

# إستعمال بعض النماذج الإحتمالية المتتورة لدراسة خصائص التعويضات الصحية في شركة التأمين العراقية

م.م. ثائرة نجم عبد الله  
كلية الادارة والاقتصاد /الجامعة المستنصرية

أ.م.د. قيس سبع خماس  
كلية الادارة والاقتصاد / جامعة بغداد

## المستخلص

نظراً لعدم وجود دراسة احصائية سابقة لسلوك التعويضات وبالتحديد التأمين الصحي الذي يمثل النسبة الأكبر من التعويضات في عموم شركات التأمين في العراق، تم إختيار هذه الدراسة وتطبيقها في شركة التأمين العراقية.

ولغرض تحديد أفضل أنموذج احتمالي يمثل تعويضات التأمين الصحي، تم استخدام أنموذجين إحتمايين تم تحديدهما من خلال الكشف الأولي لتوزيع عينة البحث بأستخدام برنامج (Easy Fit): أحدهما منفرد وهو (Lognormal) لجميع مشاهدات العينة، والآخر مركب (Compound Weibull) عند تجزئة العينة الى جزئين؛ جزء يمثل التعويضات الصغيرة والآخر للتعويضات كبيرة، وتم التركيز على الأنموذج المركب بشيء من التفصيل من حيث صياغته وأهميته. مع تطبيق حالة البتر في كليهما لأن التعويضات الصحية محددة من الأعلى بمبلغ مليوني دينار في هذه الشركة. وتم تقدير معالم كلا الأنموذجين باستخدام طريقة الامكان الأعظم (MLE) واستخدام اسلوب (نيوتن – رافسون) في إيجاد هذه التقديرات. ومن ثم المقارنة بين الأنموذجين باستخدام المقياس (MSE). وتم التوصل بشكل عام الى أن الأنموذج المركب هو أفضل من الأنموذج المنفرد في تمثيل التعويضات.

**المصطلحات الرئيسية للبحث :** التأمين، التوزيعات المتتورة، أنموذج lognormal المتتور من الأعلى، أنموذج Weibull المركب المتتور من الأعلى، طريقة الأمكان الأعظم.



مجلة العلوم

الاقتصادية والإدارية

العدد ١٩

العدد ٧٢

الصفحات ٢٢٠-٢٢٩

\*ملاحظة: هذا البحث مستل من رسالة ماجستير

## المبحث الأول/ تمهيد

### ١-١ المقدمة

يعد التأمين أحد القطاعات الاقتصادية المهمة التي يقوم عليها الاقتصاد الوطني بالنسبة للدول، فهو يساهم في تمويل خطط التنمية وحماية الاقتصاد القومي من الهزات المالية التي قد يتعرض لها. وقد ظهر التأمين بشكل اقتصادي تعاوني بين الافراد أو المنشآت المعرضة للأخطار نفسها، ثم تطور هذا النظام التعاوني بفضل التقدم الكبير في العلوم الرياضية والاكثوارية والاجتماعية مما أدى الى ارساء الاطار العلمي والعملية لصناعة التأمين في المجتمعات الحديثة. حيث أصبح التأمين نظاماً لتجميع الاخطار وتوزيعها بين الافراد المشتركين في النظام عن طريق المشاركة في تحمل الخسائر.

ويعد التأمين من أهم السياسات وأكثرها إستعمالاً وانتشاراً في مواجهة الاخطار\* والتعامل معها وتخفيف عبء الخسارة الناجمة عنها.

يعرف التأمين بأنه "عملية يحصل أحد اطرافها وهو (المؤمن له) من الطرف الآخر وهو (المؤمن) على وعد بتعويض (المؤمن له) أو شخص ثالث في حالة الخسارة، وتسمى الخسارة التي تدفع لقاء هذه الخدمة بالقسط. ويتقبل المؤمن المخاطر بكاملها ويعوض عنها وفق القوانين الاحصائية"<sup>(6)</sup>.

يعد التأمين الصحي من الفروع المهمة في التأمين، وذلك لأنه على علاقة مباشرة بالفرد والمجتمع. فجميع أفراد المجتمع ممكن أن يكونوا عرضة لحوادث صحية وإصابات بدنية وأمراض.

إن أهم جانب في التأمين هو جانب التعويضات\*\*، لذلك يتوجب التركيز على دراسته بأسلوب علمي ودقيق من أجل وضع أسس وضوابط صحيحة للتغطية والحفاظ على موازنة مستقرة في تقدير الإحتياجات المناسبة للتعويضات المتوقعة.

لقد أهتم الاكثواريون بدراسة بيانات التعويضات، فمن خلال هذه الدراسات يمكن إيجاد التوزيع الاحتمالي الذي يحكم عملية التعويض (Payment process).

ومن الاسباب المهمة التي تدفع الى دراسة توزيعات التعويضات هو ان أي تغيير في أشكال هذه التوزيعات غالباً ما يكون له تأثيرات مختلفة في مستويات التغطية (Layers of coverages) لعقود التأمين المختلفة. كما وتعد الخسارة من أساسيات نظرية الخطورة (Theory of risks).

إن لإستعمال النماذج الاحتمالية في تمثيل البيانات (التعويضات) أهمية كبيرة في وصف الخصائص البارزة لعملية التعويض بدرجة معينة من الدقة وكذلك يكشف لنا الحقائق والمعلومات المتداخلة في عملية التعويض.

وعادة ما يتم إستعمال النماذج المبتورة في هذا النوع من الظواهر وذلك لأن مبالغ التعويضات محددة بعقد التأمين أي إن هناك بتر في البيانات<sup>(١٣) (١٤)</sup>.

سنقدم خلال هذه الدراسة اسلوباً لاختيار أفضل نموذج إحتمالي يصلح لتمثيل بيانات التعويضات المتمثلة ببيانات التأمين الصحي في شركة التأمين العراقية.

\* الخطر:- الخطر بمعناه التأميني هو الحادث المحتمل الوقوع الذي يخشاه المتعاقدان ويأمل المؤمن له ألا يتحملة منفرداً وانه اذا وقع وجب على المؤمن تنفيذ التزامه بتعويض المؤمن له أو دفع المبلغ المؤمن به<sup>(3)</sup>.

\*\* التعويض:- هو التزام المؤمن المقابل لإلتزام المؤمن له وذلك بأن يدفع المؤمن له الاقساط التي تترتب عليه لقاء الحماية التي يحصل عليها المؤمن عن الاضرار التي تتحقق له، وذلك بدفع التعويض من قبل المؤمن للمؤمن له بشرط أن تكون الاضرار ناتجة عن أخطار مشمولة بالتغطية وضمن المدة التأمينية<sup>(7)</sup>.

١-١-١: شركة التأمين العراقية<sup>(٢)</sup>:

هي إحدى الشركات العامة التابعة لوزارة المالية وتخضع لأحكام قانون الشركات العامة رقم (٢٢) لسنة ١٩٩٧ وقانون تنظيم أعمال التأمين رقم (١٠) لسنة ٢٠٠٥.

تأسست الشركة في ١٤/١٠/١٩٥٩ كشركة أهلية مساهمة، أمت عام ١٩٦٤ وتخصصت بأعمال التأمين على الحياة سنة ١٩٦٥، ألغى التخصص عام ١٩٨٨ وزاولت أعمال التأمين على الممتلكات (السيارات التكميلي، البحري /بضائع، الحريق، السرقة والحوادث والهندسي).

يبلغ رأسمال الشركة المدفوع مليار دينار عراقي.

وللشركة تسعة عشر منفذ تسويقي، ستة منها في المراكز التجارية المهمة في بغداد وثلاثة عشر في مركز كل محافظة من محافظات العراق.

وبموجب قانون (١٢) لسنة ٢٠٠٩، فإن أقساط التأمين معفاة من الضريبة وهي كالاتي:

- أقساط التأمين على الحياة والحد الأعلى لها يبلغ مليوني دينار.
- أقساط التأمين على الممتلكات والحد الأعلى لها يبلغ مليون دينار.

## ٢-١: مشكلة البحث

يوكد المختصون بشؤون التأمين على ضرورة إستعمال النماذج الرياضية في تمثيل بيانات التعويضات. فالنموذج الرياضي يحقق لنا توسيع ومقارنة المعلومات والحقائق الكثيرة والمتداخلة لعملية التعويض، كذلك يصف الخصائص البارزة لها بدرجة معينة من الدقة. إن الأنموذج الرياضي الذي يصف عملية التعويض سوف يعامل على انه تعبير رياضي لحالة معينة مرتبطة بالواقع. فالواقعية هي التي تعطي الأنموذج الرياضي المناسب.

ولغرض الكشف عن التوزيع الاحتمالي الذي يحكم عملية التعويض يجب أن تكون هناك مشاهدات حقيقية مستقلة عن بعضها البعض عن الظاهرة المعنية. فبعد أن يتم الحصول على بيانات التعويضات يتم ترتيبها بحسب مبلغ التعويض ويتم توفيق توزيع مستمر وموجب لاجمالي البيانات.

ولغرض معرفة وتشخيص التأثيرات التي تطرأ على عملية التعويض فانه لا بد أن تكون هناك عملية فحص وتغيير واختبار للأنموذج المستعمل لأي بيانات جديدة يتم الحصول عليها.

سنقدم خلال هذه الدراسة اسلوباً علمياً لتوفيق واختيار أفضل أنموذج إحتمالي يصلح لتمثيل بيانات التعويض المتمثلة ببيانات التأمين الصحي في شركة التأمين العراقية. حيث تعد هذه الدراسة أول دراسة إحصائية من هذا النوع لهذه الشركة.

## ٣-١: هدف البحث

يهدف البحث الى دراسة جانب التعويضات الصحية في شركة التأمين العراقية والاعتماد على نتائج التحليل الإحصائي لتحديد أفضل توزيع احتمالي لتمثيل بيانات التأمين الصحي وتحديد خصائصها.

يركز البحث على طريقة توفيق أنموذجين احتماليين: الاول منفرد مبتور (Truncated Single Model) والآخر مركب مبتور (Truncated Compound Model) لبيانات التعويضات الصحية وسيتم تقدير معالم كلا الأنموذجين بإستعمال طريقة الامكان الاعظم (Maximum Likelihood Estimators). ومن ثم المقارنة بين الأنموذجين المنفرد المبتور والمركب المبتور على اساس اقل قيمة لمتوسط مربعات الخطأ (MSE) واختيار الأنموذج المناسب بالاستناد الى بيانات العينة. وبعد عملية اختيار الأنموذج المناسب يكون بإمكاننا دراسة خصائص هذه التعويضات.

## ٥-١: البيانات:-

من المعلوم أن درجة الدقة في اية دراسة وصحة القرارات التي تتخذ بخصوصها تعتمد على مدى شمول البيانات التي يتم إستخدامها والفترة الزمنية التي تمثلها. ولغرض دراسة توزيع تعويضات التأمين الصحي فإن ذلك يتطلب توفر البيانات التي تخص التأمين الصحي لمدة زمنية محددة، لذا فإن البيانات التي سيتم إستعمالها في هذا البحث تمثل قيم تعويضات التأمين الصحي المسجلة في قسم التأمين الجماعي في شركة التأمين العراقية للعام (٢٠١١) ولمدة سنة كاملة. حيث يحتل فرع التأمين الصحي النسبة الأكبر من بيانات التعويضات نظراً لكثرة عدد الحوادث والاصابات الصحية والامراض.

قام الباحثان بجمع البيانات التي تخص مشكلة البحث من خلال سجلات شركة التأمين العراقية وذلك لعدم توفرها بشكل نشرات. علماً بأن هذه التعويضات تمثل التعويضات الفعلية التي دفعت خلال العام (٢٠١١) ولا تمثل الحوادث والاصابات الصحية والامراض التي وقعت خلال هذا العام بالذات بل إن طلب التسوية للتعوي

## البحث الثاني / الجانب النظري

## ١-٢: المقدمة:

يتضمن هذا الفصل توضيح بعض المفاهيم التي تم إستعمالها في الجانب التطبيقي للبحث. إذ يتم عرض النماذج الاحتمالية المستعملة في تمثيل العينة، وذكر الخصائص العامة والرئيسة لهذه النماذج. كذلك عرض النماذج المركبة والفكرة من إستعمالها وأهميتها، والتركيز على خاصية البتر (Truncation Property) في النماذج سواء أكانت أنموذج منفرد أو مركب.

تناولنا بعد ذلك طريقة تقدير معلمات النماذج التي أستخدمت في التطبيق وهي طريقة الإمكان الأعظم (MLE) وأن هذه الطريقة تتطلب إستعمال الأسلوب التكراري (نيوتن-رافسون) مثلاً لكون النماذج المستعملة في البحث تُنتج معادلات طبيعية غير خطية. ومن ثم توضيح أسلوب المقارنة بين النماذج المستعملة بإستعمال أقل متوسط مربعات خطأ (MSE) لتحديد أفضل أنموذج إحصائي لتمثيل بيانات التأمين الصحي في شركة التأمين العراقية.

## ٢-٢: النماذج الاحتمالية لحجم التعويضات:

من خلال الدراسات والخبرات السابقة في مجال توزيع حجم التعويضات، فإن النماذج الاحتمالية التي تحكم هذه العملية تتشابه في الكثير من الخواص العامة ومنها:

- ١- إنها تتعامل مع المتغيرات الموجبة فقط.
- ٢- معلمات هذه النماذج موجبة أيضاً.
- ٣- معلمة الشكل لهذه النماذج ذات مرونة عالية إذ يتغير شكل التوزيع على وفق تغيير قيمة هذه المعلمة.
- ٤- إن هذه النماذج ذات إتواء موجب.

