (2007), "Long memory time series – theory and methods", Pontificia Universidad Catolica de Chile.
10. Vaidyanathan, P. P. and Djokovic, Igor, (1994), "An Introduction to Wavelet Transform", California Institute of Technology, August.
11. Vacha, Lukas and Barunik, Jozef, (2012), "Long Memory II ARFIMA and Estimation", Summer Semester.

Compare some wavelet estimators for parameters in the linear regression model with errors follows ARFIMA model.

Abstract

The aim of this research is to estimate the parameters of the linear regression model with errors following ARFIMA model by using wavelet method depending on maximum likelihood and approaching general least square as well as ordinary least square. We use the estimators in practical application on real data, which were the monthly data of Inflation and Dollar exchange rate obtained from the (CSO) Central Statistical organization for the period from 1/2005 to 12/2015. The results proved that (WML) was the most reliable and efficient from the other estimators, also the results provide that the changing of fractional difference parameter (d) doesn't effect on the results.

Keyword: wavelet, wavelet transformation, linear regression model , ARFIMA model.