وبما أن طبيعة بيانات العينة هي التي تحدد الأنموذج الاحتمالي الأنسب وإن التعويضات الصحية في عقود التأمين في شركة التأمين العراقية محددة من الأعلى بقيمة أعلى تعويض وعليه فإن النماذج الاحتمالية التي سيتم إستعمالها ستكون مبتورة من الأعلى. وتم إستعمال أنموذجين إحصائيين؛ أحدهما منفرد (Single model) والآخر مركب (Compound model) وكلاهما مبتور من الأعلى. وسيتم توضيح أسلوب إختيار هذين الأنموذجين في الجانب التطبيقي من هذا البحث.

ولابد من تقديم نبذة مختصرة عن التوزيعين اللذين تم إعتمادهما في بناء الأنموذجين (المنفرد والمركب) وهما توزيع (Weibull) وتوزيع (Lognormal) وتوضيح فكرة النماذج المركبة وخاصية البتر في التوزيع وكالاتي:

## ١-٢-٢: توزيع Weibull :

يعد توزيع ويبل أحد التوزيعات المستمرة (Continuous)، وأحد نماذج الفشل الشائعة والمهمة. قُدم هذا النموذج من قبل الفيزيائي السويدي Weibull في تحليله لظاهرة قوة المادة (Material Strength Phenomena) (8). إذا كان للمتغير العشوائي  $x$  توزيع (Weibull) ذو الثلاث معلمات فإن دالة الكثافة الاحتمالية له تكون كالآتي :

$$f_{W(3p)}(x_i; \alpha, \beta, \lambda) = \frac{\alpha}{\lambda} \left( \frac{x_i - \beta}{\lambda} \right)^{\alpha-1} \cdot e^{-\left( \frac{x_i - \beta}{\lambda} \right)^\alpha} ; \text{ where: } \begin{cases} \beta < x_i < \infty \\ \alpha > 0 \\ \lambda > 0 \\ \beta \geq 0 \end{cases} \quad \dots(1-2)$$

حيث أن:

$\alpha$  : تمثل معلمة الشكل (Shape parameter).

$\lambda$  : تمثل معلمة القياس (Scale parameter).

$\beta$  : تمثل معلمة الموقع (Location parameter).

والدالة التوزيعية التجميعية لهذا النموذج هي :

$$F_{W(3p)}(x) = 1 - e^{-\left( \frac{x - \beta}{\lambda} \right)^\alpha} \quad \dots(2-2)$$

وعندما تكون معلمة الموقع  $\beta = 0$  فإنه يتحول الى توزيع (Weibull) ذو المعلمتين والذي تكون دالته الاحتمالية كالآتي:

$$f_{W(2p)}(x_i; \alpha, \lambda) = \frac{\alpha}{\lambda} \left( \frac{x_i}{\lambda} \right)^{\alpha-1} \cdot e^{-\left( \frac{x_i}{\lambda} \right)^\alpha} ; \text{ where: } \begin{cases} 0 < x_i < \infty \\ \alpha > 0 \\ \lambda > 0 \end{cases} \quad \dots(3-2)$$

والدالة التوزيعية التجميعية له هي :

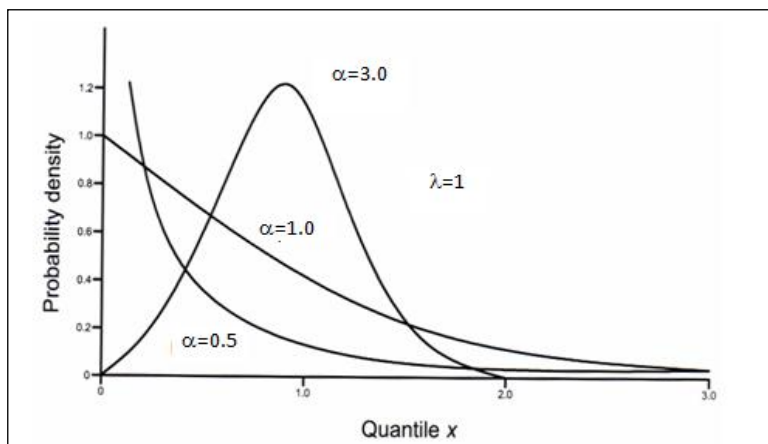
$$F_{W(2p)}(x) = 1 - e^{-\left( \frac{x}{\lambda} \right)^\alpha} \quad \dots(٤-٢)$$

ولسهولة إيجاد الدالة التوزيعية لهذا النموذج جعلته يستخدم بشكل واسع في التطبيقات العلمية المختلفة، فهو يستخدم بشكل واسع في حقل المعولية (Reliability) وفي مجال السيطرة النوعية.

ويمكن ملاحظة شكل الدالة الاحتمالية لهذا النموذج من الشكل رقم (٢-١) لقيم مختلفة للمعلمة  $\alpha$

تكون  $\lambda=1$ .

عندما



شكل رقم (٢-١): دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ويبيل لقيم  $\alpha$  مختلفة عندما  $\lambda=1$  و  $\beta=0$

٢-٢-٢: توزيع Lognormal :

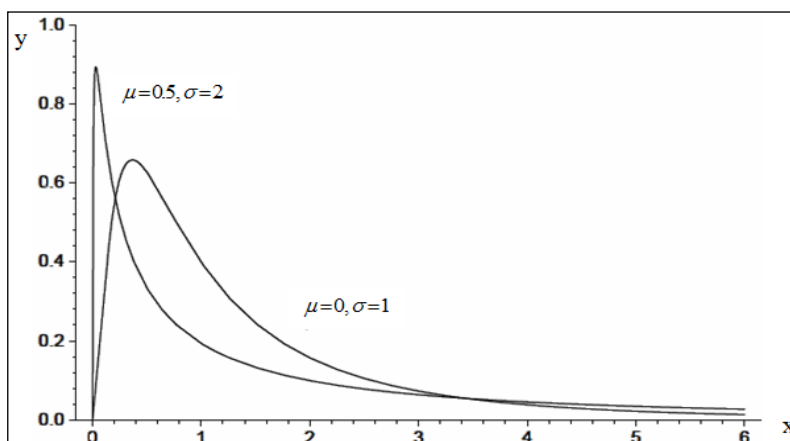
ليكن  $x$  متغيراً عشوائياً وان التحويل اللوغاريتمي  $y = \ln x$  ، فاذا كان  $y$  يتوزع توزيعاً طبيعياً فان  $x$  يتوزع (Lognormal) وتكون دالة الكثافة الاحتمالية لهذا النوع كالآتي :

$$f_L(x_i; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma x_i} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\ln x_i - \mu}{\sigma} \right)^2}, \text{ where: } \begin{cases} x_i > 0 \\ \sigma > 0 \\ -\infty < \mu < \infty \end{cases} \quad \dots(5-2)$$

أن معلمة القياس لهذا النموذج هي  $e^\mu$  ، ومعلمة الشكل هي  $\sigma$  .  
أما الدالة التوزيعية التجميعية لهذا النموذج فهي:

$$F_L(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_0^x \frac{1}{x} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\ln x - \mu}{\sigma} \right)^2} \cdot dx = \Phi \left( \frac{\ln x - \mu}{\sigma} \right) \quad \dots(6-2)$$

إذ تستخدم جداول التوزيع الطبيعي القياسي لقيم  $x, \mu, \sigma$  مختلفة في إيجاد قيمة الاحتمال لهذه الدالة.  
يستخدم نموذج (Lognormal) في كثير من التطبيقات العلمية وذلك لانه ذو التواء موجب ويأخذ المتغيرات العشوائية الموجبة فقط . كما ان قيمة معلمة الشكل  $\sigma$  تجعله كثير المرونة مما يجعله يصلح في تمثيل الكثير من الظواهر العشوائية والشكل رقم (٢-٢) يوضح دالة الكثافة الاحتمالية لهذا التوزيع. لذلك نجد ان هذا النموذج غالباً ما يؤخذ كافتراض أولي عند توفيق منحنى تكراري للبيانات الموجبة.

شكل رقم (٢-٢): الدالة الاحتمالية لتوزيع Lognormal لقيم  $\mu$  و  $\sigma$  مختلفة.

### ٣-٢-٢: النماذج المركبة (المختلطة): Compound (Mixed) Models

نالت التوزيعات المركبة اهتمام الباحثين ولاسيما في العقود الاخيرة. فهي عبارة عن مزيج من توزيعين أو أكثر ويسمى (Compound distribution) <sup>(١)</sup>. وتستخدم هذه النماذج المركبة غالباً عند فشل الأنموذج الاحتمالي المنفرد في تمثيل بيانات التعويضات الاجمالية بسبب طبيعة البيانات ولاسيما بالنسبة للقيم الكبيرة الواقعة في النهاية الطرفية وذلك لعدم توفر مشاهدات كافية بالنسبة لهذا الجزء، لذا نلجأ الى استعمال النماذج المركبة للحصول على نموذج جيد ذي خصائص مماثلة لطبيعة البيانات المشاهدة<sup>(٥)</sup>. تنشأ التوزيعات المركبة عندما يتكون المجتمع من مجموعة من المجتمعات الجزئية وكل مجتمع جزئي له نسبة من المجتمع الاصلي  $sp_1, sp_2, \dots, sp_r$  \* وان دالة التوزيع التجميعي (c.d.f) لكل مجتمع جزئي هو  $F_i(x)$  وان دالة الكثافة الاحتمالية (p.d.f) هي  $f_i(x)$  على التوالي حيث ان:  $i = 1, 2, \dots, r$ .

يظهر أبسط أنواع النماذج المركبة عند خلط مجتمعين جزئيين (Two Sub Populations) وكل مجتمع جزئي يمتلك أنموذج احتمالي يختلف عن الأنموذج الاحتمالي للمجتمع الجزئي الآخر.

فإذا كانت كل من  $F_1(x)$  و  $F_2(x)$  دوال توزيعية لنوعين مختلفين من التعويضات فان الدالة التوزيعية لإجمالي التعويضات تكون:

$$F(x) = w F_1(x) + (1-w) F_2(x) \quad \dots(٧-٢)$$

إذ تعبر هذه الدالة عن الوسط المدمج لـ  $F_1(x)$  و  $F_2(x)$  بوزن هو  $(0 < w < 1)$  ويتم تقدير  $w$  كمعلمة فضلاً عن معلمات الأنموذج الكلي. إلا ان عملية التقدير تكون معقدة لذا يتم الاعتماد في تقديرها على الخبرة السابقة.

\* الرمز sp هو مختصر لـ (Sup population).

وفكرة النماذج المركبة يمكن توسيعها لأكثر من توزيعين <sup>(١٠)</sup> :-

لتكن لدينا (r) من التوزيعات وان دالة الكثافة الاحتمالية لهذه التوزيعات هي  $f_1(X), f_2(X), \dots, f_r(X)$  ، حيث

أن:  $\sum_{i=1}^r w_i = 1$  فان دالة الكثافة الاحتمالية  $f(x)$  للتوزيع المركب هي:

$$f(x) = w_1 f_1(x) + w_2 f_2(x) + \dots + w_r f_r(x)$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^r w_i f_i(x) \quad \dots (٨-٢)$$

### ٤-٢-٢: خاصية البتر في التوزيع:

يتطلب الامر أحياناً استنتاج دالة كثافة احتمالية للمتغير العشوائي (x) تكون قيمة معرفة على جزء من فضاء العينة ( $\Omega$ ) وذلك لأسباب تتعلق بطبيعة البيانات، وهذه العملية تسمى البتر (truncation) وتؤثر في خصائص دالة الكثافة الاحتمالية، فبعد البتر سيكون الاحتمال المقترن بفضاء المتغير (x) أقل من الواحد ( $\Pr(\Omega) < 1$ )، وهذا يتطلب اشتقاق توزيع جديد من التوزيع الاصلي يحقق خصائص الدوال. وبعد إجراء عملية البتر في التوزيع وإشتقاق دالة الكثافة الاحتمالية الجديدة يمكن ايجاد مقاييس وعزوم ودوال توليد العزوم وغيرها دون اللجوء الى التوزيع الاصلي <sup>(٤)</sup>.

### ١-٤-٢-٢: أنواع البتر (٤) :-

أ- البتر من اليمين واليسار\* : *Upper and lower truncation*

وهو الحالة العامة للبتر، ليكن لدينا متغير عشوائي x يمتلك دالة كثافة احتمالية  $f(x)$  وأن  $x \in R$  ولغرض ايجاد دالة كثافة احتمالية للمتغير x المعرف على مجموعة جزئية من فضاء العينة  $\Omega$  أي:

$$\Omega^* = \{x : a < x < b\}$$

حيث أن:

a , b : عددان معرفان في  $\Omega$ .

ولتكن  $F(x)$  تمثل الدالة التجميعية للمتغير x.

حيث أن:  $c > 0$ .

فإن:

$$\int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx = c \left[ \int_{-\infty}^b f(x) dx - \int_{-\infty}^a f(x) dx \right]$$

$$= c [F(b) - F(a)]$$

حيث أن:

$F(b) - F(a)$  : يمثل احتمال الفترة  $a < x < b$ .

ولكي تحقق الدالة الجديدة المبتورة من الطرفين خصائص الدوال الاحتمالية فيجب أن يكون:

$$c \int_a^b f(x) dx = 1$$

\* البتر من اليمين يطلق عليه أيضاً (البتر من الأعلى)، كذلك البتر من اليسار يطلق عليه (البتر من الأسفل).





وعليه فإن:

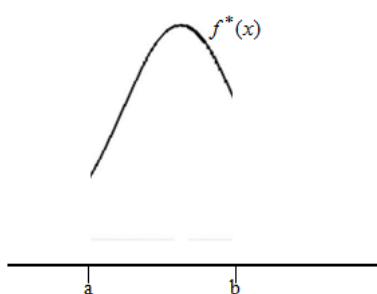
$$c[F(b)-F(a)]=1$$

$$\therefore c=[F(b)-F(a)]^{-1}$$

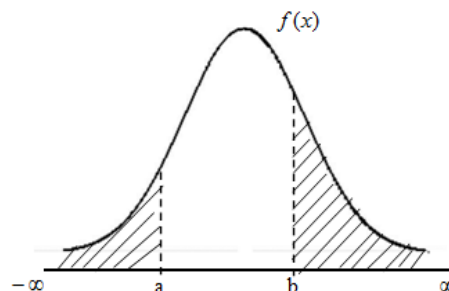
وعليه تكون الدالة الاحتمالية المبتورة من الطرفين للمتغير  $x$  كالآتي:

$$f^*(x)=[F(b)-F(a)]^{-1} \cdot f(x) \quad \dots(9-2)$$

وبهذا نجد أن الدالة الجديدة هي عبارة عن الدالة الأصلية مقسومة على احتمال الفترة  $(a, b)$ . والشكل رقم (٣-٢) يوضح ذلك.



منحنى الدالة بعد إجراء البتر



منحنى الدالة قبل إجراء البتر

شكل رقم (٣-٢) : عملية البتر من الطرفين

### Upper truncation

ب- البتر من الجانب الأيمن:

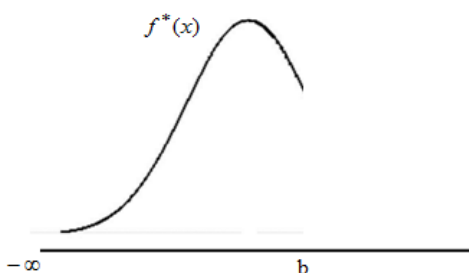
ليكن لدينا متغير عشوائي قيمته معرفة على الفترة  $(-\infty, b]$ ، وبالإعتماد على الحالة العامة السابقة

فإن:

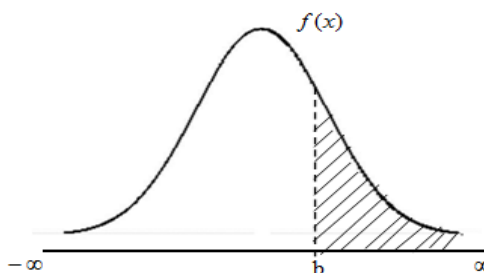
$$f^*(x)=[F(b)-F(-\infty)]^{-1} \cdot f(x)=\frac{f(x)}{F(b)} \quad \dots(10-2)$$

حيث أن  $F(-\infty)=0$ .

والشكل رقم (٤-٢) يوضح ذلك.



منحنى الدالة بعد إجراء البتر من اليمين



منحنى الدالة قبل إجراء البتر من اليمين

شكل رقم (٤-٢) : عملية البتر من الجانب الأيمن

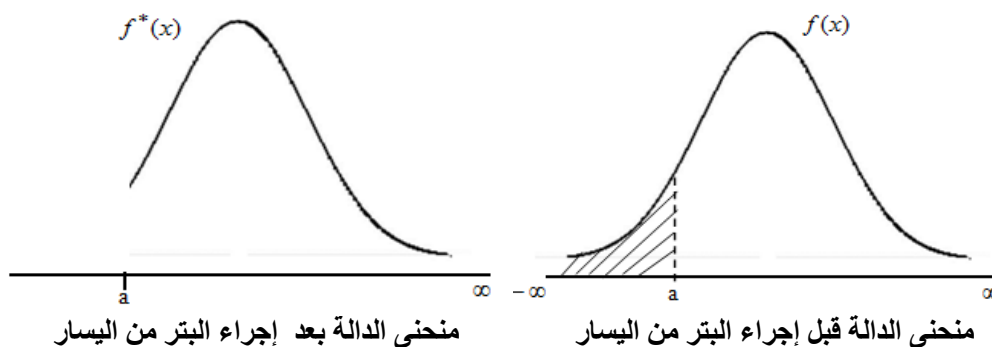
**Lower truncation**

جـ البتر من الجانب الأيسر:

ليكن لدينا متغير عشوائي قيمته معرفة على الفترة  $[a, \infty)$ ، وبالإعتماد على الحالة العامة السابقة أيضاً فإن:

$$f^*(x) = [F(\infty) - F(a)]^{-1} \cdot f(x) = \frac{f(x)}{1 - F(a)} \quad \dots(11-2)$$

حيث أن  $(F(\infty) = 1)$ . والشكل رقم (٥-٢) يوضح ذلك.



شكل رقم (٥-٢) : عملية البتر من الجانب الأيسر

**٣-٢: صيغ النماذج الإحتمالية المستعملة في البحث:**

الأنموذجين اللذين تم إستعمالهما هما كالآتي:

**أولاً:** الأنموذج المنفرد هو " توزيع  $\lognormal$  المبتور من الأعلى " والمحدد من اليمين بقيمة أعلى تعويض ولتكن  $(b)$ ، فبتعويض معادلة (٥-٢) ومعادلة (٦-٢) في الصيغة (١٠-٢)، فإن دالة الكثافة الإحتمالية لهذا التوزيع ستكون بالشكل الآتي:

$$f_{UL}(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma x} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\ln x - \mu}{\sigma} \right)^2} \cdot \phi \left( \frac{\ln b - \mu}{\sigma} \right) \quad , \quad \begin{cases} 0 < x \leq b \\ -\infty < \mu < \infty \\ \sigma > 0 \end{cases} \quad \dots(12-2)$$

where :  $i = 1, \dots, n$

حيث أن:

$f_{UL}(x; \mu, \sigma)$  : تمثل دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع  $\lognormal$  المبتور من الاعلى.

$n$  : حجم العينة الكلية.

$e^\mu$  : تمثل معلمة القياس لهذا الأنموذج.

$\sigma$  : تمثل معلمة الشكل.

أما الدالة التوزيعية لهذا الأنموذج فيمكن إستنتاجها بالشكل الآتي:



$$F_{UTL}(x) = \int_0^x f_{UTL}(u) du = \int_0^x \frac{f_L(u)}{F_L(b)} du = \frac{\phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)}{\phi\left(\frac{\ln b - \mu}{\sigma}\right)} \quad \dots(13-2)$$

**ثانياً:** الأنموذج المركب هو " توزيع ويبيل المركب المبتور من الأعلى " (Un upper truncated compound weibull distribution) والذي يتكون من:

**الجزء الأول:** وهو توزيع ويبيل ذو المعلمتين المحدد من اليمين بنقطة البتر (a)، وتعويض معادلة (3-2) ومعادلة (4-2) في الصيغة (10-2) فإن دالة الكثافة الإحتمالية له ستكون بالشكل الآتي:

$$f_{UTW(2p)}(x_i; \theta, \gamma) = \frac{\frac{\theta}{\gamma} \left(\frac{x_i}{\gamma}\right)^{\theta-1} \cdot e^{-\left(\frac{x_i}{\gamma}\right)^\theta}}{1 - e^{-\left(\frac{a}{\gamma}\right)^\theta}} \quad ; \quad \begin{cases} 0 < x_i \leq a \\ \theta > 0 \\ \gamma > 0 \end{cases} \quad \dots(14-2)$$

where :  $i = 1, \dots, m$

حيث أن:

$\theta$  : تمثل معلمة الشكل (Shape parameter).

$\gamma$  : تمثل معلمة القياس (Scale parameter).

$a$  : تمثل نقطة البتر بين جزئي الأنموذج المركب أو (بين جزئي العينة).

$m$  : حجم الجزء الأول من العينة.

$f_{UTW(2p)}(x_i; \theta, \gamma)$  : تمثل دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ويبيل ذو المعلمتين المبتور من الاعلى.

**الجزء الثاني:** هو توزيع ويبيل ذو الثلاث معلمات المحدد من اليمين أيضا بقيمة أعلى تعويض (b)، وتعويض معادلة (1-2) ومعادلة (2-2) في الصيغة (10-2) فإن دالة الكثافة الإحتمالية له ستكون بالشكل الآتي:

$$f_{UTW(3p)}(x_i; \alpha, \beta, \lambda) = \frac{\frac{\alpha}{\lambda} \left(\frac{x_i - \beta}{\lambda}\right)^{\alpha-1} \cdot e^{-\left(\frac{x_i - \beta}{\lambda}\right)^\alpha}}{1 - e^{-\left(\frac{b - \beta}{\lambda}\right)^\alpha}} \quad ; \quad \begin{cases} \beta = a < x_i \leq b \\ \alpha > 0 \\ \lambda > 0 \\ \beta \geq 0 \end{cases} \quad \dots(15-2)$$

where :  $i = m + 1, \dots, n$

حيث أن:

$\alpha$  : تمثل معلمة الشكل (Shape parameter).

$\lambda$  : تمثل معلمة القياس (Scale parameter).

$\beta$  : تمثل معلمة الموقع (Location parameter).

$b$  : تمثل نقطة البتر من الأعلى (قيمة أعلى تعويض).

$f_{UTW(3p)}(x_i; \alpha, \beta, \lambda)$  : تمثل دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ويبيل ذو ثلاث معلمات المبتور من الاعلى.

وبتضمين معلمة الخلط ( $w$ ) التي تمثل نسبة مساهمة كل جزء في دالة التوزيع المركب، فإن دالة الكثافة الإحتمالية له تكون بالشكل الآتي:

$$f_{UTCW}(x_i; \theta, \gamma, \alpha, \lambda) = \begin{cases} w * \frac{\frac{\theta}{\gamma} \left(\frac{x_i}{\gamma}\right)^{\theta-1} \cdot e^{-\left(\frac{x_i}{\gamma}\right)^\theta}}{1 - e^{-\left(\frac{a}{\gamma}\right)^\theta}} & , \text{if } 0 < x_i \leq a \\ (1-w) * \frac{\frac{\alpha}{\lambda} \left(\frac{x_i-a}{\lambda}\right)^{\alpha-1} \cdot e^{-\left(\frac{x_i-a}{\lambda}\right)^\alpha}}{1 - e^{-\left(\frac{b-a}{\lambda}\right)^\alpha}} & , \text{if } a < x_i \leq b \end{cases} \quad \dots(16-2)$$

حيث أن:

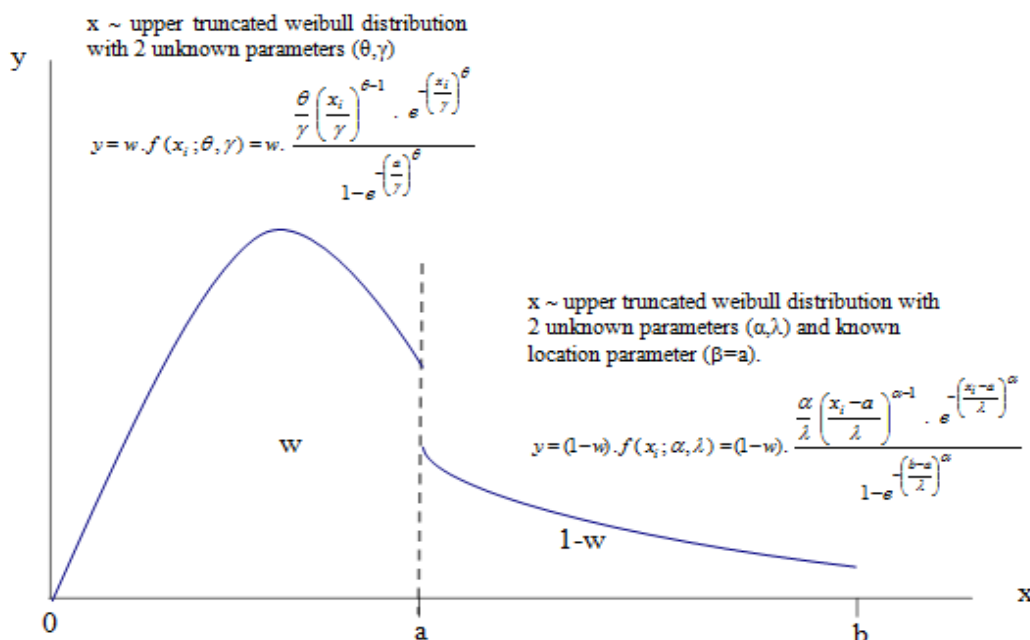
$f_{UTCW}(x_i; \theta, \gamma, \alpha, \lambda)$  : تمثل دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ويبيل المركب المبتور.

$0 < w < 1$  :

أما الدالة التوزيعية لهذا الأنموذج المركب فهي:

$$F_{UTCW}(x) = \begin{cases} \frac{w}{F_{w(2p)}(a)} \cdot F_{w(2p)}(x) & 0 < x \leq a \\ w + \frac{(1-w)}{F_{w(3p)}(b)} [F_{w(3p)}(x) - F_{w(3p)}(a)] & a < x \leq b \end{cases} \quad \dots(17-2)$$

والشكل رقم (٦-٢) يوضح فكرة هذا الأنموذج.



شكل رقم (٦-٢): يوضح فكرة أنموذج ويبيل المركب المبتور

## ٤-٢: الطريقة المستعملة في عملية تقدير المعلمات:

سنعتمد في عملية تقدير معلمات النماذج المستعملة في البحث على طريقة الامكان الاعظم (Maximum Likelihood Method) فقط؛ وذلك لكونها من الطرق المفضلة حيث تتصف بخاصية عدم التغير (invariant property) إضافة الى عدد من الخواص الاحصائية المميزة وهي:

١. مقدرات الامكان الاعظم تكون متسقة (consistent).
٢. مقدرات الامكان الاعظم تكون غير متحيزة (asymptotically unbiased) على الرغم من أنها قد تكون متحيزة (biased) في العينات المحدودة.
٣. مقدرات الامكان الاعظم تكون كفوءة (asymptotically efficient).
٤. مقدرات الامكان الاعظم تتصف بخاصية الكفاية (sufficient property).
٥. مقدرات الامكان الاعظم تكون (asymptotically normally) <sup>(22)</sup>.

وتعد طريقة الامكان الاعظم من اهم طرائق التقدير النقطية وأكثرها استعمالاً لتقدير معلمات النماذج، وقد اقترحها العالم الاحصائي الشهير (Fisher) عام ١٩٢٠، إذ تفترض ان المعلمة المراد تقديرها لمجتمع معين هي كمية غير معروفة تقدر في ضوء معطيات العينة.

إن إستعمال هذه الطريقة في معظم الحالات يؤدي الى تكوين معادلات طبيعية غير خطية والتي يتطلب ايجاد قيم جذورها إستعمال احدى الطرائق التكرارية مثل طريقة (نيوتن- رافسون).

ان فكرة طريقة الامكان الاعظم في التقدير تعتمد اساساً على ايجاد دالة الامكان (Likelihood Function) للتوزيع المستعمل (سواء أكان أنموذج منفرد أم مركب) ثم يؤخذ التفاضل الجزئي لدالة الامكان الأعظم بالنسبة للمعالم المراد تقديرها.

$$\frac{dL(x; \theta_G, \theta_H)}{d\theta_G} = 0, \quad \frac{dL(x; \theta_G, \theta_H)}{d\theta_H} = 0$$

حيث ان:

$\theta_G$  : تمثل معلمات التوزيع الاول  $g(x; \theta_G)$ .

$\theta_H$  : تمثل معلمات التوزيع الثاني  $h(x; \theta_H)$ .

عندها يقال ان  $\hat{\theta}_G$  و  $\hat{\theta}_H$  بانها مقدرات الامكان الاعظم للمعلمة  $\theta_G$  و  $\theta_H$  على التوالي. وبما ان قيمة المعالم  $\theta_G$  و  $\theta_H$  التي تجعل دالة الامكان اكبر ما يمكن هي نفسها التي تجعل  $\log L$  اكبر ما يمكن. عندئذ تحل المعادلات الآتية:-

$$\frac{d \ln L(x; \theta_G, \theta_H)}{d\theta_G} = 0, \quad \frac{d \ln L(x; \theta_G, \theta_H)}{d\theta_H} = 0$$

عوضاً عن المعادلات السابقة لحساب تقدير المعالم لسهولة الحل.



٢-٤-١: إستنتاج مقدرات الإمكان الأعظم لمعلمتي توزيع *Lognormal* المبتور من الأعلى:

بالاعتماد على المعادلة رقم (٢-١٢):

$$f_{UTL}(x_i; \mu, \sigma) = \frac{f(x_i; \mu, \sigma)}{F(b)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma x} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\ln x - \mu}{\sigma} \right)^2} ; \begin{cases} 0 < x < b \\ -\infty < \mu < \infty \\ \sigma > 0 \end{cases}$$

where:  $i = 1, \dots, n$

ولإيجاد مقدرات الامكان الاعظم لهذا الأنموذج فإن:

$$L = \prod_{i=1}^n f_{UTL}(X_i; \mu, \sigma) = \prod_{i=1}^n \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma X} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\ln X - \mu}{\sigma} \right)^2} \right]$$

$$L = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot \sigma^{-n} \cdot \prod_{i=1}^n X_i \cdot e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\ln X_i - \mu)^2} \cdot \left[ \phi \left( \frac{\ln b - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-n} \quad \dots (٢-١٨)$$

وبأخذ اللوغارتم للطرفين:

$$\ln L = \frac{-n}{2} \cdot \ln(2\pi) - n \ln \sigma + \sum_{i=1}^n \ln X_i - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (\ln X_i - \mu)^2 - n \cdot \ln \phi \left( \frac{\ln b - \mu}{\sigma} \right) \quad \dots (٢-١٩)$$

وبأخذ المشتقة الجزئية الأولى لدالة لوغارتم الامكان الاعظم بالنسبة لكل معلمة من المعلمتين  $\mu$  و  $\sigma$  ومساواتها الى الصفر، نحصل على:

$$\hat{\mu} = \frac{\sum \ln X_i}{n} + \hat{\sigma} \quad \dots (٢-٢٠)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\ln X_i - \hat{\mu})^2}{n} + \left( \hat{\mu} - \frac{\sum_{i=1}^n \ln X_i}{n} \right) (\ln b - \hat{\mu}) \quad \dots (٢-٢١)$$

وبما اننا لانستطيع إيجاد المقدرات للمعلمات  $(\mu, \sigma)$  لصعوبة حل هذه المعادلات الغير خطية. لذا

نلجأ الى الطرق التكرارية في التحليل العددي. مثل طريقة نيوتن- رافسون (Newton-Raphson).

## ٢-٤-٢: تقدير المعلمات للنموذج المركب:

"في الحالات التي يكون اهتمامنا منصباً على توفيق الجزء الاخير من البيانات حيث يكون لدينا الكثير من الخسارات الصغيرة والقليل من الخسارات الكبيرة فيمكننا الاكتفاء بالتوزيع الفعلي في تمثيل جزء الخسارات الصغيرة وإستعمال أحد النماذج المعلمية ذات النهاية البطيئة في تمثيل الجزء الاخير حيث يتم تفسيره على أساس كونه ذا ازاحة باتجاه اليمين أي إنه لا يبدأ من الصفر (Origin point) بل من نقطة قطع معينة"<sup>(١١)</sup>. لذا سنعتمد في ايجاد التقديرات لمعلمات النموذج المركب على الأسلوب الآتي:-

نفرض ان لدينا عينة من المشاهدات المستقلة  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ، حيث يستند هذا الاسلوب على تجزئة التوزيع الكلي بنقطة تجزئة معينة ولتكن (a) حيث ان  $x_1, x_2, \dots, x_m \leq a < x_{m+1}, \dots, x_n$  الى جزئين بإستعمال دالتين مختلفتين فتكون الدالة الاحتمالية للتوزيع الشامل بالشكل الاتي:

$$f(x_i; \theta_G, \theta_H, w) = \begin{cases} w \cdot g(x_i; \theta_G) & 0 < x_i \leq a \\ (1-w) \cdot h(x_i; \theta_H) & a < x_i \leq b \\ 0 & o.w \end{cases} \quad \dots(22-2)$$

حيث ان b تمثل قيمة أعلى تعويض ضمن العينة. وعليه فإن دالة الامكان الأعظم ستكون بالشكل الاتي<sup>(١٢)</sup>:

$$\ln L(\theta_G, \theta_H, w) = \sum_{i=1}^n \ln f(X_i; \theta_G, \theta_H, w) \\ = \sum_{i=1}^m \ln \left\{ \frac{w}{G(a; \theta_G)} \cdot g(X_i; \theta_G) \right\} + \sum_{i=m+1}^n \ln \left\{ \left( \frac{1-w}{H(b; \theta_H) - H(a; \theta_H)} \right) \cdot h(X_i; \theta_H) \right\} \quad \dots(23-2)$$

$$= m \cdot \ln w + (n-m) \cdot \ln(1-w) \\ + \sum_{i=1}^m \ln g(X_i; \theta_G) - m \cdot \ln G(a; \theta_G) \\ + \sum_{i=m+1}^n \ln h(X_i; \theta_H) - (n-m) \cdot \ln (H(b; \theta_H) - H(a; \theta_H)) \quad \dots(24-2)$$

وحيث ان دالة الامكان الاعظم [معادلة (٢-٢٤)] أصبحت تتكون من ثلاثة أجزاء كل منها لا يعتمد على الاخر لذا فإن تقديرات الامكان الاعظم لكل من المعلمات  $w, \theta_G, \theta_H$  تعتمد على هذه الاجزاء الثلاثة فقط وبالترتيب. أي ان تقدير الامكان الاعظم لمعلمة الخلط w ستكون (m/n)، أما تقديرات الامكان الاعظم بالنسبة للمعلمات  $\theta_H, \theta_G$  فيمكن ايجادها بشكل مستقل من الاجزاء  $x_1, x_2, \dots, x_m$ ،  $x_{m+1}, x_2, \dots, x_n$  على التوالي.



١-٢-٤-٢: إشتقاق مقدرات الإمكان الأعظم للجزء الأول من العينة الكلية والذي يتبع توزيع

Weibull ذو المعلمتين المبتور من الأعلى:

بالاعتماد على

المعادلة رقم (١٤-٢):

$$f_{UTW(2p)}(x_i; \theta, \gamma) = \frac{\frac{\theta}{\gamma} \left(\frac{x_i}{\gamma}\right)^{\theta-1} \cdot e^{-\left(\frac{x_i}{\gamma}\right)^\theta}}{1 - e^{-\left(\frac{a}{\gamma}\right)^\theta}}, \quad \begin{cases} 0 < x_i \leq a \\ \theta > 0 \\ \gamma > 0 \end{cases}$$

ولإيجاد مقدرات الامكان الاعظم لهذا النموذج فإن:

$$L = \prod_{i=1}^m f_{UTW(2p)}(x_i; \theta, \gamma) = \prod_{i=1}^m \left[ \frac{\frac{\theta}{\gamma} \left(\frac{x_i}{\gamma}\right)^{\theta-1} \cdot e^{-\left(\frac{x_i}{\gamma}\right)^\theta}}{1 - e^{-\left(\frac{a}{\gamma}\right)^\theta}} \right]$$

$$L = \left(\frac{\theta}{\gamma}\right)^m \cdot \prod_{i=1}^m \left[\left(\frac{x_i}{\gamma}\right)^{\theta-1}\right] \cdot e^{-\sum_{i=1}^m \left(\frac{x_i}{\gamma}\right)^{\theta-1}} \cdot \left(1 - e^{-\left(\frac{a}{\gamma}\right)^\theta}\right)^{-m} \quad \dots(25-2)$$

وبأخذ اللوغاريتم لدالة الإمكان الأعظم:

$$\ln L = m \ln \theta - m \ln \gamma + \theta \sum_{i=1}^m \ln(x_i) - \theta \sum_{i=1}^m \ln \gamma - \sum_{i=1}^m \ln(x_i) + \sum_{i=1}^m \ln \gamma - \sum_{i=1}^m \left(\frac{x_i}{\gamma}\right)^\theta - m \ln \left(1 - e^{-\left(\frac{a}{\gamma}\right)^\theta}\right)$$

$$\dots(26-2)$$

وبأخذ المشتقة الجزئية الأولى لدالة لوغاريتم الامكان الاعظم بالنسبة لكل معلمة من المعلمتين  $\theta$  و  $\gamma$  ومساواتها الى الصفر، نحصل على:

$$\hat{\theta} = \frac{m}{\sum_{i=1}^m \ln\left(\frac{x_i}{\hat{\gamma}}\right) \left[\left(\frac{x_i}{\hat{\gamma}}\right)^{\hat{\theta}} - 1\right]} + \frac{1 - e^{-\left(\frac{a}{\hat{\gamma}}\right)^{\hat{\theta}}}}{e^{-\left(\frac{a}{\hat{\gamma}}\right)^{\hat{\theta}}} \cdot \left(\frac{a}{\hat{\gamma}}\right)^{\hat{\theta}} \cdot \ln\left(\frac{a}{\hat{\gamma}}\right)} \quad \dots(27-2)$$





$$\hat{\gamma} = \left[ \frac{e^{\left(\frac{a}{\hat{\gamma}}\right)^{\hat{\theta}} - 1} \cdot \sum_{i=1}^m (x_i)^{\hat{\theta}}}{e^{\left(\frac{a}{\hat{\gamma}}\right)^{\hat{\theta}} - 1} - \left(\frac{a}{\hat{\gamma}}\right)^{\hat{\theta}}} \cdot \frac{1}{m} \right]^{\frac{1}{\hat{\theta}}} \quad \dots(28-2)$$

وبما اننا لا نستطيع إيجاد المقدرات للمعلمتين  $(\theta, \gamma)$  لصعوبة حل هذه المعادلات الغير خطية، لذا نلجأ الى الطرق التكرارية في التحليل العددي أيضاً.

إن خطوات طريقة نيوتن – رافسون لهذا الجزء تتلخص بما يلي:

$$\begin{bmatrix} \theta_{k+1} \\ \gamma_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_k \\ \gamma_k \end{bmatrix} - J_{k_i}^{-1} \begin{bmatrix} g_1(\theta) \\ g_2(\gamma) \end{bmatrix}, \quad i=1,2 \quad \dots(29-2)$$

ولإيجاد القيم الأولية لـ  $(\theta_k$  و  $\gamma_k)$  تم استعمال قيم تقديرات هاتين المعلمتين الناتجة من برنامج الـ (Easy Fit) أيضاً كقيم أولية نعتد عليها في إيجاد تقديرات الإمكان الأعظم لهما.

وإن الدالتين:

$$g_1(\theta) : \text{تمثل المشتقة الاولى للوغاريتم دالة الإمكان الأعظم بالنسبة للمعلمة } \theta, \left(\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}\right)$$

$$g_2(\gamma) : \text{تمثل المشتقة الاولى للوغاريتم دالة الإمكان الأعظم بالنسبة للمعلمة } \gamma, \left(\frac{\partial \ln L}{\partial \gamma}\right)$$

$$g_1(\theta) = \frac{m}{\theta} + \sum_{i=1}^m \ln\left(\frac{x_i}{\gamma}\right) - \sum_{i=1}^m \left(\frac{x_i}{\gamma}\right)^{\theta} \ln\left(\frac{x_i}{\gamma}\right) - \frac{m}{1 - e^{-\left(\frac{a}{\gamma}\right)^{\theta}}} \cdot \left[ e^{-\left(\frac{a}{\gamma}\right)^{\theta}} \cdot \left(\frac{a}{\gamma}\right)^{\theta} \cdot \ln\left(\frac{a}{\gamma}\right) \right]$$

$$g_2(\gamma) = \frac{\theta}{\gamma} \left[ -m + \sum_{i=1}^m \left(\frac{x_i}{\gamma}\right)^{\theta} + \frac{m}{1 - e^{-\left(\frac{a}{\gamma}\right)^{\theta}}} \cdot \left( \left(\frac{a}{\gamma}\right)^{\theta} \cdot e^{-\left(\frac{a}{\gamma}\right)^{\theta}} \right) \right]$$



أما مصفوفة  $J_{k1}$  (Jacobean matrix) فهي عبارة عن مصفوفة عناصرها هي المشتقة الجزئية الأولى لكل من الدوال  $g_1(\theta)$  و  $g_2(\gamma)$  بالنسبة للمعطيات  $(\theta$  و  $\gamma)$ . أو هي مصفوفة عناصرها هي المشتقة الجزئية الثانية للوغاريتم دالة الإمكان الأعظم بالنسبة للمعطيات  $(\theta$  و  $\gamma)$ . أي أن:

$$J_{k1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(\theta)}{\partial \theta} & \frac{\partial g_1(\theta)}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial g_2(\gamma)}{\partial \theta} & \frac{\partial g_2(\gamma)}{\partial \gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta \partial \gamma} \\ \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \gamma \partial \theta} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \gamma^2} \end{bmatrix} \quad \dots(30-2)$$

حيث أن :

$$\frac{\partial g_1(\theta)}{\partial \theta} = \frac{-m}{\theta^2} - \sum_{i=1}^m \left( \frac{x_i}{\gamma} \right)^\theta \cdot \left[ \ln \left( \frac{x_i}{\gamma} \right) \right]^2$$

$$- \frac{m \cdot e^{-\left(\frac{a}{\gamma}\right)^\theta} \cdot \left(\frac{a}{\gamma}\right)^\theta \cdot \ln \left(\frac{a}{\gamma}\right)}{1 - e^{-\left(\frac{a}{\gamma}\right)^\theta}} \cdot \left\{ \ln \left(\frac{a}{\gamma}\right) \cdot \left(1 - \left(\frac{a}{\gamma}\right)^\theta\right) - \frac{e^{-\left(\frac{a}{\gamma}\right)^\theta} \cdot \left(\frac{a}{\gamma}\right)^\theta \cdot \ln \left(\frac{a}{\gamma}\right)}{1 - e^{-\left(\frac{a}{\gamma}\right)^\theta}} \right\} \quad \dots(31-2)$$

$$\frac{\partial g_1(\theta)}{\partial \gamma} = \frac{1}{\gamma} \left[ -m + \sum_{i=1}^m \left( \frac{x_i}{\gamma} \right)^\theta \cdot \left[ 1 + \theta \cdot \ln \left( \frac{x_i}{\gamma} \right) \right] \right]$$

$$+ \frac{\frac{m}{\gamma} \cdot e^{-\left(\frac{a}{\gamma}\right)^\theta} \cdot \left(\frac{a}{\gamma}\right)^\theta}{1 - e^{-\left(\frac{a}{\gamma}\right)^\theta}} \cdot \left[ 1 + \theta \cdot \ln \left(\frac{a}{\gamma}\right) \cdot \left[ 1 - \left(\frac{a}{\gamma}\right)^\theta + \frac{e^{-\left(\frac{a}{\gamma}\right)^\theta} \cdot \left(\frac{a}{\gamma}\right)^\theta}{1 - e^{-\left(\frac{a}{\gamma}\right)^\theta}} \right] \right] \quad \dots(32-2)$$

$$\frac{\partial g_2(\gamma)}{\partial \gamma} = \frac{m \cdot \theta}{\gamma^2} - \frac{\theta}{\gamma^2} \sum_{i=1}^m \left( \frac{x_i}{\gamma} \right)^\theta \cdot [\theta + 1]$$

$$+ \frac{\frac{m \cdot \theta}{\gamma^2} \cdot e^{-\left(\frac{a}{\gamma}\right)^\theta} \cdot \left(\frac{a}{\gamma}\right)^\theta}{1 - e^{-\left(\frac{a}{\gamma}\right)^\theta}} \cdot \left[ \theta \cdot \left[ \left(\frac{a}{\gamma}\right)^\theta - 1 \right] + \frac{\theta e^{-\left(\frac{a}{\gamma}\right)^\theta} \cdot \left(\frac{a}{\gamma}\right)^\theta}{1 - e^{-\left(\frac{a}{\gamma}\right)^\theta}} - 1 \right] \quad \dots(33-2)$$



٢-٤-٢: إشتقاق مقدرات الإمكان الأعظم للجزء الثاني من العينة الكلية والتي تتبع توزيع

Weibull ذو الثلاث معلمات المبتور من الأعلى:

بالاعتماد على معادلة (٢-١٥) :

$$f_{UTW(3p)}(x_i; \alpha, \beta, \lambda) = \frac{\frac{\alpha}{\lambda} \left( \frac{x_i - \beta}{\lambda} \right)^{\alpha-1} \cdot e^{-\left( \frac{x_i - \beta}{\lambda} \right)^\alpha}}{1 - e^{-\left( \frac{b - \beta}{\lambda} \right)^\alpha}}, \quad \begin{cases} a < x_i \leq b \\ \alpha > 0 \\ \lambda > 0 \\ \beta \geq 0 \end{cases}$$

فإن دالة الإمكان الأعظم تكون كالآتي:

$$L = \prod_{i=m+1}^n f_{UTW(3p)}(x_i; \alpha, \beta, \lambda) = \prod_{i=m+1}^n \left[ \frac{\frac{\alpha}{\lambda} \left( \frac{x_i - \beta}{\lambda} \right)^{\alpha-1} \cdot e^{-\left( \frac{x_i - \beta}{\lambda} \right)^\alpha}}{1 - e^{-\left( \frac{b - \beta}{\lambda} \right)^\alpha}} \right]$$

$$L = \left( \frac{\alpha}{\lambda} \right)^{n-m} \cdot \prod_{i=m+1}^n \left[ \left( \frac{x_i - \beta}{\lambda} \right)^{\alpha-1} \right] \cdot e^{-\sum_{i=m+1}^n \left( \frac{x_i - \beta}{\lambda} \right)^\alpha} \cdot \left( 1 - e^{-\left( \frac{b - \beta}{\lambda} \right)^\alpha} \right)^{-(n-m)} \quad \dots(34-2)$$

وبأخذ اللوغاريتم لدالة الإمكان الأعظم نحصل على:

$$\ln L = (n-m) \ln \left( \frac{\alpha}{\lambda} \right) + (\alpha-1) \sum_{i=m+1}^n \ln \left( \frac{x_i - \beta}{\lambda} \right) - \sum_{i=m+1}^n \left( \frac{x_i - \beta}{\lambda} \right)^\alpha - (n-m) \ln \left( 1 - e^{-\left( \frac{b - \beta}{\lambda} \right)^\alpha} \right) \quad \dots(35-2)$$

وعلى فرض معلومية معلمة الموقع \* ( $\beta = a = 500000$ ) حيث أن ( $a$ ) هي نقطة البتر ما بين الجزء الاول والجزء الثاني للعينة، وبأخذ المشتقة الجزئية الأولى لدالة لوغاريتم الإمكان الأعظم بالنسبة لكل معلمة من المعلمات  $\lambda$  و  $\alpha$  ومساواتها الى الصفر، نحصل على صيغ مقدرات الإمكان الأعظم لمعلمتي الشكل والقياس للجزء الثاني من العينة وكالآتي:  
بالنسبة للمعلمة  $\alpha$ :

$$\hat{\alpha} = \frac{(n-m)}{\sum_{i=m+1}^n \ln \left( \frac{x_i - \hat{\beta}}{\hat{\lambda}} \right) \left[ \left( \frac{x_i - \hat{\beta}}{\hat{\lambda}} \right)^{\hat{\alpha}} - 1 \right]} + \frac{1 - e^{-\left( \frac{b - \hat{\beta}}{\hat{\lambda}} \right)^{\hat{\alpha}}}}{e^{-\left( \frac{b - \hat{\beta}}{\hat{\lambda}} \right)^{\hat{\alpha}}} \cdot \left( \frac{b - \hat{\beta}}{\hat{\lambda}} \right)^{\hat{\alpha}} \cdot \ln \left( \frac{b - \hat{\beta}}{\hat{\lambda}} \right)} \quad \dots(٣٦-٢)$$

\* تم تقسيم عينة البحث الكلية الى عينتين جزئيتين بنقطة تجزئة محددة ومعلومة وهي ( $a=500000$ ) ، كذلك ظهر من خلال استعمال برنامج (Easy Fit) للكشف عن توزيع الجزء الثاني من عينة البحث والذي هو "توزيع Weibull ذو الثلاث معلمات" بأن قراءة قيمة معلمة الموقع هي ( $\beta = 500000$ ).



أما بالنسبة للمعلمة  $\lambda$  :

$$\hat{\lambda} = \left[ \frac{e^{\left(\frac{b-\hat{\beta}}{\hat{\lambda}}\right)^{\hat{\alpha}} - 1} \cdot \sum_{i=m+1}^n (x_i - \hat{\beta})^{\hat{\alpha}}}{e^{\left(\frac{b-\hat{\beta}}{\hat{\lambda}}\right)^{\hat{\alpha}} - 1} - \left(\frac{b-\hat{\beta}}{\hat{\lambda}}\right)^{\hat{\alpha}}} \cdot \frac{n-m}{n-m} \right]^{\frac{1}{\hat{\alpha}}} \quad \dots(37-2)$$

ولإيجاد المقدرات للمعلمتين  $(\alpha, \lambda)$  نلجأ إلى الطرق التكرارية في التحليل العددي أيضاً. إن طريقة نيوتن - رافسون تتطلب قيم أولية للمعلمتين الغير معلومتين  $(\alpha, \lambda)$ . وخطوات طريقة نيوتن - رافسون لهذا الجزء ستكون كالآتي:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{k+1} \\ \lambda_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_k \\ \lambda_k \end{bmatrix} - J_{ki}^{-1} \begin{bmatrix} f_1(\alpha) \\ f_2(\lambda) \end{bmatrix}, \quad i=1,2 \quad \dots(38-2)$$

ولإيجاد القيم الأولية لـ  $(\lambda_k$  و  $\alpha_k)$ ، تم استعمال قيم تقديرات هاتين المعلمتين الناتجة من برنامج الـ (Easy Fit) أيضاً كقيم أولية نعتمد عليها في إيجاد تقديرات الإمكان الأعظم لهما. وان الدالتين:

$$f_1(\alpha) : \text{تمثل المشتقة الاولى للوغاريتم دالة الامكان الأعظم بالنسبة للمعلمة } \alpha, \left( \frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} \right)$$

$$f_2(\lambda) : \text{تمثل المشتقة الاولى للوغاريتم دالة الامكان الأعظم بالنسبة للمعلمة } \lambda, \left( \frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} \right)$$

$$f_1(\alpha) = \frac{(n-m)}{\alpha} + \sum_{i=m+1}^n \ln \left( \frac{x_i - \beta}{\lambda} \right) - \sum_{i=m+1}^n \left( \frac{x_i - \beta}{\lambda} \right)^{\alpha} \ln \left( \frac{x_i - \beta}{\lambda} \right)$$

$$- \frac{(n-m)}{1 - e^{-\left(\frac{b-\beta}{\lambda}\right)^{\alpha}}} \cdot \left[ e^{-\left(\frac{b-\beta}{\lambda}\right)^{\alpha}} \cdot \left( \frac{b-\beta}{\lambda} \right)^{\alpha} \cdot \ln \left( \frac{b-\beta}{\lambda} \right) \right]$$

$$f_2(\lambda) = \frac{\alpha}{\lambda} \left[ -(n-m) + \sum_{i=m+1}^n \left( \frac{x_i - \beta}{\lambda} \right)^{\alpha} + \frac{(n-m)}{1 - e^{-\left(\frac{b-\beta}{\lambda}\right)^{\alpha}}} \cdot \left( \frac{b-\beta}{\lambda} \right)^{\alpha} \cdot e^{-\left(\frac{b-\beta}{\lambda}\right)^{\alpha}} \right]$$



أما مصفوفة  $J_{ki}$  (Jacobian matrix) فستكون كالآتي:

$$J_{ki} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\alpha)}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_1(\alpha)}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f_2(\lambda)}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_2(\lambda)}{\partial \lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \alpha \partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \lambda \partial \alpha} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \lambda^2} \end{bmatrix} \quad \dots(39-2)$$

حيث أن:

$$\frac{\partial f_1(\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{-(n-m)}{\alpha^2} - \sum_{i=m+1}^n \left( \frac{x_i - \beta}{\lambda} \right)^\alpha \cdot \left[ \ln \left( \frac{x_i - \beta}{\lambda} \right) \right]^2$$

$$- \frac{(n-m) \cdot e^{-\left(\frac{b-\beta}{\lambda}\right)^\alpha} \cdot \left(\frac{b-\beta}{\lambda}\right)^\alpha \cdot \ln \left(\frac{b-\beta}{\lambda}\right)}{1 - e^{-\left(\frac{b-\beta}{\lambda}\right)^\alpha}} \cdot \left[ \ln \left(\frac{b-\beta}{\lambda}\right) \cdot \left(1 - \left(\frac{b-\beta}{\lambda}\right)^\alpha\right) - \frac{e^{-\left(\frac{b-\beta}{\lambda}\right)^\alpha} \cdot \left(\frac{b-\beta}{\lambda}\right)^\alpha \cdot \ln \left(\frac{b-\beta}{\lambda}\right)}{1 - e^{-\left(\frac{b-\beta}{\lambda}\right)^\alpha}} \dots \right] \quad (40-2)$$

$$\frac{\partial f_1(\alpha)}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda} \left[ -(n-m) + \sum_{i=m+1}^n \left( \frac{x_i - \beta}{\lambda} \right)^\alpha \cdot \left[ 1 + \alpha \cdot \ln \left( \frac{x_i - \beta}{\lambda} \right) \right] \right]$$

$$+ \frac{(n-m) \cdot e^{-\left(\frac{b-\beta}{\lambda}\right)^\alpha} \cdot \left(\frac{b-\beta}{\lambda}\right)^\alpha}{1 - e^{-\left(\frac{b-\beta}{\lambda}\right)^\alpha}} \cdot \left[ 1 + \alpha \ln \left( \frac{b-\beta}{\lambda} \right) \cdot \left[ 1 - \left(\frac{b-\beta}{\lambda}\right)^\alpha + \frac{e^{-\left(\frac{b-\beta}{\lambda}\right)^\alpha} \cdot \left(\frac{b-\beta}{\lambda}\right)^\alpha}{1 - e^{-\left(\frac{b-\beta}{\lambda}\right)^\alpha}} \dots \right] \right] \quad (41-2)$$

كذلك:

$$\frac{\partial f_2(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{(n-m)\alpha}{\lambda^2} - \frac{\alpha}{\lambda^2} \sum_{i=m+1}^n \left( \frac{x_i - \beta}{\lambda} \right)^\alpha \cdot [\alpha + 1]$$

$$+ \frac{(n-m) \cdot \alpha \cdot e^{-\left(\frac{b-\beta}{\lambda}\right)^\alpha} \cdot \left(\frac{b-\beta}{\lambda}\right)^\alpha}{1 - e^{-\left(\frac{b-\beta}{\lambda}\right)^\alpha}} \cdot \left[ \alpha \left[ \left(\frac{b-\beta}{\lambda}\right)^\alpha - 1 \right] + \frac{\alpha e^{-\left(\frac{b-\beta}{\lambda}\right)^\alpha} \cdot \left(\frac{b-\beta}{\lambda}\right)^\alpha}{1 - e^{-\left(\frac{b-\beta}{\lambda}\right)^\alpha}} \dots \right] \quad (42-2)$$

## ٥-٢: أسلوب المقارنة بين الأنموذج المنفرد المبتور والأنموذج المركب المبتور:

تتم المقارنة ما بين الأنموذجين المستعملين بإستعمال المقياس الاحصائي متوسط مربعات الخطأ (MSE) الذي يعرف بأنه " متوسط مربعات الفروق ما بين القيم الحقيقية والقيم التقديرية "، فالأنموذج الذي يمتلك أقل قيمة لـ (MSE) يكون هو الأفضل في تمثيل هذه التعويضات وفق الصيغة الآتية:

$$MSE(\hat{F}(x)) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L (\hat{F}(x_i) - F(x_i))^2 \quad \dots (٤٣-٢)$$

حيث أن:

L: عدد قيم التعويضات.

$F(x_i)$ : قيمة التكرار التجميقي الفعلي لقيمة التعويض i.

$\hat{F}(x_i)$ : قيمة التكرار التجميقي النظري لقيمة التعويض i.

ض تم خلال عام (٢٠١١).

## المبحث الثالث/ الجانب التطبيقي

## ١-٣: المقدمة :

ينضمن هذا الفصل عرض ووصف البيانات الخاصة بالتأمين الصحي في شركة التأمين العراقية، وتوضيح كيفية الوصول الى النماذج المستعملة في البحث من خلال الإستعانة ببرنامج (Easy Fit) مع تطبيق فكرة البتر على هذه النماذج. وتم استعمال تقديرات معلمات هذه النماذج الناتجة من برنامج (Easy Fit) كقيم أولية في أستخراج تقديراتها بطريقة الإمكان الأعظم. وأخيراً تم حساب متوسط مربعات الخطأ لكل أنموذج، فالأنموذج الذي يعطي أقل قيمة لهذا المقياس يكون هو الأفضل.

## ٢-٣: عرض ووصف البيانات:

بلغت عدد حالات التعويض الخاصة بفرع التأمين الصحي وحسب ما هو مسجل في سجلات الشركة (٢١٣٣) تعويض وهي لاتشمل تعويضات حوادث العنف المسلح. وإجمالي مبالغ هذه التعويضات هو (1,236,430,089) دينار. وبعد عملية جمع البيانات وتدقيقها وإدخالها في الحاسب الالكتروني تم ترتيبها تصاعدياً حسب مبلغ التعويض، حيث كان أقل مبلغ تعويض هو (38,000) دينار واكبر مبلغ تعويض هو (2,000,000) دينار. ونظراً لضخامة عدد التعويضات وتكرار بعض القيم فقد تطلب الامر وضعها بشكل جدول تكراري وذلك باستعمال برنامج (SPSS\_Frequency).

ولأجل إعطاء فكرة توضيحية عن طبيعة بيانات العينة تم استعمال برنامج التحليل الاحصائي SPSS في ايجاد قيم بعض المؤشرات الوصفية والمبينة في الجدول رقم (١-٣) :-



جدول رقم (١-٣): قيم بعض المؤشرات الوصفية لبيانات العينة.

المؤشر	القيمة
الوسط الحسابي	٥٧٩٦٦٧.١٨
الوسيط	٥٠٠٠٠٠
المنوال	٥٠٠٠٠٠
الانحراف المعياري	٢٣٥٨٥٢.٨٠١
التباين	٥٥٦٢٦٥٤٣٦٦٢.٤٨١
معامل الالتواء	0.749
معامل التفلطح	0.972

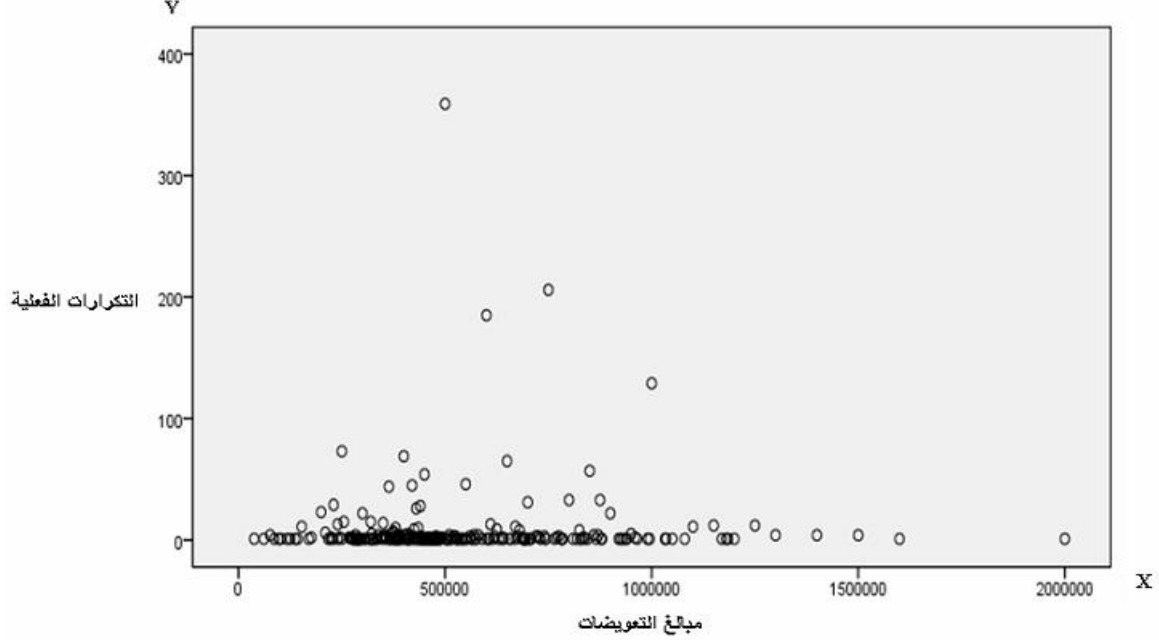
ومن خلال ملاحظة قيم هذه المؤشرات نرى بأن مقاييس النزعة المركزية تأخذ الترتيب الآتي:-

$$\text{mode} \leq \text{median} < \text{mean}$$

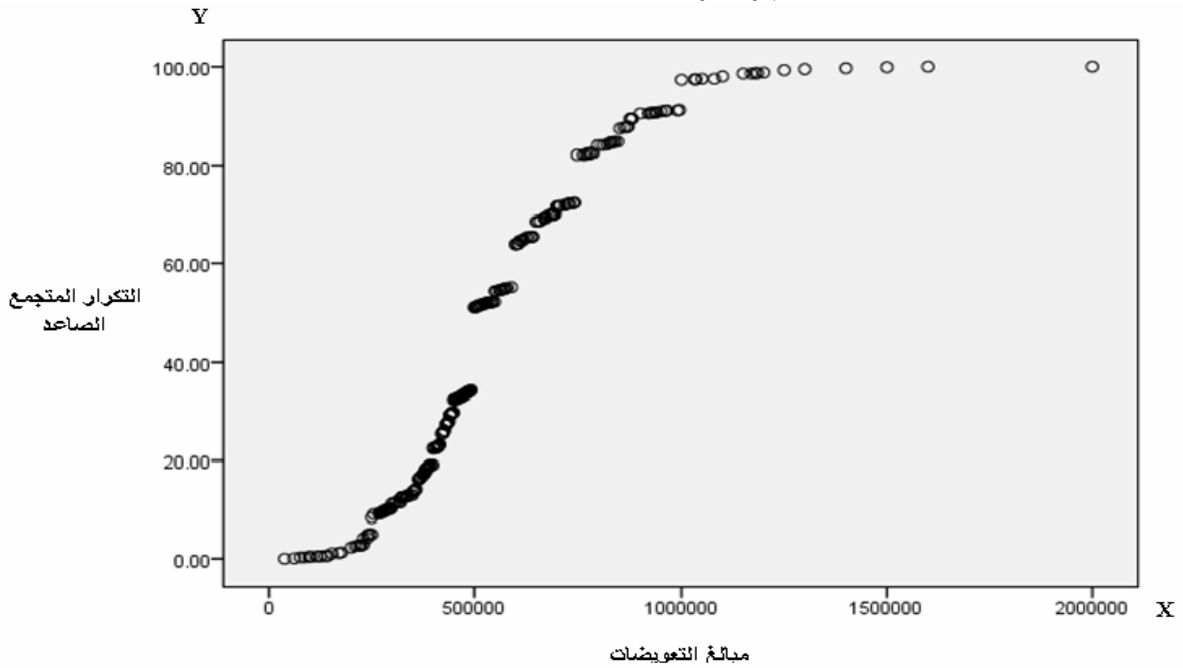
وهذه الصفة تتميز بها التوزيعات ذات معامل الالتواء الموجب (باتجاه اليمين) أما من خلال ملاحظة قيمة معامل التفلطح فيشير الى أن منحنى العينة أكثر تفلطحاً من المنحنى الطبيعي.

وبغية معرفة شكل توزيع العينة تم رسم شكل الانتشار لها باستعمال برنامج (Scatter/Dot-Spss)، حيث تم رسم مبالغ التعويضات (x) مقابل التكرارات الفعلية لها (y) وكما مبين في الشكل (١-٣)، ومن خلاله نرى ان شكل المنحنى للبيانات ذو نهاية بطيئة لكنه ليس متناقص بشكل حاد. وأن التكرار الحقيقي للمنوال والذي هو (50000) جعل المنحنى يرتفع بشكل حاد ثم ينخفض بشكل تدريجي.

كما تم رسم مبالغ التعويضات (x) مقابل الاحتمالات التراكمية لها (y) وكما مبين في الشكل (٢-٣) حيث يتضح من خلاله ان المنحني يتزايد بشكل سريع في البداية (عند قيم التعويضات الصغيرة)، ثم يتناقص مقدار الزيادة بشكل واضح عند النهاية (عند قيم التعويضات الكبيرة).



شكل رقم (١-٣): إنتشار بيانات العينة



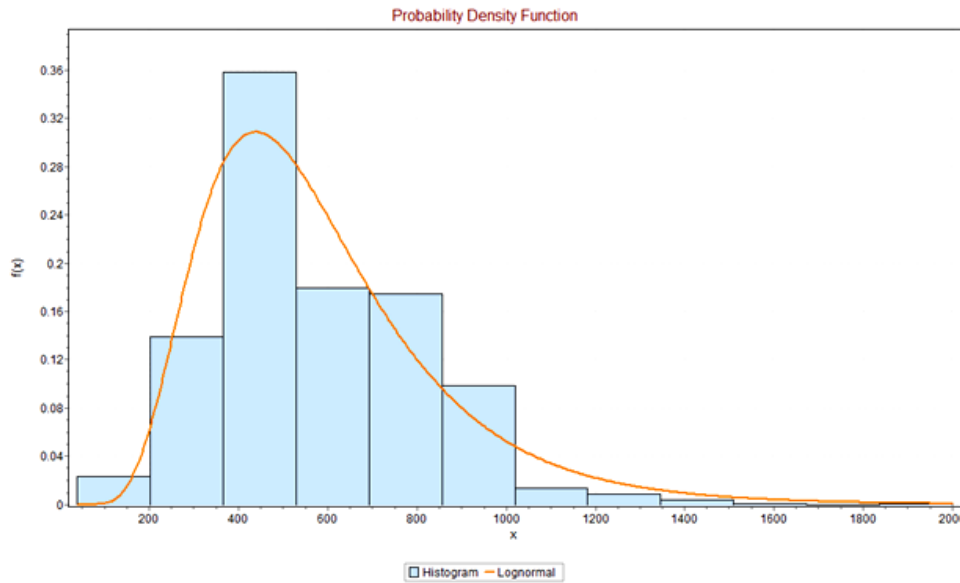
شكل رقم (٢-٣): الدالة التجميعية الفعلية للعينة

وتم استعمال برنامج (Easy Fit) لغرض الكشف الأولي عن أنواع النماذج التي تم استعمالها في البحث.



## ٣-٣ : توفيق البيانات للأنموذج المنفرد:

بالنسبة لتوزيع كل مشاهدات العينة والتي عددها (n=2133)، فقد حل توزيع (Lognormal) في المرتبة الأولى لإملاكه أقل قيمة لإحصاءة حسن المطابقة ( $X^2$ ) (Goodness of fit) والشكل رقم (٣-٣) يوضح توفيق منحني توزيع (Lognormal) ولجميع مشاهدات العينة . وهذه النتيجة للكشف الأولي تؤيد ما ذكر في البحوث السابقة حول استعمال أنموذج (Lognormal) في دراسة توزيعات حجم الخسارة، فقد ذكر (Dropkin) أن منحني (Lognormal) يعطي توفيقاً جيداً لأنواع مختلفة من بيانات التأمين بالإضافة الى كونه سهل المعالجة رياضياً من الناحية التطبيقية<sup>(٩)</sup>. ولكون تعويضات التأمين الصحي محددة بمبلغ مقداره (٢٠٠٠)\* كأعلى حد للتعويض، فقد تم بناء أنموذج (Lognormal) المبتور من الأعلى كأنموذج منفرد للبيانات والمبينة صيغته في المعادلة رقم (١٢-٢).



شكل رقم (٣-٣): توفيق منحني توزيع Lognormal لجميع المشاهدات

## ٤-٣ : التقديرات الأولية وتقديرات الإمكان الأعظم لمعلمتي توزيع Lognormal

## المبتور من الأعلى:

إن صيغ مقدرات الإمكان الأعظم للمعلمتين  $\mu$  و  $\sigma^2$  [معادلة (٢٠-٢) و (٢١-٢)] على التوالي، تتطلب استعمال طريقة (نيوتن- رافسون) في حلها، وكالمعتاد فإن هذه الطريقة تتطلب إدخال قيمة أولية لكل من  $\mu$  و  $\sigma$ ، وتم استعمال قيم تقديرات هاتين المعلمتين الناتجة من استعمال برنامج (Easy Fit) كقيم أولية في إيجاد تقديرات الإمكان الأعظم لهما، حيث تم كتابة البرامج الخاصة بتقدير معلمات هذا الأنموذج بأستعمال لغة برنامج \* (MINITAB) والنتائج موضحة في الجدول رقم (٢-٣).

\* نظراً لكون قيم التعويضات كبيرة (بالملايين) تم إجراء قسمة البيانات على (١٠٠٠) لتسهيل الحسابات.  
\* يمكن الإطلاع والحصول على خطوات البرنامج عن طريق الباحثين.

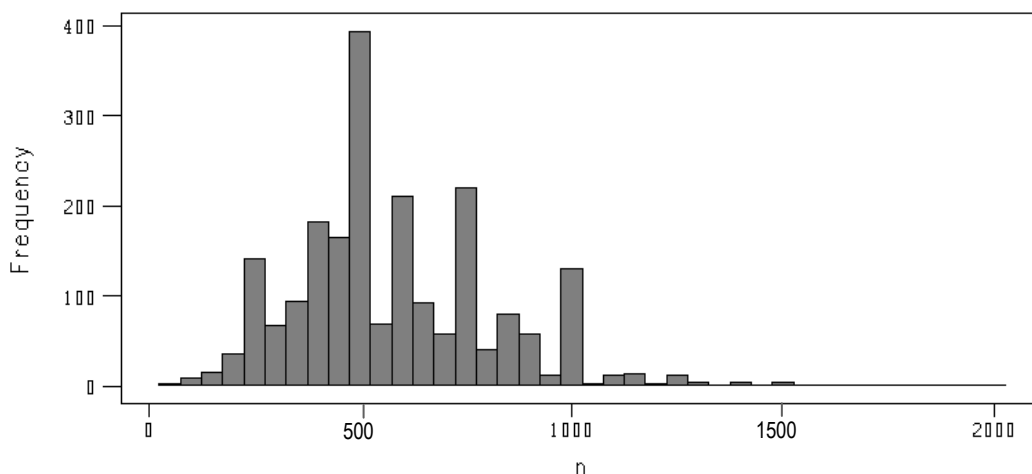


### ٥-٣ : توفيق البيانات للأنموذج المركب:

بالنسبة للأنموذج المركب تم تقسيم العينة الى جزئين بالإعتماد على نقطة تقسيم محددة؛ وتم إختيار النقطة ( $a=500$ ) والتي تمثل المنوال (Mode) والوسيط (Median) في الوقت نفسه لجميع مشاهدات العينة كأفضل نقطة تقسيم، فمن خلال رسم المدرج التكراري للعينة يمكن ملاحظة أن القيمة (٥٠٠) كأنها تفصل بين منحنيين جزئيين وكما موضح في الشكل (٤-٣):  
والجزئين هما:

**الجزء الأول:** ويضم التعويضات الصغيرة وعددها ( $m=1091$ ) مشاهدة والتي قيمها من أصغر مشاهدة وهي (٣٨) الى آخر مشاهدة قيمتها (٥٠٠)، ومن خلال برنامج (Easy Fit) حل توزيع (Weibull) ذو المعلمتين في المرتبة الأولى لإمتلاكه أقل قيمة لإحصاءة حسن المطابقة ( $X^2$ ). والشكل رقم (٥-٣) يوضح توفيق منحنى توزيع (Weibull) ذو المعلمتين لهذه المجموعة. وعلى هذا الأساس تم بناء أنموذج (Weibull) ذو المعلمتين المبتور من الأعلى لهذه المجموعة والمبينة صيغته في المعادلة رقم (١٤-٢).

Histogram of n

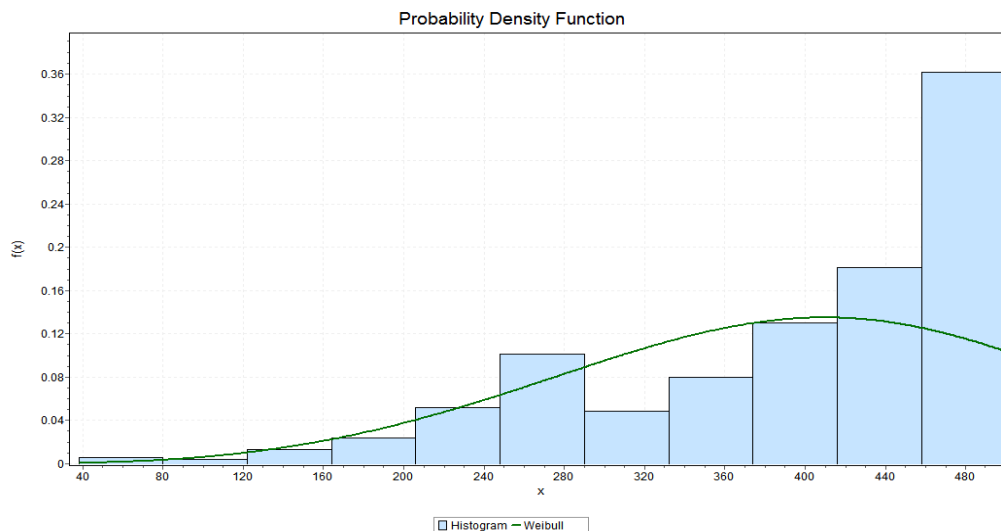


شكل رقم (٤-٣): المدرج التكراري للعينة للبيانات

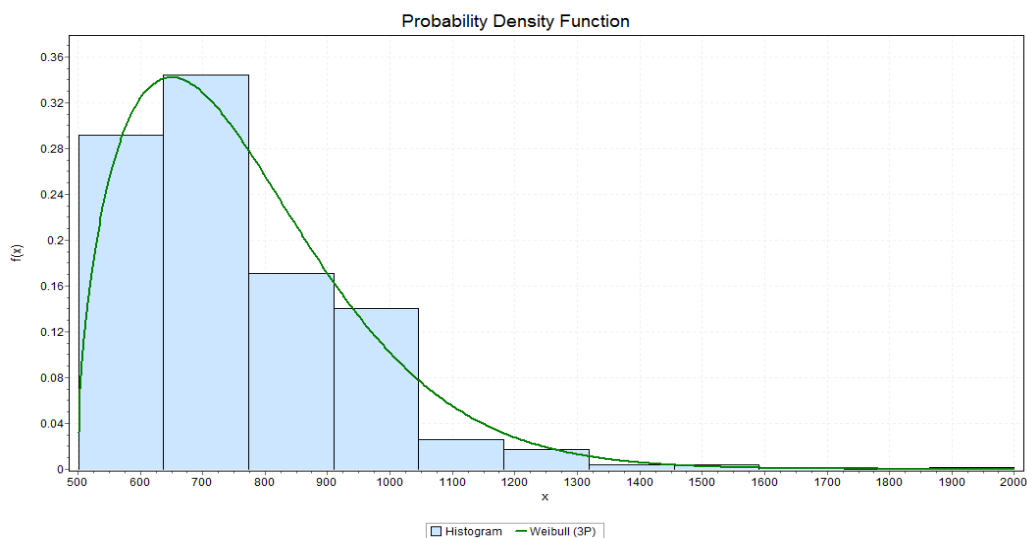
**الجزء الثاني:** ويضم التعويضات الكبيرة وعددها ( $n-m=1042$ ) مشاهدة والتي قيمها من (٥٠١) الى أكبر مشاهدة وهي (٢٠٠٠)، ومن خلال برنامج (Easy Fit) حل توزيع (Weibull) ذو الثلاث معلمات في المرتبة الأولى لإمتلاكه أقل قيمة لإحصاءة حسن المطابقة ( $X^2$ ). والشكل رقم (٦-٣) يوضح توفيق منحنى توزيع (Weibull) ذو الثلاث معلمات لهذه المجموعة. وعليه فقد تم بناء أنموذج Weibull ذو الثلاث معلمات المبتور من الأعلى أيضاً لهذه المجموعة والمبينة صيغته في المعادلة رقم (١٥-٢).



وبالتالي فإن معلمة الخلط ( $w$ ) ستكون عبارة عن المقدار ( $m/n = 1091/2133$ ). أي أن نسبة مساهمة توزيع المجموعة الأولى هي ( $0.51148619714$ ) من التوزيع المركب ونسبة مساهمة توزيع المجموعة الثانية هي ( $0.48851380286$ ) منه.



شكل رقم (٥-٣): توفيق منحنى توزيع Weibull ذو المعلمتين للتعويضات الصغيرة



شكل رقم (٦-٣): توفيق منحنى توزيع Weibull ذو الثلاث معلمات للتعويضات الكبيرة

## ٦-٣ : التقديرات الأولية و تقديرات الإمكان الأعظم لمعلمات التوزيع المركب:

## ١-٦-٣: بالنسبة للجزء الأول والذي يتبع توزيع Weibull ذو المعلمتين المبتور من الأعلى:

إن صيغ مقدرات الإمكان الأعظم للمعلمتين  $\theta$  و  $\gamma$  [معادلة (٢٧-٢) و (٢٨-٢)] على التوالي، تتطلب استعمال طريقة (نيوتن- رافسون) في حلها، وإن هذه الطريقة تتطلب إدخال قيمة أولية لكل من  $\theta$  و  $\gamma$ ، وتم استعمال قيم تقديرات هاتين المعلمتين الناتجة من استعمال برنامج (Easy Fit) كقيم أولية في إيجاد تقديرات الإمكان الأعظم لهما والنتائج موضحة في الجدول رقم (٢-٣).

## ٢-٦-٣: بالنسبة للجزء الثاني والذي يتبع توزيع Weibull ذو الثلاث معلمات المبتور من الأعلى:

إن صيغ مقدرات الإمكان الأعظم للمعلمتين  $\alpha$  و  $\lambda$  [معادلة (٣٦-٢) و (٣٧-٢)] على التوالي، تتطلب استعمال طريقة (نيوتن- رافسون) في حلها، وإن هذه الطريقة تتطلب إدخال قيمة أولية لكل من  $\alpha$  و  $\lambda$ ، وعلى فرض معلومة معلمة الموقع ( $\beta = a = 500$ ) تم استعمال قيم تقديرات هاتين المعلمتين الناتجة من استعمال برنامج (Easy Fit) كقيم أولية في إيجاد تقديرات الإمكان الأعظم لهما، والنتائج موضحة في الجدول رقم (٢-٣).

وتم كتابة البرامج الخاصة بتقدير معلمات جزئي هذا النموذج باستعمال لغة برنامج (MINITAB) أيضاً.

جدول رقم (٢-٣): القيم الأولية وتقديرات الإمكان الأعظم لمعلمات النماذج المستعملة في البحث.

Model	Sample size	Initial value		MLE	
		$\mu$	$\sigma$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
Upper truncated Lognormal	n= 2133	6.2745	0.43806	26.5156	20.24117091
		$\gamma$	$\theta$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\theta}$
Upper truncated weibull (2p)	m= 1091	445.33	3.7369	469.080	26.1573
		$\lambda$	$\alpha$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\alpha}$
Upper truncated weibull (3p)	n-m =1042	298.55	1.5328	298.629	8.9212

من خلال ملاحظة الجدول أعلاه نجد أن التغير الحاصل في قيمة مقدر الإمكان الأعظم لمعلمة الشكل عن القيمة الأولية كبير نسبياً، أما التغير الحاصل في قيمة مقدر الإمكان الأعظم لمعلمة القياس عن القيمة الأولية فهو طفيف نسبياً، والسبب في ذلك يعود الى مسألة البتر في التوزيع. ونستدل من ذلك أن حالة البتر في التوزيع تؤثر على معلمة الشكل أكثر من معلمة القياس.

## ٧-٣: التكرار المتجمع الفعلي والنظري لأنموذج Lognormal المبتور من الأعلى:

تم احتساب التكرارات المتجمعة الفعلية لمبالغ التعويضات  $F(x)$  باستعمال برنامج (Spss)، أما التكرارات المتجمعة النظرية  $\hat{F}(x)$  لأنموذج Lognormal المبتور من الأعلى فتم احتسابها من خلال استعمال الصيغة (٢-١٣) وباستعمال برنامج (EXCEL) والإستعانة بجدول التوزيع الطبيعي<sup>(٤)</sup>.



### ٨-٣: التكرار المتجمع الفعلي والنظري لأنموذج Weibull المركب المبتور من الأعلى:

تم إحتساب التكرارات المتجمعة الفعلية لمبالغ التعويضات  $F(x)$  بنفس الأسلوب السابق، أما التكرارات المتجمعة النظرية  $\hat{F}(x)$  لجزئي الأنموذج Weibull المركب المبتور من الأعلى فتم إحتسابها باستعمال الصيغة (١٧-٢) وباستعمال برنامج (EXCEL).

### ٩-٣: حساب متوسط مربعات الخطأ لأنموذجين المنفرد والمركب المبتورين والمقارنة بينهما:

بعد الحصول على التكرارات المتجمعة الفعلية والنظرية للعينة تم حساب متوسط مربعات لأنموذج المنفرد المبتور ( $MSE_{UTL}$ ) باستعمال الصيغة رقم (٢-٣) وباستعمال برنامج (EXCEL)، وكانت النتيجة كالآتي:

$$MSE_{UTL} = 0.299$$

أما متوسط مربعات الخطأ لأنموذج المركب ( $MSE_{UTL}$ ) وباستعمال الصيغة رقم (٢-٣) أيضاً وإستعمال برنامج (EXCEL)، فكانت النتيجة كالآتي:

$$MSE_{UTCW} = 0.0206$$

ومن خلال مقارنة قيمة ( $MSE_{UTL}$ ) وقيمة ( $MSE_{UTCW}$ ) نرى بأن:

$$MSE_{UTCW} < MSE_{UTL}$$

وبذلك نستطيع القول بأن أنموذج Weibull المركب المبتور من الأعلى أفضل من أنموذج Lognormal المبتور من الأعلى في تمثيل بيانات العينة (بيانات التأمين الصحي).



## المبحث الرابع / الإستنتاجات والتوصيات

### ٤-١: المقدمة :

إن مثل هذه الدراسات عن توزيعات التعويضات وبناء النماذج الاحتمالية التي يمكن من خلالها دراسة ووصف طبيعة هذه البيانات وخصائصها من جهة وبناء التوقعات المستقبلية من جهة أخرى لم يتم التطرق إليها من قبل شركة التأمين العراقية على الرغم من أهمية الموضوع. لذا يمكن اعتبار هذه الدراسة هي أول دراسة احصائية تناولت جانب التأمين الصحي في العراق، ويمكن السير عليها والعمل باستعمال النماذج الاحتمالية في مختلف أنواع التأمين الأخرى.

### ٤-٢: الإستنتاجات:

تتضمن الإستنتاجات التي تم التوصل إليها عدة جوانب، وهي:

#### ١- ما يتعلق بجانب بيانات العينة\*:

أ- إن مبالغ التعويضات التي تقل عن (١٠٠٠٠٠٠) دينار تشكل نسبة (٩١ %) تقريباً من البيانات، أما مبالغ التعويضات الكبيرة فتشكل نسبة (٨ %) تقريباً وهي نسبة ضئيلة جداً. وقد تؤدي هذه الحالة الى عدم دقة تقدير هذا الجزء من البيانات بسبب قلة عدد المشاهدات الواقعة ضمنه.

ب- بعض مبالغ التعويضات ذات تكرارات عالية جداً قياساً بتكرارات المبالغ الأخرى. وتتركز عند الأعداد الصحيحة ٢٥٠٠٠٠، ٥٠٠٠٠٠، ٧٥٠٠٠٠... وهذا يؤدي الى نوع من التشويه في عملية التعويض المتعلقة بهذا النوع من التأمين. فمثلاً: إن قيمة المنوال ٥٠٠٠٠٠ تشكل نسبة حوالي (14.5%) من مجموع التعويضات وهي نسبة عالية جداً حيث أدت الى ارتفاع منحى عينة البحث بشكل مفاجيء ثم انخفاضه بشكل مفاجيء نسبياً بحيث يشكل المنحى قمة مدببة عند هذه القيمة (شكل رقم (٣-١))، وهذه الحالة جعلت مسألة توفيق أنموذج ملائم صعبة جداً لعدم وجود أنموذج إحصائي يتوافق مع طبيعة هذه البيانات.

#### ٢- ما يتعلق بجانب معلمات النماذج المبتورة المقدره بطريقة الإمكان الأعظم:

من خلال ملاحظة جدول (٣-٢) نجد أن التغير الحاصل في قيمة مقدر الإمكان الأعظم لمعلمة الشكل عن القيمة الأولية كبير نسبياً. أما التغير الحاصل في قيمة مقدر الإمكان الأعظم لمعلمة القياس عن القيمة الأولية فهو طفيف نسبياً، والسبب في ذلك يعود الى مسألة البتر في التوزيع. ونستدل من ذلك أن حالة البتر في التوزيع تؤثر على معلمة الشكل أكثر من معلمة القياس.

#### ٣- ما يتعلق بالأنموذجين (المنفرد والمركب) المبتورين المستعملين في هذه الدراسة:

إن أنموذج Weibull المركب المبتور من الأعلى أفضل من أنموذج Lognormal المبتور من الأعلى، فمن خلال مقارنة قيمة MSE لهما نجد بأن  $(MSE_{UTCW} < MSE_{UTL})$  وهذا يدل على إن استعمال النماذج المركبة أفضل من استعمال النماذج المنفردة في تمثيل بيانات التعويضات (بيانات التأمين) بشكل عام.

\* يمكن الحصول والإطلاع على البيانات عن طريق الباحثين.

## ٤-٣: التوصيات:

- ١- استعمال أنموذج lognormal كأنموذج أولي عند توفيق أي نوع من أنواع بيانات التعويضات لكونه ذا مرونة عالية وسهل المعالجة من الناحية الرياضية.
- ٢- ضرورة تكرار عملية توفيق النماذج الاحتمالية لأي بيانات جديدة يتم الحصول عليها وذلك لغرض دراسة التغييرات التي تطرأ على عملية التعويضات.
- ٣- ضرورة إجراء دراسات مماثلة لأنواع التأمين الأخرى. فمن خلال هذه الدراسات يمكن الحفاظ على موازنات مستقرة لمحافظة شركة التأمين.
- ٤- التوسع في استعمال فكرة النماذج المركبة لظواهر أخرى وعدم الاقتصار على ظاهرة التعويضات.

## المصادر:

## أ- المصادر العربية:

- ١- اسيل ناصر حسين، (٢٠٠٧)، "مقارنة بعض طرائق تقدير دالة المعولية لتوزيع ويبل المختلط باستخدام المحاكاة"، رسالة ماجستير، كلية الادارة واقتصاد، جامعة بغداد.
- ٢- التقرير السنوي، (٢٠٠٩)، شركة التأمين العراقية، قسم التخطيط والمتابعة.
- ٣- السيفي، بديع أحمد، (١٩٧٢)، التأمين علماً وعملاً، الطبعة الاولى، بغداد.
- ٤- امير حنا هرمز، (١٩٩٠)، الاحصاء الرياضي، جامعة الموصل، ص ١٣٨-١٤١.
- ٥- تسنيم حسن، (١٩٨٨)، " نموذج احتمالي لتعويضات التأمين الالزامي للسيارات"، رسالة ماجستير، كلية الادارة والاقتصاد، الجامعة المستنصرية.
- ٦- د.الوردي سليم علي، (١٩٨٧)، "الوجيز في اعادة التأمين العام"، (مترجم) إصدار شركة اعادة التأمين العام السويسرية، ط٤، ١٩٨٥، منشورات شركة التأمين الوطنية، بغداد.
- ٧- علي، يحيى عبد، (١٩٨٢)، "التعويض في تأمين السيارات الالزامي والتكميلي"، كلية الادارة والاقتصاد، جامعة بغداد.

## ب- المصادر الأجنبية:

- 8- Bury, Carl, v. (1975). "Statistical models in applied sciece". John Wiley and Sons, Inc., New York.
- 9- Dropkin, Lester B. (1964), "Size of loss distributions" CAS, LI, pp 198-259.
- 10- Hogg R.V.and Tanis, E.A. (1983) " Probability and statistical inference. Second edition. Macmillan publishing Co. Inc. Now York.
- 11- Hogg, Robert, V. and Klugman. Stuart, A. (1984) "Loss distributions" John Wiley & Sons, New York.
- 12- Patric, Gary., (1980), "Estimating casualty insurance loss distributions" , PCAS, 68, PP: 57-109.
- 13- Sandra Teodorescu & Eugenia Panaitescu, 3 (2009), "On The Truncated Composite Weibull-Pareto Model", Math. Reports 11(61), pp 259-273.
- 14- Sandra Teodorescu, 1 (2010), "On The Truncated Composite Lognormal-Pareto Model", Math. Reports 12(62), pp 71-84..



## Use some probability amputated models to study the characteristics of health payments in the Iraqi Insurance Company

### Abstract

Due to the lack of previous statistical study of the behavior of payments, specifically health insurance, which represents the largest proportion of payments in the general insurance companies in Iraq, this study was selected and applied in the Iraqi insurance company.

In order to find the convenient model representing the health insurance payments, we initially detected two probability models by using (Easy Fit) software:

First, a single Lognormal for the whole sample and the other is a Compound Weibull for the two Sub samples (small payments and large payments), and we focused on the compound model in some detail in terms of drafting and its importance. With the application of the state of amputation in both the fact that the specific health payments from the top by two million diners in this company.

Both models Parameters were estimated using the maximum likelihood method (MLE) and the use of style (Newton - Raphson) to find these estimates. And then compare between models using standard (MSE). Was reached in general that the compound model is better than a single model in the representation of payments.

**Keywords:** Insurance- Truncated distributions- Upper truncated lognormal model- Upper truncated Compound Weibull model- Maximum likelihood method.